


文登教育

Wendeng Education




2015

文登教育集团课堂用书

（数学一）

# 考研数学复习指南

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 黄先开 主编

**本书使用说明：**

- 本书所提供的所有网络增值服务**全部免费**。
- 答疑论坛说明及各**免费课件**介绍请扫描封底二维码。
- 书后附录全套**课后题详解**，答疑论坛**新赠**重点习题**视频讲解**。
- 总结**37个思维定势**，灵活掌握，对提升快速解题能力至关重要！

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

责任编辑：许小兵
封面设计：尚書坊 图文设计

## 名师介绍



陈文灯 中央财经大学教授，北京文登学校校长。原中央财经大学数学系主任，北京数学学会理事。在教学和科研上成果卓著，2000年获得“特殊贡献奖”，享受国务院特殊津贴，在考研学子和同仁中有口皆碑。







ISBN 978-7-5640-8488-2

理工社网址：http://www.bitpress.com.cn
答疑论坛：http://bbs.wendengonline.com

定价：59.80元




文登教育
Wendeng Education

2015

文登教育集团课堂用书

（数学一）

# 考研数学复习指南

## 网络增值版

陈文灯 黄先开 主 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习指南.数学一 / 陈文灯,黄先开主编.—北京:北京理工大学出版社,2013.12
ISBN 978-7-5640-8488-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①陈… ②黄… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第260376号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米 1/16
印　　张 / 48.75
字　　数 / 1187千字
版　　次 / 2013年12月第1版 2013年12月第1次印刷
定　　价 / 59.80元

责任编辑 / 许小兵
文案编辑 / 胡 莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

# 前 言

本书从 1995 年出版以来，历经十九年的再版和修订，集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会，已成为广大考研读者的良师诤友，同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编，成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中，本书帮助许许多多考研学子圆了梦想，帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题，编者和一些数学同仁专门开设了“复习指南答疑论坛（www. wendengonline. com/bbs）”，以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试，文登名师将一直伴随着您！许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息，我们曾数次认真商讨、仔细揣摩，对本书再次做了修订，希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外，在文登教育平台的基础上，我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课，建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南，效果将事半功倍！

此次再版，我们做了以下修订。

(1)“变繁为简，变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结，使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧，并给出了详细的分析，使同学们了解这些方法的由来，让“玄妙”变得顺理成章。例如，连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明，尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法，经过我们的分析，原题将变得非常“初等”，非常简单，只要仿效，即可自行解答。

(2)例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用，根据题型特点，能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”，以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容，修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助，再版力求尽量做到完美。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

最后回答考生们的问题："如何有效地利用您的书提高复习效果？""考好数学，书要看几遍？"

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看，对基础部分要多下点功夫，做到概念、定理能用自己的语言叙述，习题应全部都做。高数的基础：极限、导数与微分、不定积分；线性代数的基础：矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量；概率论与数理统计的基础：事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、贝努里概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征[期望 $E(X)$、方差 $D(X)$、协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$，相关系数 $\rho_{XY}$]。如果是自学，应先仔仔细细地把本书看一遍，然后再详细看二三遍，对重点知识点着重理解、揣摩；如果是参加强化班，最好应该与上课"同步"进行，课后再看一遍即可。

送给考研朋友一首诗：

数学基础树的根，
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺，
功到高分自然成。

陈文灯

2013.11

# 目　录

## 第一篇　高等数学

## 第三篇 概率论与数理统计

## 附录　课后习题答案详解

# 第一篇　高等数学

## 第一章　函数、极限和连续

### 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、函数的基本性质

**1.奇偶性**

设函数 $f(x)$ 在对称区间 $X$ 上有定义，如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 $y$ 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数，偶函数的代数和仍为偶函数；

(2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数，奇数个奇函数之积为奇函数；

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数：$|x|$，$\cos x$，$x^{2n}$($n$ 为正整数)，$e^{|x|}$，$e^{x^2}$，….

常见的奇函数：$\sin x$，$\tan x$，$\dfrac{1}{x}$，$x^{2n+1}$，$\arcsin x$，$\arctan x$，….

**提示** 判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质.

**注** (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇函数或偶函数.

**【例 1.1】** 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$；　　(2) $y = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为奇函数；

(3) $y = F(x)\left(\dfrac{1}{a^x - 1} + \dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a > 0, a \neq 1$，$F(x)$ 为奇函数.

**【解】** (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$，有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$，

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故　$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令} t=-u} \int_0^{x} f(-u)(-\mathrm{d}u)$$
$$=-\int_0^{x} f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数})$$
$$=F(x),$$

故 $y=\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,则

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2},$$
$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$为偶函数.

**2.周期性**

设函数 $f(x)$ 在区间 $X$ 上有定义,若存在一个与 $x$ 无关的正数 $T$,使对于任一 $x\in X$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 $T$ 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

(1) 若 $T$ 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为$\dfrac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x),g(x)$ 均是以 $T$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 $T$ 为周期的函数;

(3) 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2,(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 $T_1,T_2$ 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期:$\sin x,\cos x$,其周期 $T=2\pi$;

$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$,其周期 $T=\pi$.

**提示** 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是根据周期函数的定义,有时也用其运算性质.

**【例 1.2】** 设对一切实数 $x$,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,则 $f(x)$ 是周期为______的周期函数.

**【解】** $$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)-\sqrt{f(x)-f^2(x)}}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$
$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x) \quad \left(\text{由题设知 } f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right),$$

即 $f(1+x)=f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

**【例 1.3】** 设 $f(x)$ 是在$(-\infty,+\infty)$ 上以 $T$ 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数,则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 $T$ 为周期的周期函数;

(2) 如果$\int_a^T f(x)\mathrm{d}x\neq 0$,则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与以 $T$ 为周期的周期函数之和.

**【证】**(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$\begin{aligned}F(x+T)&=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x),\end{aligned}$$

所以,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 $T$ 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 $k$,有

$$G(x)=\int_a^x[f(t)-k+k]\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t+k(x-a).$$

因为 $k(x-a)$ 是线性函数,所以,只需证明当 $k$ 取某一值时,$g(x)=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t$ 以 $T$ 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$\begin{aligned}g(x+T)&=\int_a^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t\\&=g(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT.\end{aligned}$$

取 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$,有 $g(x+T)=g(x)$,即 $g(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数.

**3. 有界性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $X$ 上有定义,如果 $\exists M>0$,使得对于一切 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 $X$ 上有界;若不存在这样的 $M$,则称 $f(x)$ 在区间 $X$ 上无界.

注 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

| 六个常见的有界函数: | | |
|---|---|---|
| $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$, | $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$, | $x\in(-\infty,+\infty)$; |
| $\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$, | $\lvert\arccos x\rvert\leqslant\pi$, | $x\in[-1,1]$; |
| $\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$, | $\lvert\operatorname{arccot} x\rvert<\pi$, | $x\in(-\infty,+\infty)$ |

**提示** 判别函数的界,一般首先将函数取绝对值,然后用不等式放缩法求解;或借助导数利用求最大(小)值法处理.

**【例 1.4】**函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.　　(B) 有下界无上界.

(C) 有界,且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.　　(D) 有界且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$.　　【　】

**【解】**$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$),

故 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$，可知(C)入选.

【例 1.5】函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上为

(A) 有上界无下界.　　(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$.　　(D) 有界且 $\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{4}$.　　【　】

【解】$f(x)=\frac{\lg x}{x},f'(x)=\frac{x\frac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$.

因为 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以 $f'(x)>0$. 故 $f(x)$"↑".

因此，$\frac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\lg 1}{1}$，即 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，可知，该选(C).

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $X$ 上有定义，如果对 $\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 $X$ 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 $X$ 上没有告知可导，则其单调性的判别用定义；若 $f(x)$ 在区间 $X$ 上可导，则利用导数判别更为简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0,x_2>0$. 求证：

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$；

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1>0,x_2>0$，且 $x_1<x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\Rightarrow x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)\Rightarrow f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2);$$

(2) 证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

证明：$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x)>0$ 即可.

【证】因为 $f(x)>0$,所以,当 $x>0$ 时,$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 连续.

又 $$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{xf(x)}{f(x)}=0=F(0),$$

即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处右连续,所以,$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

当 $x>0$ 时,$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$
$$=\frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}.$$

令 $g(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$,有
$$g'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t>0,$$
所以,当 $x>0$ 时,$g(x)$ 单调增加,即有 $g(x)>g(0)=0$. 故当 $x>0$ 时,$F'(x)>0$. 所以,$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

## 二、分段函数

如果一个函数在其定义域内,对应于不同的区间段有着不同的表达形式,则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

(1) 符号函数 $$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x=0.\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

(2) $y$ 是 $x$ 的整数部分,记为 $y=[x]$.

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数
$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}.$$

注 一般而言,分段函数不是初等函数.

## 三、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 $Z_f$,如果对于 $Z_f$ 中任一 $y$ 值,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 $x$ 值,则称变量 $x$ 为变量 $y$ 的函数,记为
$$x=\varphi(y),$$
$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

注 (1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合;$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=$

$f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

提示 求反函数的步骤:

(1) 把 $x$ 从方程 $y=f(x)$ 中解出;

(2) 把刚才所得到的表达式中的 $x$ 与 $y$ 对换,即得所求函数的反函数 $f^{-1}(x)$.

**【例 1.8】** 求 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

**【解】** 令 $u=\sqrt{1+4x}$,则 $y=\dfrac{1-u}{1+u}$,

于是 $u=\dfrac{1-y}{1+y}$,即 $$\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y},$$

故 $$x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2},$$

即 $$y=-\frac{x}{(1+x)^2}.$$

**【例 1.9】** 设 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty< x <1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4< x<+\infty\end{cases}$. 求 $f^{-1}(x)$.

**【解】** 求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

由 $y=x,-\infty<x<1\ \Rightarrow x=y,\quad -\infty<y<1$,

于是,反函数为:$y=x,-\infty<x<1$.

由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4\Rightarrow x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$,

于是,反函数为:$y=\sqrt{x},\quad 1\leqslant x\leqslant 16$.

由 $y=2^x,4<x<+\infty,\quad \Rightarrow x=\log_2 y,\quad 16<y<+\infty$.

于是,反函数为:$y=\log_2 x,\quad 16<x<+\infty$.

综上所述,$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty< x <1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & 16< x<+\infty\end{cases}$.

## 四、复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f$,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z_\varphi$,若 $Z_\varphi\subset D_f$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $x$ 的复合函数.

其中,$x$ 表示自变量;$u$ 表示中间变量;$y$ 表示因变量.

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点,以下根据函数的特点分别讲几种复合的方法.

### 1. 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代,这种构成复合函数的方法称为代入法,该法适用于初等函数的复合.

**【例 1.10】** 设 $f_n(x)=\underbrace{f[f\cdots f(x)]}_{n次}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

【解】$f_2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

由以上两式可推测

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

由数学归纳法可证明该式成立.

**2. 分析法**

所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法，该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

【例 1.11】设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

【解】$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$.

1° 当 $\varphi(x)<1$ 时，

或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$；

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$.

2° 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，

或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$；

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述，$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$.

【例 1.12】设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$. 求 $f[f(x)]$.

【解】$f[f(x)]=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2\\ 0, & |f(x)|>2\end{cases}$.

1° 当 $|f(x)|\leqslant 2$ 时，

或 $|x|\leqslant 2$，$|f(x)|=|4-x^2|\leqslant 2\Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ 2\leqslant x^2\leqslant 6\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$；

或 $|x|>2$，$|f(x)|=0\leqslant 2\Rightarrow |x|>2$.

2° 当 $|f(x)|>2$ 时，

或 $|x|\leqslant 2$，$|f(x)|=|4-x^2|>2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |x|\leqslant 2 \\ |x|>\sqrt{6} \text{ 或 } |x|<\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} |x|\leqslant 2 \\ |x|<\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |x|<\sqrt{2}$；

或 $|x|>2$，$|f(x)|=0>2$， 矛盾.

综上所述，

$$f[f(x)]=\begin{cases} 0, & |x|<\sqrt{2} \\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant |x|\leqslant 2. \\ 4, & |x|>2 \end{cases}$$

**3. 图示法**

所谓图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法，适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的函数复合.

解题步骤：

① 先画出中间变量函数 $u=\varphi(x)$ 的图像；

② 把 $y=f(u)$ 的分界点在 $xOu$ 平面上画出(这是若干条平行于 $x$ 轴的直线)；

③ 写出 $u$ 在不同区间段上 $x$ 所对应的变化区间；

④ 将 ③ 所得结果代入 $y=f(u)$ 中，便得 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 $x$ 的变化区间.

**【例 1.13】** 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0. \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

**【解】** 令 $f(x)=u$，则 $\quad f(u)=\begin{cases} 1+u, & u<0 \\ 1, & u\geqslant 0 \end{cases}$.

1° 作出 $u=f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的图像，见图 1-1；

2° 再在图 1-1 中作出 $y=f(u)=\begin{cases} 1+u, & u<0 \\ 1, & u\geqslant 0 \end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图像($x$ 轴)；

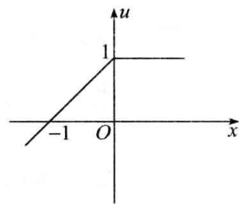


图 1-1

3° 从图中可以看出：当 $x<-1$ 时，$u<0$；当 $-1\leqslant x$ 时，$u\geqslant 0$；

4° 将 3° 代入 $y=f(u)$ 中，得

$$y=f[f(x)]=\begin{cases} 2+x, & x<-1 \\ 1, & x\geqslant -1 \end{cases}.$$

**【例 1.14】** 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}，\text{求 } f[\varphi(x)].$$

**【解】方法一：** $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

令 $u=\varphi(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$.

1° 作出 $u=\varphi(x)$ 的图像,见图 1-2;

2° 再在图 1-2 中作出 $y=f(u)=\begin{cases}u, & u\geqslant 0\\ 0, & u<0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图像($x$ 轴);

3° 从图中可以看出,当 $x<0$ 时,$u=e^{-x}$,当 $x\geqslant 0$ 时,$u=x^2$;

4° 将 3° 代入 $y=f(u)$,得 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ e^{-x}, & x<0\end{cases}$.

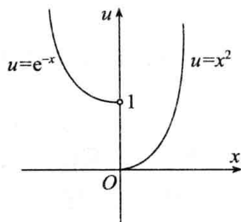


图 1-2

**方法二:**注意到 $\varphi(x)\geqslant 0$,

所以 $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{2}[\varphi(x)+|\varphi(x)|]=\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ e^{-x}, & x<0\end{cases}$.

## 五、初等函数

由常数 $C$ 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

| 三个恒等式 $a^{\log_a x}=x(x>0)$<br>$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$<br>$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}, x\in(-\infty,\infty)$ |
|---|

## 六、函数的极限及其连续性

**1. 数列极限**

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个正整数 $N$,当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

**2. 函数极限**

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个 $X>0$ 当 $|x|>X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

**3. 左右极限**

左极限:$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,当 $0<x_0-x<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

右极限:$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

**4. 无穷小(以 0 为极限的量称为无穷小量)**

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个 $X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

**5. 无穷大（实际上是极限不存在的一种形式）**

在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无穷增大，则称函数 $f(x)$ 为无穷大量.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，存在一个 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|f(x)| > M.$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，存在一个 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x)| > M.$$

注 无界变量与无穷大量的区别：无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量，例如，$y = f(x) = x\sin x$ 是无界变量，但不是无穷大量. 因为取 $x = x_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x_n) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，当 $n$ 充分大时，$f(x_n)$ 可以大于一预先给定的正数 $M$；但取 $x = x_n = 2n\pi$ 时，$f(x_n) = 0$.

**6. 无穷小的比较（重点）**

设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha(x) = 0$，　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \beta(x) = 0$.

(1) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x) = o[\beta(x)]$.

(2) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C(C \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(5) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C(C \neq 0)$，$k > 0$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 $k$ 阶无穷小.

> 常用的等价形式
>
> 当 $x \to 0$ 时，　$\sin x \sim x$，　$\arcsin x \sim x$，　$\tan x \sim x$，　$\arctan x \sim x$，
>
> $\ln(1 + x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$

**【例 1.15】** 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x) = x^3 + x^4$，当 $x \to 0$ 时，则

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小.　(B) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小.

(C) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小.　(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶，但非等价无穷小.

【　】

**【解】** 因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3 + x^4} \left(\dfrac{0}{0}\right) \xlongequal{\text{用洛必达法则}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2 + 4x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{3}.$$

所以该选(D).

【例 1.16】当 $x \to 0$ 时,下列函数哪一个是其他三个的高阶无穷小

(A)$x^2$.　(B)$1-\cos x$.　(C)$x-\tan x$.　(D)$\ln(1+x^2)$.　【　】

【解】因为当 $x \to 0$ 时 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,$\ln(1+x^2) \sim x^2$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin^2 x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=0,$$

所以该选(C).

【例 1.17】把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 进行排列,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)$\alpha,\beta,\gamma$.　(B)$\alpha,\gamma,\beta$.　(C)$\beta,\alpha,\gamma$.　(D)$\beta,\gamma,\alpha$.　【　】

【分析】凡涉及比较的无穷小量个数 $\geqslant 3$,一般这样处理:先写出各无穷小的等价无穷小,然后再比较;或者先求出各无穷小的导数,然后写出对应的等价无穷小,最后再比较.

【解】当 $x \to 0^+$ 时,$\alpha'=\cos x^2 \to 1$,$\beta'=2x\tan x \sim 2x^2$,$\gamma'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}} \sim \frac{1}{2}x$,

比较以上结果,可知应选(B).

**7. 函数连续性概念**

**定义 1**　设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内有定义,给 $x$ 在 $x_0$ 处以增量 $\Delta x$,相应地得到函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

**定义 2**　设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,

则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

注　一般来讲,证明性的命题用函数连续的定义 1 较方便;判断函数在某点是否连续,尤其是判断分段函数在分界点处是否连续用定义 2 较方便.

**定义**　若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内任一点均连续,则称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续.

**定义**　若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续,在 $x=a$ 处右连续[即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$],在 $x=b$ 处左连续[即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$],则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

**8. 间断点**

**定义**　若 $f(x)$ 在 $x_0$ 处出现如下三种情形之一:

(1) $f(x)$ 在 $x_0$ 处无定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,

则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

间断点 $x_0$ 的类型:

第 Ⅰ 类间断点 $\overset{\triangle}{=\!=}$ $f_-(x_0),f_+(x_0)$ 均存在,其中

若 $f_-(x_0)=f_+(x_0)\neq f(x_0)$,$x=x_0$ 称为可去间断点.

若 $f_-(x_0)\neq f_+(x_0)$,$x=x_0$ 称为跳跃间断点.

第 Ⅱ 类间断点 $\overset{\triangle}{=\!=}$ $f_-(x_0),f_+(x_0)$ 至少有一个不存在.

若 $f_-(x_0),f_+(x_0)$ 之中至少有一个为 $\infty$,则 $x=x_0$ 称为无穷间断点.

## 七、重要公式和定理

**定理 1** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$.

**定理 2** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

**【例 1.18】** 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

**【解】** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0\Leftrightarrow\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha(x)=\alpha(x)$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$

$$\Leftrightarrow \sin 6x+xf(x)=\alpha(x)x^3$$
$$\Leftrightarrow 6x+xf(x)=6x-\sin 6x+\alpha(x)x^3.$$

当 $x\neq 0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\alpha(x)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{36\sin 6x}{6x}=36.$$

**定理 3** (保号性定理)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 $A<0$),则存在一个 $\delta>0$,当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 且 $x\neq x_0$ 时,$f(x)>0$[或 $f(x)<0$].

**定理 4** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$f(x)>0$[或 $f(x)<0$],则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

**定理 5** 单调有界数列必有极限.

**定理 6** (夹逼定理)设在 $x_0$ 的邻域内,恒有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

**【例 1.19】** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$.

**【解】** 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$,$\sqrt{3}\leqslant\sqrt{x+3}\leqslant 2$(把含 $n$ 的项留下来),

所以 $\sqrt{3}x^n\leqslant x^n\sqrt{x+3}\leqslant 2x^n$,$0<x<1$.

于是 $\int_0^1\sqrt{3}x^n\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 2x^n\,\mathrm{d}x$.

而 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3}x^n\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x^n\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}2\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x=0.$

【例 1.20】求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

【解】$3\leqslant(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3$(因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1(\alpha>0)$),

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.$

【例 1.21】求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant 0)$.

【分析】比较 $1,x^n$ 和$\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$的大小,首先看不等式$\dfrac{x^n}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant 1$是否成立.

因为 $x>0$, $\dfrac{x}{\frac{x^2}{2}}=\dfrac{2}{x}$,所以 $x\geqslant 2$ 时,$x^n\leqslant\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$.

即必须将$[0,+\infty)$分成$[0,1]$,$(1,2]$,$(2+\infty)$三部分进行考虑.

【解】1° 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$,所以当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=1$.

2° 当 $1<x\leqslant 2$ 时,

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}x.$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}x=x,$$

所以,当 $1<x\leqslant 2$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x$.

3° 当 $x>2$ 时,

$\dfrac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}\,\dfrac{x^2}{2}$.

又 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\,\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2},$$

所以,当 $x>2$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\dfrac{x^2}{2}$.

综上所述 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x, & 1<x\leqslant 2\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2\end{cases}.$$

**定理 7** 无穷小的运算性质:

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;

(3) 无穷小乘以有界变量仍为无穷小.

【例 1.22】求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x+5}{3x^5+2x+3}\right)(2+\cos x-3\sin x)$.

【解】因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+5}{3x^5+2x+3}=0$, $|2+\cos x-3\sin x|\leqslant 6$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x+5}{3x^5+2x+3}\right)(2+\cos x-3\sin x)=0$.

【例 1.23】求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$.

提示 凡函数的表达式中含有$a+\sqrt{b}$(或$\sqrt{a}+\sqrt{b}$),则在运算前通常要在分子分母乘以其共轭根式$a-\sqrt{b}$(或$\sqrt{a}-\sqrt{b}$),反之亦然,然后再做有关分析运算.

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

因为当$n\to\infty$时,$\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0\quad(n\to\infty)$.

又$|(-1)^n|=1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=0$.

**定理 8** (无穷大与无穷小的关系定理)

在同一变化趋势下无穷大的倒数为无穷小;非“0”的无穷小量之倒数为无穷大.

**定理 9** 极限的运算法则

设$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$,

则 (1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2)$\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)=AB$.

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

**定理 10 洛必达法则**

**法则 I** $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ 设函数$f(x),g(x)$满足条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

(2)$f(x),g(x)$在$x_0$的邻域内可导(在$x_0$处可除外)且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$),

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**法则 I′** $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ 设函数$f(x),g(x)$满足条件:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$;

(2) 存在一个$X>0$,当$|x|>X$时,$f(x),g(x)$可导,且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$),

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**法则 Ⅱ** $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；

(2) $f(x),g(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内可导（$x_0$ 处可除外），且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 $\infty$）.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**法则 Ⅱ′** $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 仿法则 Ⅰ′ 可写出.

注 用洛必达法则应注意的事项：

(1) 只有 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的未定式，才可能用洛必达法则，一次利用洛必达法则后得到的式子只要是 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，则可一直用下去；

(2) 每用完一次洛必达法则，要将式子整理化简；

(3) 为简化运算，经常将洛必达法则与等价无穷小结合使用；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在（非 $\infty$ 型）$\nRightarrow\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在；

(5) 当 $x\to\infty$ 时，极限式中含有 $\sin x,\cos x$，不能用洛必达法则，

当 $x\to 0$ 时，极限式中含有 $\sin\dfrac{1}{x},\cos\dfrac{1}{x}$，不能用洛必达法则.

**【例 1.24】** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}$. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

**【解】** 因为 $\arcsin x\sim x$，原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

**【例 1.25】** 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+3\sin x}{3x-2\cos x}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right);\quad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{(\arctan x)^2}\ \left(\frac{0}{0}\text{型}\right).$$

**【解】** (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3\sin x}{3x-2\cos x}\xlongequal[\text{同除以 }x]{\text{分子分母}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}\sin x}{3-\dfrac{2}{x}\cos x}=\dfrac{1}{3}$.

（因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{3}{x},\dfrac{2}{x}\to 0$，$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$）

(2) 当 $x\to 0$ 时，$\arctan x\sim x$，

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

**定理 11** 初等函数在其定义域的区间内连续.

**重要公式(1)：**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

该极限的特点：$\begin{cases}① \dfrac{0}{0} \text{ 型未定式；} \\ ②\sin\square \text{ 与分数线下方的变量 } \square \text{ 形式一致.}\end{cases}$

注 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\neq 1\text{，为非}\dfrac{0}{0}\text{型未定式}\right)$.

**【例 1.26】** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$.

**【解】** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}}=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**重要公式(2)：** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}}$

该极限的特点：$\begin{cases}① 1^{\infty} \text{ 型未定式；} \\ ② \text{ 括号中 1 后的变量(包括符号)与幂互为倒数.}\end{cases}$

**【例 1.27】** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$.

**【解】** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=\mathrm{e}\cdot 1\cdot 1=\mathrm{e}.$$

**提示** 关于幂指函数有以下结论：

(1) 设 $\lim u(x)=a>0$，$\lim v(x)=b$，且 $\lim u(x)v(x)$ 存在，则 $\lim[u(x)]^{v(x)}=a^b=[\lim u(x)]^{\lim v(x)}$；

(2) 设 $\lim u(x)=0$，$\lim v(x)=\infty$，且 $\lim u(x)v(x)$ 存在，则 $\lim[1+u(x)]^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim u(x)v(x)}$；

(3) 设 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$，且 $\lim[u(x)-1]v(x)$ 存在，则 $\lim[u(x)]^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim[u(x)-1]v(x)}$.

证明：对于(2)给出证明如下，

$$\lim[1+u(x)]^{v(x)}=\lim\mathrm{e}^{v(x)\ln[1+u(x)]}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln[1+u(x)]}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\mathrm{e}^{\lim u(x)v(x)}.$$

**【例 1.28】** 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

**【解】** (1) 该极限为 $1^{\infty}$ 型，因此其底必定为 e，转而求其幂的极限，

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x^2\cdot\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=\mathrm{e}^2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}(-2x)\frac{3}{\sin x}}=\mathrm{e}^{-6}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x(1+\sin x)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x(1+\sin x)}}=e^{\frac{1}{2}},$$

**【例 1.29】** 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^x;\quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}};\quad (3)\ \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

**【解】**(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2\alpha}{x+\alpha}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2\alpha}{x+\alpha}\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2\alpha x}{x+\alpha}}=e^{-2\alpha}.$

(2) 令 $n=x$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2\ln x}{x-\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x-\ln x}\cdot\frac{x}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-\ln x}}=e^2.$$

故原极限 $=e^2$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos^2\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\sin^2\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\sin^2\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

**【例 1.30】** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$.

**【解】** 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=e.$$

**【例 1.31】** 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

**【解】** 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\frac{1}{x}}\ \overset{\text{用洛必达法则}}{=\!=\!=}\ e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}}=e^{\frac{1+2+\cdots+n}{n}}=e^{\frac{1}{2}(n+1)}.$$

**【例 1.32】** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

**【解】** 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+b}(x+a+b)^{x+a}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{x+b}\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{x+a}}.$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{x+b}=e^b,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{x+a}=e^a,$

所以原极限 $=\dfrac{1}{e^be^a}=e^{-(a+b)}.$

**重要公式(3):**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

求 $x \to \infty$ 时的极限，通常用“抓大头”的方法处理. 所谓“抓大头”，就是抓住关于 $x$ 的最高次数的项，而把其余的项略掉，例如：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

**【例 1.33】** 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-1}{3x^4-2x+1}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(100x^3+2x-5)}{\ln(2x^{10}+3x+1)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

**【解】** (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4}{3x^4}=\dfrac{2}{3}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(100x^3)}{\ln(2x^{10})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln100+3\ln x}{\ln2+10\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x}{10\ln x}=\dfrac{3}{10}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x)^{20}(3x)^{30}}{(2x)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$.

**【例 1.34】** 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，求常数 $a,b$.

**【解】** 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(b-a)x+1+b}{x+1}=3$，

由公式(3)有 $\begin{cases}1-a=0\\ b-a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}$.

**重要公式(4)：** 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=f(x_0)$

**【例 1.35】** 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A(\cos2x-\cos3x)}{x^2}, & x<0\\ 4, & x=0\\ \dfrac{B\sin x+\int_0^x\cos t^2\,dt}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续. 试确定 $A,B$.

**【解】** $f_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{A(\cos2x-\cos3x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{A(-2\sin2x+3\sin3x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{A(-4\cos2x+9\cos3x)}{2}=\dfrac{5}{2}A$，

$f_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{B\sin x+\int_0^x\cos t^2\,dt}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(B\cos x+\cos x^2)=1+B$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f_-(0)=f_+(0)=f(0)$.

即 $\dfrac{5}{2}A=1+B=4 \Rightarrow A=\dfrac{8}{5},B=3$.

**重要公式(5)：**

当 $x\to+\infty$ 时，以下各函数趋于 $+\infty$ 的速度

$\ln x, x^\alpha(\alpha>0),\ a^x(a>1),\ x^x$ （由慢到快）

当 $n\to\infty$ 时，以下各数列趋于 $+\infty$ 的速度

$\ln n, n^\alpha(\alpha>0),\ a^n(a>1),\ n!, n^n$ （由慢到快）

知道了函数趋于无穷($+\infty$)的速度后,可求出一些极限,例如:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\ln n}=\infty.$$

**重要公式(6):**

**几个常用极限**

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\,(a>0)=1$ | 特例:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{arccot}\,x=0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{arccot}\,x=\pi$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$ | |

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　未定式的定值法

提示　未定式是指呈$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$等形式的极限,以下分别介绍求解方法.

**1. $\frac{0}{0}$ 型的求解方法**

(1) 通过因式分解或根式有理化,消去"0"因子,再用极限运算法则或连续函数极限的求法求解.

所谓根式有理化是指极限式中含有$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$(或$a\pm\sqrt{b}$)的题型,在求极限之前先用它们的共轭根式$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$(或$a\mp\sqrt{b}$)分别乘以分子、分母,使其"0"因子呈现出来的一种运算.

(2) 利用等价无穷小的运算性质:

设　$\lim\alpha(x)=0,\quad \lim\beta(x)=0,\quad \alpha(x)\sim\alpha^*(x),\quad \beta(x)\sim\beta^*(x)$,则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

注　乘、除可用等价无穷小代换,加减运算最好不用等价无穷小代换. 因为掌握不好"度",易出错.

(3) 洛必达法则$\left(\text{这是求解}\frac{0}{0}\text{型极限的最有效方法}\right)$.

(4) 变量替换$\Big($数学运算的原则是一步比一步简单,若用洛必达法则后,式子反而比原来的复杂,说明用法则达不到求解目的. 此时应想到变量替换法,通常是令$x=\frac{1}{t^k}$,$k$为自然数$\Big)$.

**【例 1.36】** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【解】(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$ (根式有理化)

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\left(等价无穷小代换\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\,\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{(x\ln(1+x)-x^2)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}(根式有理化)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1}(洛必达法则)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot(1+x)=-\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x\cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

$\left[因为\ 1-\cos(\sin x)\sim\dfrac{1}{2}(\sin x)^2\right]$

**【例 1.37】**求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{(\arcsin x)^3}$.

**【解】**原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{6}.$$

**【例 1.38】**设 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内为可导函数,且$\lim\limits_{x\to12}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to12}f'(x)=1000$.求极限

$$\lim_{x\to12}\frac{\int_{12}^{x}\left[t\int_{t}^{12}f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{(12-x)^3}.$$

**【解】**原式$=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{x\int_x^{12}f(u)\mathrm{d}u}{-3(12-x)^2}=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{\int_x^{12}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)}{6(12-x)}=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{-f(x)-f(x)-xf'(x)}{-6}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to12}f(x)+\frac{1}{6}\lim_{x\to12}xf'(x)=\frac{1}{6}\times12\times1000=2000.$$

**【例 1.39】**求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

【解】若直接用洛必达法则，则原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{2}{x^3}}{100x^{99}}=\dfrac{1}{50}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$，比没用法则前复杂，可见此路不通！

用变量替换法：令 $u=\dfrac{1}{x^2}$，

$$原式=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{50}}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{50u^{49}}{e^u}=\cdots=\lim_{u\to+\infty}\frac{50!}{e^u}=0.$$

**2. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的求解方法**

(1) 洛必达法则；

(2) 变量替换法化为 $\dfrac{0}{0}$ 型.

**【例 1.40】** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$.

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

**【例 1.41】** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\int_2^x\frac{dt}{\ln t}}{x}$.

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+\ln x\cdot\frac{1}{\ln x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\int_2^x\frac{dt}{\ln t}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\ln x}}{1}=1$.

**提示** 若 $x\to\infty$ 的极限中含有 $a^x(a>0,a\neq1)$，或 $\arctan x$，或 $\operatorname{arccot}x$ 的，一定要分别求出 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的极限，两者相等，则 $x\to\infty$ 时的极限存在，否则不存在.

**【例 1.42】** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{x}{e^x}\arctan x}{1+\frac{x}{e^x}}=1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{x}e^x-\arctan x}{\frac{1}{x}e^x+1}=\dfrac{\pi}{2}$，故极限不存在.

**3. $\infty-\infty$ 型 $\Rightarrow\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用法则或"抓大头"方法处理，求解方法有三种**

(1) 通分；(2) 根式有理化；(3) 变量替换.

**【例 1.43】** 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$ （$\infty-\infty$ 型）.

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

**【例 1.44】** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$（$\infty - \infty$ 型）.

**【解】** 该题不能通分，更不可能用根式有理化，因此只能用变量替换法.

$$\text{原式} \xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{t}} \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

**【例 1.45】** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$ （$\infty - \infty$ 型）.

**【解】** 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$ （抓大头）.

**4. $0\cdot\infty$ 型 $\Rightarrow \dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用法则或“抓大头”方法求解**

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = 0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = \infty$，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)g(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)，\text{称将 } f(x)\text{“下放”}.$$

$$\lim f(x)g(x) = \lim\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)，\text{称将 } g(x)\text{“下放”}.$$

注 对数与反三角函数一般不“下放”，因为下放后的导数比原来的复杂，违背了数学运算的原则，例如 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，$\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)' = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$，后者比前者复杂.

**【例 1.46】** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan 2x^2\right)x^2$ （$0\cdot\infty$ 型）.

**【解】** 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2}{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{4x}{1+(2x^2)^2}}{-2x^{-3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4}{1+4x^4} = \dfrac{1}{2}.$

**5. $0^0$，$\infty^0$，$1^\infty$ 型 $\xrightarrow[N=e^{\ln N}]{\text{用对数恒等式}} 0\cdot\infty$ 型 $\Rightarrow \dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型**

现以 $0^0$ 型为例，设 $\lim f(x) = 0$，$\lim g(x) = 0$，则

$$\lim f(x)^{g(x)}\,(0^0) = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}，\text{指数为 } 0\cdot\infty \text{ 型}.$$

$\infty^0$，$1^\infty$ 可作类似处理.

注 $1^\infty$ 型的极限有两种求法：(1) 用对数恒等式化为 $0\cdot\infty$，再化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$；(2) 利用公式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 求解. 一般来讲，幂指函数的底呈 $[1+u(x)]$，或易化成这种形式的[其中 $u(x)\to 0$]，用后者简单.

【例 1.47】求下列极限：

$$(1)\ \lim_{x\to0^+}x^{\frac{k}{1+\ln x}};(2)\ \lim_{x\to0^+}(\cot x)^{\sin x};(3)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x;(4)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

【解】(1) 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{k\ln x}{1+\ln x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = e^{k\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^k$.

(2) 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln(\cot x)} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\csc x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2x)}{-\csc x\cdot\cot x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan^2x}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2}{x}} = e^0 = 1$.

(3) 原式 $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{x^{-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}} = e^{\frac{1}{6}}$.

【例 1.48】求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数.

【解】原式 $= \lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,

$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{n}} = e^{\frac{\ln a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}{n}} = e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$.

## 题型二 类未定式的计算

提示 类未定式是指未能确切肯定某种运算结果的极限.

例如，在某个过程中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 均无极限，则不能肯定 $f(x)+g(x)$ 的极限不存在，而要具体问题具体分析，又如，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，也不能肯定 $f(x)g(x)$ 的极限不存在.

【例 1.49】求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$.

【解】(1) 因为 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} = 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$,

$$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant1,\ \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0,$$

所以原极限 $= 0$.

这类极限有个特点就是被减函数与减函数的自变量的差恰为 1，因此这类极限的求法可借助拉格朗日中值定理.

【另解】令 $f(t) = \sin\sqrt{t}$，显然当 $x>0$ 时，$f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 上满足拉格朗日中值定理，于是有

$$\frac{\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}}{(x+1)-x} = \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f'(\xi) = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}},\text{即}$$

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} = \cos\sqrt{\xi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\xi}},x<\xi<x+1$$

故原极限 $=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\cos\sqrt{\xi}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=0.$

(2) 令 $f(t)=\ln\arctan t$，当 $x>0$ 时，$f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 上满足拉格朗日中值定理，于是有

$$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x=\frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{1}{1+\xi^2},x<\xi<x+1,$$

故原极限 $=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\xi^2}\dfrac{1}{\arctan\xi}=\dfrac{2}{\pi}.$

**【例 1.50】** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}).$

**【解】** 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}[(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{2\sqrt{x}\cdot2\sqrt{x}\cdot2\sqrt{x}}=-\frac{1}{4}.$$

**【例 1.51】** 设 $f(x-1)=\begin{cases}x, & x>1,\\ x-2, & x\leqslant1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-e^x, & x>0\\ e^x, & x\leqslant0\end{cases}.$

求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x).$

**【解】** $f(x-1)=\begin{cases}x, & x>1\\ x-2, & x\leqslant1\end{cases}\xrightarrow{\text{令 }x-1=u}f(u)=\begin{cases}u+1, & u>0,\\ u-1, & u\leqslant0\end{cases}.$

由于函数表示法与用什么字母表示无关，所以，

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ x-1, & x\leqslant0\end{cases}.$$

于是
$$f(x)g(x)=\begin{cases}-e^x(x+1), & x>0\\ e^x(x-1), & x\leqslant0\end{cases}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[-e^x(x+1)]=-1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x(x-1)=-1$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=-1.$

## 题型三 数列的极限

**提示** 一般用以下方法.

### 1. 子序列的极限与函数的极限等值

**【例 1.52】** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right).$

**【解】** 先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan^x\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{x}\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)-1}{x^{-1}}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}\cdot(-x^{-2})}{-x^{-2}}}=e^2.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=e^2.$$

【另解】$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{1}{n}}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\tan\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2.$$

【例 1.53】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{n}\right)^n$.

【解】先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x^2}$

$$\text{极限}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{x^{-2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-2x^{-3}}}=0.\text{故原极限}=0.$$

## 2. 单调有界数列必有极限

【例 1.54】已知 $x_1=\sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$, $\cdots$, $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$, $a>0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

提示 此类问题的解题程序:① 直接对通项进行分析或用数学归纳法验证数列 $\{x_n\}$ 单调有界;② 设 $\{x_n\}$ 的极限存在,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,将其代入给定的 $x_n$ 的表达式中,则该式变为 $l$ 的代数方程,解之即得该数列的极限.

【解】先证 $\{x_n\}$ 为单增数列,由于

$$x_2=\sqrt{a+x_1}>x_1,$$

设当 $n=k$ 时,$x_k>x_{k-1}$,则有

$$a+x_k>a+x_{k-1},$$

$$\Rightarrow\sqrt{a+x_k}>\sqrt{a+x_{k-1}},\text{即 } x_{k+1}>x_k,$$

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 为单增数列.

再证 $\{x_n\}$ 有界,显然 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$,

设 $n=k$ 时,$x_k<\sqrt{a}+1$,则当 $n=k+1$ 时,

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2}=\sqrt{a}+1,$$

可知 $\{x_n\}$ 有界,因此 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时,极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a+x_{n-1}}\Rightarrow l=\sqrt{a+l}$$

$$\Rightarrow l=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})\quad\left(l=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})\text{ 舍去}\right),$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}).$$

## 3. 利用极限定义求极限

提示 当数列 $x_n$ 不单调时,其极限的存在性可考虑用极限的定义证明,解题程序是先求出

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，再证 $x_n$ 的存在性.

**【例 1.55】** 设 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}, n\geqslant 1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**【解】** 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x_n}\right)$，即 $l=2+\dfrac{1}{l} \Rightarrow l=1\pm\sqrt{2}$，因为 $x_n\geqslant 2$，

所以 $l\geqslant 2$，故 $l=1+\sqrt{2}$（$l=1-\sqrt{2}$ 舍去）. 以下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

对任意的 $\varepsilon>0$，

$$|x_n-l|=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{l}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{l}\right|$$

$$=\frac{|x_{n-1}-l|}{lx_{n-1}}<\frac{|x_{n-1}-l|}{4}<\frac{|x_{n-2}-l|}{4^2}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{4^{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}<\varepsilon \quad (\text{当 } n \text{ 足够大}),$$

由极限定义 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-l)=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l=1+\sqrt{2}$.

**4. $n$ 项和，当 $n\to\infty$ 时的极限**

求解方法：

(1) 利用特殊级数求和法；

(2) 利用幂级数求和法；

(3) 利用定积分定义求极限 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$.

(i) 取 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}(b-a), \xi_k=a+\dfrac{k}{n}(b-a)$，则得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

取 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}(b-a)$， $\xi_k=a+\dfrac{k-1}{n}(b-a)$，则得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(ii) $[a,b]=[0,1]$，则 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$

取 $\xi_k=\dfrac{k-1}{n}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

取 $\xi_k=\dfrac{k}{n}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(4) 利用夹逼定理求极限.

**提示** (1) $n$ 个项按递增或递减排列的，则用夹逼定理求解.

(2) 若每一项可提一个 $\dfrac{1}{n}$，提出 $\dfrac{1}{n}$ 后剩下的可表示为一个通式，则用定积分定义求解.

**【例 1.56】** 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>1)$.

**【解】**(1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$. 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$,则

$$f(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\mathrm{d}x\right)'=\left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},$$

故原极限 $=f(1)=\left.\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\right|_{x=1}=3$.

(3) 因为$\frac{i^2}{n^2}<\frac{i^2+1}{n^2}<\frac{(i+1)^2}{n^2}$, 所以 $\exists\xi_i\in\left(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right)$,使 $\xi_i^2=\frac{i^2+1}{n^2}$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}+\frac{1}{n+\frac{n^2+1}{n}}-\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{n^2+1}{n}}-\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}.$$

(4) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$,所以原极限 $=1$.

(5) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)\frac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

(6) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p\dfrac{1}{n} = \int_0^1 x^p\mathrm{d}x = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{p+1}.$

**5. $n$ 项乘积,当 $n\to\infty$ 时的极限**

求解方法:

(1) 分子、分母同乘以一个因子,使之出现连锁反应;

(2) 把通项拆开,使各项相乘过程中中间项相消;

(3) 夹逼定理;

(4) 利用对数恒等式化为 $n$ 项和形式.

**【例 1.57】**求下列极限:

(1) 当 $|x|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})$

(2) 当 $x\neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$

**【解】**(1) 原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})}{1-x}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})}{1-x} = \cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

因为当 $|x|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$,所以原极限 $=\dfrac{1}{1-x}$.

(2) 原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\left(2\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\left(2\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$= \cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}} \xlongequal{\sin\frac{x}{2^n}\sim\frac{x}{2^n}} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\dfrac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

(3) 因为 $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\cdots\cdot(2n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\cdots\cdot(2n-1)}}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln n+\ln(n+1)+\cdots+\ln(2n-1)]-\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}, \quad ①$$

而 $\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{x+1}dx$

$$=\ln 2-\left[1-\ln(1+x)\Big|_0^1\right]=2\ln 2-1,$$

故原极限 $=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$.

注 ① 式也可表示成：$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}}=e^{\int_1^2\ln x dx}=2\ln 2-1$.

## 题型四 极限式中常数的确定(重点)

**【例 1.58】** 确定正数 $a$ 和 $b$，使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=2$.

**【解】** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt}{bx-\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}},$$

因为 $x\to 0$ 时，极限式的分子 $x^2\to 0$，整个极限存在，

所以必有 $\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$,

于是，$b=1$.

原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(1-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2\sqrt{a+x^2}}=\frac{2}{\sqrt{a}}=2$,

于是，$a=1$.

**【例 1.59】** 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，求 $a,b$.

**【解】** $f(x)=\begin{cases}ax+b, & \text{当 } |x|<1 \text{ 时},\\ \frac{1}{x}, & \text{当 } |x|>1 \text{ 时},\\ \frac{1}{2}(1+a+b), & \text{当 } x=1 \text{ 时},\\ \frac{1}{2}(-1-a+b), & \text{当 } x=-1 \text{ 时}.\end{cases}$

因为 $f(x)$ 连续，所以 $f_-(-1)=f_+(-1)=f(-1)$.

$$f_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1,f_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}(ax+b)=-a+b$$

$$\Rightarrow -1=-a+b=\frac{1}{2}(-1-a+b).\qquad ②$$

同样，$f_-(1)=f_+(1)=f(1)$，

$$f_-(1)=\lim_{x\to1^-}(ax+b)=a+b,\quad f_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$$

$$\Rightarrow 1=a+b=\frac{1}{2}(1+a+b),\qquad ③$$

由 ②，③ 式得，$b=0$，　$a=1$.

**【例 1.60】** 已知当 $x\to0$ 时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求常数 $\alpha$.

**【解】** 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$，

因为 $(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}\alpha x^2$，　$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，　$(x\to0)$

所以原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}\alpha x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}\alpha=1$，所以 $\alpha=-\dfrac{3}{2}$.

**【例 1.61】** 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=C,C\neq0$. 求常数 $a$ 与 $b$，使得当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)\sim ax^b$.

**【解】** 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=C\neq0$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}f(x)=0$，故当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}f(x)$，

有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2x}f(x)}{x^2}=C$，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x^3}=C$. 所以，当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim2Cx^3$，因此，$a=2C,b=3$.

**【例 1.62】** 求常数 $a$，使极限 $\lim\limits_{x\to0}\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(a-t)\mathrm{d}t$ 存在，并求此极限值.

**【解】** 因为

$$\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(a-t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)(\cos a\cos t+\sin a\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\cos a\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos t\mathrm{d}t+\sin a\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\sin t\mathrm{d}t$$

$$=2\cos a\int_{0}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2\cos a\left[\frac{1}{x}\int_0^x\cos t\mathrm{d}t-\frac{1}{x^2}\int_0^x|t|\cos t\mathrm{d}t\right]$$

$$= 2\cos a \cdot \frac{x\int_0^x \cos t \mathrm{d}t - \int_0^x |t| \cos t \mathrm{d}t}{x^2},$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(a-t)\mathrm{d}t$$

$$= 2\cos a \lim_{x\to 0^+}\frac{x\int_0^x \cos t \mathrm{d}t - \int_0^x t\cos t \mathrm{d}t}{x^2}$$

$$= 2\cos a \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t \mathrm{d}t}{2x} = 2\cos a \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2} = \cos a;$$

$$\lim_{x\to 0^-}\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(a-t)\mathrm{d}t$$

$$= 2\cos a \lim_{x\to 0^-}\frac{x\int_0^x \cos t \mathrm{d}t + \int_0^x t\cos t \mathrm{d}t}{x^2}$$

$$= 2\cos a \lim_{x\to 0^-}\frac{\int_0^x \cos t \mathrm{d}t + 2x\cos x}{2x}$$

$$= 3\cos a.$$

因为极限存在，所以 $\cos a = 3\cos a$. 即 $\cos a = 0, a = n\pi + \frac{\pi}{2}$，$n$ 为整数，且极限为 0.

**【例 1.63】** 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$. 证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 $h^2$ 高阶的无穷小.

**【证一】** 只需证明存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

由题设和洛必达法则得

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0).$$

所以 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0$.

$$\lim_{h\to 0}[\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 h'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)]=(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)=0,$$

$$\lim_{h\to 0}[\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)]=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)=0.$$

因此，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 应满足方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

因为系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,所以方程组存在唯一解,即存在唯一的一组实数$\lambda_1$,$\lambda_2$,$\lambda_3$,使得当$h \to 0$时,$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小.

**【证二】**由麦克劳林公式得

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + o(h^2),$$

$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + o(h^2),$$

$$f(3h) = f(0) + 3f'(0)h + \frac{9}{2}f''(0)h^2 + o(h^2).$$

故有　$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0)h + \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0)h^2 + o(h^2).$$

所以$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$应满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

以下同证法一.

## 题型五　函数连续或间断点的判定

**【例 1.64】**求下列函数的不连续点且判别类型:

$$(1) f(x) = \frac{x}{\tan x}, \quad (2) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}, \quad (3) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x, & |x| \leqslant 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}.$$

**【解】**(1) $f(x) = \frac{x}{\tan x}$的间断点为:使$\tan x = 0$的点

$$x = k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

以及使$\tan x$无定义的点

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

因为$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$,　$\lim\limits_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0, (k = 0, \pm 1, \cdots)$

所以$x = 0$及$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k = 0, \pm 1, \cdots)$为第Ⅰ类间断点(可去间断点).

因为$\lim\limits_{x \to k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty, (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$,所以$x = k\pi, (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$为第Ⅱ类间断点.

(2) 显然$x = 0$为间断点,

因为$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = 1$,　$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = -1$,

所以$x = 0$为第一类间断点(跳跃间断点).

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1,\\ 1-x, & x<-1.\end{cases}$

因为
$$f_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi}{2}x=0,$$
$$f_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0,$$
$$f(1)=\cos\frac{\pi}{2}x=0,$$
所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的连续点.

因为
$$f_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1-x)=2,$$
$$f_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0,$$
所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点(跳跃间断点).

**【例 1.65】**研究下列复合函数的连续性:

(1) 设 $y=f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ x+4, & x>1\end{cases}$. 研究 $f[g(x)]$ 的连续性.

(2) $y=f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ 5, & x>1\end{cases}$. 研究 $f[g(x)]$ 的连续性.

**【解】**(1) $f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)\leqslant 1\\ 2-g(x), & g(x)>1\end{cases}$,

令 $u=g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ x+4, & x>1\end{cases}$, 则 $f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1\\ 2-u, & u>1\end{cases}$,

用图示法求解 $f[g(x)]$(见图 1-3):

先作出 $u=g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ x+4, & x>1\end{cases}$ 的图形,再在 $xOu$ 平面上画出 $u=1$ 的图形.

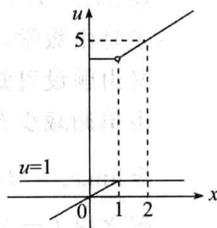



图 1-3

由图可见,当 $x\leqslant 1$ 时, $u=x$,

当 $x>1$ 时, $u=x+4$,

于是,
$$f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ -2-x, & x>1\end{cases}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2-x)=-3$,

所以 $x=1$ 为 $f[g(x)]$ 的第 Ⅰ 类间断点(跳跃间断点).

(2) 同样可用图示法得出
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases},$$
可见 $x=1$ 为其间断点(可去间断点).

【例 1.66】设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，则结论(　　)正确.

(A) 在 $x=0, x=1$ 处间断.　　　　(B) 在 $x=0, x=1$ 处连续.

(C) 在 $x=0$ 处间断，在 $x=1$ 处连续.(D) 在 $x=0$ 处连续，在 $x=1$ 处间断.

【　　】

【解】因为
$$f_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1,$$
$$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第 Ⅰ 类间断点.

又因为
$$f_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1,$$
$$f_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2-x)=1,\quad 又\ f(1)=1,$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的连续点.　故(C) 入选.

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定式 1**　求给出通项的数列的极限，要立即想到数列的单调有界定理.

【例 1.67】设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】$x_1=10, x_2=\sqrt{6+x_1}=4$，可知 $x_1>x_2$.

设 $x_k>x_{k+1}$，则 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$，

于是由数学归纳法可知对一切自然数 $n$，有 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调减少.

又由题设可知 $x_n>0, n=1,2,\cdots$，即 $\{x_n\}$ 有下界.

由单调减少有下界数列必有极限，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取 $n\to\infty$ 时的极限，得 $l=\sqrt{6+l}$.

解之得 $l=3, l=-2$(舍去).

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

**思维定势 2**　若从数列和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_n$ 中每项提出 $\dfrac{b-a}{n}$ 或 $\dfrac{1}{n}$ 后，$n$ 项和可写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right]$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{i}{n})$ 的形式，要立刻想到定积分定义.

具体方法：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n},$$

特别有
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

【例 1.68】求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{4n}+\cos\dfrac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}\right)$;

【解】(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2}\right]\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 令 $S_n=\dfrac{\pi}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{4n}+\cos\dfrac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}\right)=2\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{2i-1}{4n}\pi\cdot\dfrac{\pi}{2n}$,

$S_n$ 可看做 $f(x)=\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的积分和式

$$2\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,\xi_i=\frac{2i-1}{4n}\pi,\Delta x_i=\frac{\pi}{2n},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

于是 $I=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$

**思维定势 3** 遇到"$1^\infty$"未定式时,要立刻想到极限 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}$[其中 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$],若不是 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}$ 形式,则要将其化成该形式,其结果为 $1^\infty=\mathrm{e}^A,A=\lim f(x)g(x)$.

【例 1.69】计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin3x)^{\frac{1}{\tan x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^{\frac{x}{1-x}}$.

【解】(1) $A=\lim\limits_{x\to0}(-\sin3x)\dfrac{1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}(-3x)\dfrac{1}{x}=-3$,故 $I=\mathrm{e}^{-3}$.

(2) $A=\lim\limits_{x\to0}(\cos x-1)\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$,故 $I=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(3) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}\xlongequal{\text{抓大头准则}}a-b$,故 $I=\mathrm{e}^{a-b}$.

(4) $A=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{1+x}-1\right)\cdot\dfrac{x}{1-x}=-\dfrac{1}{2}$,故 $I=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

**思维定势 4** 当 $x\to0$ 时,求含有 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,$\arctan\dfrac{1}{x}$,$\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$,$|x|$ 的极限,要想到分别求 $x\to0^+$ 和 $x\to0^-$ 时的左、右极限,当左、右极限相等时,极限存在,否则不存在.(或当 $x\to\infty$ 时,极限式中含有 $\mathrm{e}^x$,$\arctan x$,$\operatorname{arccot}x$,$|x|$ 要分别求 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的左、右极限,当左、右极限相等时,极限存在,否则不存在.)

【例 1.70】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$.

【解】令 $f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$,于是

$$f_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}f(x)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}\cdot\lim_{x\to 0^{-}}\arctan\frac{1}{x}=0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$f_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\arctan\dfrac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}})}=0.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=0$.

【例 1.71】求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2|x|}{1+x}\arctan x$.

【解】令 $f(x)=\dfrac{1+2|x|}{1+x}\arctan x$,于是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2|x|}{1+x}\arctan x=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi;$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+2|x|}{1+x}\arctan x=(-2)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2|x|}{1+x}\arctan x=\pi$.

**思维定势 5** 确定形如 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ 极限式中的常数时,要想到:

(1) 若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$($k$ 为常数),且 $\lim g(x)=0$,则 $\lim f(x)=0$.

(2) 若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$($k$ 为常数),且 $\lim f(x)=0(\infty)$,则 $\lim g(x)=0(\infty)$.

(3) 若分子分母均为多项式的$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型未定式中的常数,一般用"抓大头"准则.

【例 1.72】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有一阶连续导数,且 $f(0)\neq 0$,$f'(0)\neq 0$,

若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$,试确定 $a,b$ 的值.

【解】由已知有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$,而$\lim\limits_{h\to 0}h=0$,

得
$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=0,$$

即 $af(0)+bf(0)-f(0)=0$,由于 $f(0)\neq 0$,

于是
$$a+b-1=0. \qquad ①$$

又由洛必达法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=af'(0)+2bf'(0)=0,$$

由于 $f'(0)\neq 0,$

于是 $a+2b=0,$ ②

所以,由 ①② 得 $a=2,b=-1$.

【例 1.73】设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$,试确定 $a,b,c$ 的值.

【解】因为 $c\neq 0,\lim\limits_{x\to 0}(ax+\sin x)=0,$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$,而当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\sim t^2>0$,所以 $b=0$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+\cos x}{x^2}=c(c\neq 0)$,而$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,

所以 $a=-1,c=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1+\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$,

故 $a=-1,b=0,c=-\dfrac{1}{2}$.

【例 1.74】设 $f(x)$ 是多项式,且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1}=4,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=8$,求 $f(x)$.

【解】由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1}=4$,可设 $f(x)=8x^8+8x^2+ax+b$,

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=8$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\Rightarrow b=0$,

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^8+8x^2+ax}{x}=8\Rightarrow a=8$,

故 $f(x)=8x^8+8x^2+8x$.

**思维定势 6** 当$\dfrac{0}{0}$ 型未定式呈现$\dfrac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}$或$\dfrac{x^k}{f_2(x)-g_2(x)}$或$\dfrac{f_1(x)-g_1(x)}{x^k}$形式,且用洛必达法则求解较复杂或不可用时,要想到用泰勒公式求解. 一般用泰勒公式展开到相互抵消后的后一项.

【例 1.75】求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$;(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$.

【解】(1) $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+o(x^2)$,

$\sqrt{1-x}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+o(x^2)$,

故原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$.

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2),$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{8} - \frac{1}{4!} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -3.$$

## 二、综合题解析

**【例 1.76】** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = e$, 又

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)], \text{试确定 } c \text{ 的值.}$$

**【解】** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^x = e^{2c}$,

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 则根据拉格朗日中值定理知, $\exists \xi \in (x-1, x)$, 使

$$f(x) - f(x-1) = f'(\xi)$$

当 $x\to\infty$ 时, $\xi\to\infty$, 所以 $\lim\limits_{\xi\to\infty} f'(\xi) = e$, 即 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)] = e$,

所以 $e^{2c} = e \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.

**【例 1.77】** 求函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin(\pi x))^n + \sin(\pi x)}{1 + [1+\sin(\pi x)]^n}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

**【分析】** 当 $x$ 取不同值时, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[1+\sin(\pi x)]^n$ 的取值不同, 所以, 应对 $x$ 的取值进行讨论.

**【解】** (1) 显然有 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

(2) 当 $0 < x < 1$ 时, $1 + \sin(\pi x) > 1$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin(\pi x))^n = \infty$, 所以, $f(x) = x$.

(3) 当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < 1 + \sin(\pi x) < 1$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}[1+\sin(\pi x)]^n = 0$, 所以 $f(x) = \sin(\pi x)$.

所以,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = -1 \\ \sin(\pi x), & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}.$$

**【例 1.78】** 求下列极限:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x - 1} = A$, $(a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

(2) 设 $f(x)$ 是三次多项式, 且有

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1,(a\neq 0),\text{求}\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}.$$

**提示** 这类由已知的极限表示欲求解的极限的命题，切忌用洛必达法则处理给定极限式的左边，因为这实质上增加了题设条件. 一般来讲，这类题是利用"逐步分析法"，极限与无穷小的关系定理，等价无穷小替换等方法解决.

**【解】**(1) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A$，　且$\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0$.

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{\sin x}}{x\ln a}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{\ln a}=A,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=A\ln a.$$

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1\quad(a\neq 0)$，

所以 $f(2a)=f(4a)=0$(否则极限为 $\infty$).

可知 $x-2a,x-4a$ 均为 $f(x)$ 的因式，又因为 $f(x)$ 为三次多项式，因此

令 $f(x)=A(x-2a)(x-4a)(x-B)$，其中 $A,B$ 为待定常数，于是

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 2a}\frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-2a}=-2Aa(2a-B)$$
$$\Rightarrow -2Aa(2a-B)=1,$$
$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to 4a}\frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-4a}=2Aa(4a-B)$$
$$\Rightarrow 2Aa(4a-B)=1,$$

解以上联立方程组得
$$\begin{cases}B=3a,\\ A=\dfrac{1}{2a^2}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a),$$

故
$$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to 3a}\frac{\dfrac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)}{x-3a}=-\frac{1}{2}.$$

**【例 1.79】**已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(x)>0$，$n$ 为自然数.

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)/f(a)\right]^n$.

**提示** 这类题应该向题设条件靠，即将所求的极限式凑成 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数定义形式.

**【解】**$\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)/f(a)\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)/f(a)-1\right]n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

## 习　题　一

**1. 填空题.**

(1) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\displaystyle\int_{-\infty}^{a}te^t\,dt$，则常数 $a=$ ________.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________.

(3) 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\neq0$，则 $a=$ ________，$b=$ ________，$c=$ ________.

(4) 已知 $f'(3)=2$，则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ________.

(5) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ________.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

(7) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，且 $f'(0)=b$，

若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq0\\A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$ ________.

(8) 设当 $x\to0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 $x$ 的三阶无穷小，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

(10) 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(\neq0,\neq\infty)$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

**2. 选择题.**

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.　　【　】

(2) 设函数 $f(x)=x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

A. 偶函数.　　B. 无界函数.　　C. 周期函数　　D. 单调函数.　　【　】

(3) 当 $x\to1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

A. 等于 2.　　B. 等于 0.　　C. 为 $\infty$.　　D. 不存在但不为 $\infty$.

【　】

(4) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq0\\a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a$ 的值是

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. $\dfrac{1}{2}$.　　【　】

(5) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times2^2}+\dfrac{5}{2^2\times3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$的值是

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 不存在.　　【　】

(6) 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=8$，则 $a$ 的值为

A. 1.　　B. 2.　　C. $\sqrt[5]{8}$.　　D. 均不对.　【　】

(7) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^{\alpha}}=\beta\neq 0$，则 $\alpha,\beta$ 的数值为

A. $\alpha=1,\beta=\dfrac{1}{3}$.　B. $\alpha=5,\beta=\dfrac{1}{3}$.　C. $\alpha=5,\beta=\dfrac{1}{3^5}$.　D. 均不对.　【　】

(8) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，

A. $f(x)$ 是 $x$ 的等价无穷小.　　B. $f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小.

C. $f(x)$ 是比 $x$ 较低阶的无穷小.　　D. $f(x)$ 是比 $x$ 较高阶的无穷小.　【　】

(9) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$，则 $a$ 的值为

A. $-1$.　B. 1.　C. 2.　D. 3.　【　】

(10) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有

A. $b=4d$.　B. $b=-4d$.　C. $a=4c$.　D. $a=-4c$.　【　】

**3. 计算题.**

(1) 求下列极限：

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；　② $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$；　④ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

(2) 求下列极限：

① $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$；　② $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$；　③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x\sqrt{1-x^2})}{\tan x\ln(1+x)}$.

(3) 求下列极限：

① $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[e^2-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right]$；　② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]\cdot\dfrac{1}{n}$；

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)$；

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$；　⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$，其中 $a>0,b>0$.

**4.** 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0.\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,dt, & x>0\end{cases}$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

**5. 求下列函数的间断点并判别类型.**

① $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$；　② $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$；　③ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, & x\leqslant 0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$.

6. 试确定常数 $a,b$ 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$ 存在，并求该极限值.

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}\left[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)\right]$，且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，求 $\alpha$，$\beta$ 的值.

8. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^5+7x^4+2)^a-x\right]=b, b\neq 0$，求 $a,b$ 的值.

9. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ e^x+\beta, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

10. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$. 求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}$.

参 考 答 案

1. (1)$a=2$.　(2) 极限 $=\dfrac{1}{2}$.　(3)$a=1,b=0,c=\dfrac{1}{2}$.

(4) 极限 $=-1$.　(5)$f[f(x)]=1$.　(6) 极限 $=2$.　(7)$A=a+b$.

(8)$a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$.　(9) 极限 $=\dfrac{1}{6}$.　(10)$A=\dfrac{1}{1991},k=1991$.

2. (1)D　(2)B　(3)D　(4)A　(5)B　(6)C　(7)C　(8)B　(9)A　(10)D

3. (1)①$e$　②$e^2$　③$e^2$　④$e^{\frac{1}{2}}$.　(2)①$\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$　②$\dfrac{2}{3}$　③$-1$.

(3)①$e^2$　②1　③$x+\dfrac{a}{2}$.　④1，提示：利用夹逼定理　⑤$\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$　⑥$\sqrt{ab}$.

4. 在 $x=0$ 处连续且可导.

5. ①$x=0$，第一类间断点.　②$x=\pm 1$，第一类间断点.

③$x=0$，第一类(跳跃)间断点；$x=1$，第二类间断点；$x=-\dfrac{\pi}{2}$，第一类(可去)间断点；

$x=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k=1,2,3,\cdots$，第二类(无穷)间断点.

6. $a=-\dfrac{1}{3},b=-1$，极限 $=-\dfrac{1}{10}$.

7. $\alpha=1,\beta=\dfrac{1}{2}$.　8. $a=\dfrac{1}{5},b=\dfrac{7}{5}$.

9. 当 $\alpha>0$ 且 $\beta=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

当 $\alpha>0$ 且 $\beta\neq-1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类(跳跃)间断点.

当 $\alpha\leqslant 0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

10. $f(0)=-3,f'(0)=0,f''(0)=9,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}=\dfrac{9}{2}$.

提示：将 $\sin x$，$f(x)$ 泰勒展开.

# 第二章　导数与微分

## 第 1 节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、导数与微分的定义

**定义 1**　设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内有定义，给 $x$ 在 $x_0$ 处以增量 $\Delta x(\neq 0)$，函数 $y$ 相应地得到增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad ①$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，该极限值称为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数，记为

$$f'(x_0),\quad y'(x_0),\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

令 $x_0+\Delta x=x$，则 ①⇒②

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad ②$$

注　导数是一个分式的极限，其中分子是函数在两点处的差值，分母是两点处的差值.

**定义 2**　函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左、右导数分别定义为

$$左导数\ f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$右导数\ f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

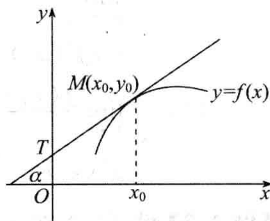


图 2-1

导数的几何意义：

$y=f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，表示曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处的切线 $MT$ 的斜率，即 $\tan\alpha=f'(x_0)$，如图 2-1 所示.

注　在导数的分式极限定义中，分母的极限 $\to 0^+$ 或 $\to 0^-$，如果只是单边行为（即仅 $\to 0^+$ 或仅 $\to 0^-$），则该极限只能是函数在该点处的左导数或右导数，而不是在该点的导数.

**【例 2.1】** 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在.　　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$.　　　【　】

【解】(A),(C) 项极限式的分母均为 $h^2$,而$\lim\limits_{h\to 0}h^2=0^+$,所以可排除(A)(C).

对于(D)项,令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导,但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0\text{ 存在.}$$

故选(B).

**定义 3**　如果 $y=f(x)$ 在$(a,b)$ 内每一点均可导,则称该函数 $f(x)$ 在$(a,b)$ 内可导;若 $y=f(x)$ 在$(a,b)$ 内可导,且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处分别具有右导数$f'_+(a)$ 和左导数 $f'_-(b)$,则$y=f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导.

**【例 2.2】**设 $f'(x_0)$ 存在,求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$;

(3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}$;　　(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

【解】(1)　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\cdot 3=3f'(x_0)$.

(2)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}(-1)=-f'(x_0)$.

(3)　
$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0+3\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}(-2)-\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\cdot 3\right]\\&=-2f'(x_0)-3f'(x_0)=-5f'(x_0).\end{aligned}$$

(4)　
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right]\\&=f'(x_0)-[-f'(x_0)]=2f'(x_0).\end{aligned}$$

**【例 2.3】**设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$,　求 $f'(1)$.

【解】因为 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$,

所以 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$.

**【例 2.4】**设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内有定义,对任意 $x$,恒有 $f(x+1)=2f(x)$. 当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$f(x)=x(1-x^2)$,试判断在 $x=0$ 处,$f'(x)$ 是否存在.

【解】当 $-1\leqslant x<0$ 时,$0\leqslant x+1<1$,于是

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)[1-(x+1)^2]=\frac{1}{2}(x+1)(-2x-x^2),$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-x^2)}{x}=1,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x(x+1)(2+x)}{x}=-1,$$

因为 $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

**定义 4** 如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x$ 处的某邻域内有定义,当自变量在点 $x$ 取得增量 $\Delta x$ 时,函数的增量 $\Delta y$ 可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha,$$

其中 $A$ 是与 $\Delta x$ 无关的量;$\alpha$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 $\Delta x$ 高阶的无穷小,则称 $y=f(x)$ 在 $x$ 处可微,$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 $x$ 处的微分,记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$,即 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x$,由于当 $x$ 为自变量时,$\mathrm{d}x=\Delta x$,同时可证 $f'(x)=A$,所以上式又可写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

注 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时,$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ 是 $\Delta y$ 的线性主部.

## 二、重要定理

**定理 1** $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)$.

**定理 2** 若 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导,则 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续,反之不真.

**定理 3** 函数 $f(x)$ 在 $x$ 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $x$ 处可导.

**定理 4** 设 $y=f(x)$ 在点 $x$ 的某邻域内单调连续,在点 $x$ 处可导且 $f'(x)\neq 0$,则其反函数在点 $x$ 所对应的 $y$ 处可导,并且有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

## 三、导数与微分的运算法则

设 $u=u(x),v=v(x)$ 均可导,则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$,　　$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(2) $(uv)'=uv'+vu'$,　　$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$;

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq 0)$,$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0)$.

## 四、基本公式

| | | |
|---|---|---|
| (1) $y=c$(常数) | $y'=0$ | $\mathrm{d}y=0$ |
| (2) $y=x^\alpha$($\alpha$ 为实数) | $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ | $\mathrm{d}y=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$ |
| (3) $y=a^x$ | $y'=a^x\ln a$ | $\mathrm{d}y=a^x\ln a\mathrm{d}x$ |
| 特例 $y=\mathrm{e}^x$ | $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ |
| (4) $y=\log_a x,a>0,a\neq 1$ | $y'=\frac{1}{x\ln a}$ | $\mathrm{d}y=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x\quad(x>0)$ |
| 特例 $y=\ln x$ | $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ | $\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\quad(x>0)$ |
| (5) $y=\sin x$ | $y'=\cos x$ | $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$ |
| (6) $y=\cos x$ | $y'=-\sin x$ | $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$ |

续表

| | | |
|---|---|---|
| (7) $y = \tan x$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ | $d(\tan x) = \sec^2 x dx$ |
| (8) $y = \cot x$ | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$ |
| (9) $y = \sec x$ | $y' = \sec x \tan x$ | $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$ |
| (10) $y = \csc x$ | $y' = -\csc x \cot x$ | $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$ |
| (11) $y = \arcsin x$ | $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ |
| (12) $y = \arccos x$ | $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ |
| (13) $y = \arctan x$ | $y' = \frac{1}{1+x^2}$ | $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$ |
| (14) $y = \text{arccot}\, x$ | $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $d(\text{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$ |

## 五、弧微分与曲率

**弧微分**：$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx, (dx > 0), ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt (dt > 0)$，

$ds = \sqrt{p^2(\theta) + p'(\theta)}\,d\theta (d\theta > 0)$.

**曲率**：曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, y)$ 处的曲率为 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

对于参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，$k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$.

**曲率半径**：曲线在点 $M$ 处的曲率 $k(k \neq 0)$ 与曲线在点 $M$ 处的曲率半径 $\rho$ 有如下关系：

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

**曲率圆**：曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率圆方程为

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

其中，$(\alpha, \beta)$ 称为曲线在点 $M(x, y)$ 处的曲率中心；$R$ 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 的曲率半径。
设 $y = f(x)$ 的二阶导数 $y''$ 在点 $x$ 不为零，则曲线在其对应点 $M(x, y)$ 处的曲率中心 $D(\alpha, \beta)$ 的计算公式为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$

**【例 2.5】** 求抛物线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $M(1, 1)$ 处的曲率圆方程.

**【解】** 由题设可知：

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

则 $$y'|_{(1,1)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{(1,1)} = \frac{1}{2}, y''\bigg|_{(1,1)} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\bigg|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}.$$

设 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆方程为

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

其中 $\alpha = 1 - \left.\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right|_{(1,1)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{7}{2}$,

$$\beta = 1 + \left.\frac{1+y'^2}{y''}\right|_{(1,1)} = 1 + \frac{1+\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = -4.$$

$$R = \left.\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{(1,1)} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

故 $y=\sqrt{x}$ 在点(1,1)处的曲率圆方程为

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = \frac{125}{4}.$$

### 六、高阶导数的定义与基本公式

**定义** 若 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 $x$ 处可导,则称 $f'(x)$ 在 $x$ 处的导数为 $y=f(x)$ 在点 $x$ 处的二阶导数,记为$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$,$f''(x)$,即

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

同样可定义 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为 $f^{(n)}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$.

高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a>0)$,特别 $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-n+1)x^{m-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

(6) 莱布尼茨公式:若 $u(x)$,$v(x)$ 均 $n$ 阶可导,则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \quad \text{其中} \quad u^{(0)} = u, \quad v^{(0)} = v.$$

## 第2节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求复合函数的导数或微分

**提示** 设 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,如果 $\varphi(x)$ 在 $x$ 处可导,$f(u)$ 在对应点 $u$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x$ 处可导,且有

$$y'_x = f'_u(u)\varphi'_x(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

这种求复合函数导数的方法称之为连锁法则. 该法则可推广到多个函数复合的情形中去.

【例 2.6】设 $y = f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arcsin x^2$, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

【解】$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right) = f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)' = \arcsin\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}$,

于是 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = (\arcsin 1)\cdot 3 = \dfrac{3}{2}\pi$.

【例 2.7】求下列函数的导数:

(1) $y = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$;  (2) $y = f^n[\varphi^n(\sin x^n)]$;

(3) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$  $(a > 0)$.

【解】(1) $y' = \cos(\ln x) + \sin(\ln x) + x\left[-\sin(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x} + \cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\right]$

$= \cos(\ln x) + \sin(\ln x) - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 2\cos(\ln x)$.

(2) $y' = nf^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot n\varphi^{n-1}(\sin x^n)\cdot\varphi'(\sin x^n)\cdot\cos x^n\cdot nx^{n-1}$

$= n^3\cdot x^{n-1}\cos x^n\cdot f^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot\varphi^{n-1}(\sin x^n)\cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot\varphi'(\sin x^n)$.

(3) $y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a}\cdot\ln a\cdot ax^{a-1} + a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

$= a^a x^{a^a-1} + a\ln a x^{a-1}a^{x^a} + \ln^2 a\cdot a^x a^{a^x}$.

【例 2.8】设 $f\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sin x$, 求 $f'[f(x)]$, $\{f[f(x)]\}'$, $\{f[f(x)]\}''$.

【解】令 $t = \dfrac{1}{2}x$, 则 $f(t) = \sin 2t$, $f'(t) = 2\cos 2t$, $f''(t) = -4\sin 2t$.

于是
$$f'[f(x)] = 2\cos 2[f(x)] = 2\cos(2\sin 2x);$$
$$\{f[f(x)]\}' = f'[f(x)]\cdot f'(x) = 2\cos(2\sin 2x)\cdot 2\cos 2x$$
$$= 4\cos(2\sin 2x)\cdot\cos 2x;$$
$$\{f[f(x)]\}'' = \{f'[f(x)]\cdot f'(x)\}' = f''[f(x)][f'(x)]^2 + f'[f(x)]f''(x)$$
$$= -4\sin(2\sin 2x)\cdot(2\cos 2x)^2 + 2\cos(2\sin 2x)\cdot(-4\sin 2x)$$
$$= -16\sin(2\sin 2x)\cos^2 2x - 8\cos(2\sin 2x)(\sin 2x).$$

【例 2.9】作变换 $u = \tan y$, $x = e^t$, 试将方程
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2(\tan y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - \sin y\cos y = 0$$
化为 $u$ 关于 $t$ 的方程.

【解】由于 $y = \arctan u$, $t = \ln x$, 故有

$\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{1+u^2}$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$. 又 $\sin y\cos y = \dfrac{u}{1+u^2}$,

于是
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dt}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{2u}{(1+u^2)^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right),$$

代入原方程并整理得 $$\frac{d^2u}{dt^2}-u=0.$$

## 题型二 求参数方程的导数或微分

提示 设 $x(t)$，$y(t)$ 均二阶可导，且 $x'(t)\neq 0$，则参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 的一、二阶导数：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}.$$

**【例 2.10】** 设 $\begin{cases}x=\cos(t^2)\\y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du,t>0\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

**【解】** $x'=-2t\sin(t^2)$，

$$y'=\cos(t^2)-2t^2\sin(t^2)-\frac{1}{2t}\cos(t^2)\cdot 2t=-2t^2\sin(t^2),$$

$$\frac{dy}{dx}=t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(t)=-\frac{1}{2t\sin(t^2)}.$$

**【例 2.11】** 设 $\begin{cases}x=2t+|t|\\y=5t^2+4t|t|\end{cases}$，求当 $t=0$ 时的导数 $\frac{dy}{dx}$.

**【解】** 当 $t>0$ 时，$\begin{cases}x=3t\\y=9t^2\end{cases}$，当 $t<0$ 时，$\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases}$.

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{9(\Delta t)^2}{3(\Delta t)}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0^-}\frac{(\Delta t)^2}{\Delta t}=0,$$

故 $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=0.$$

**【例 2.12】** 设 $\begin{cases}x=f'(t),\\y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 其中 $f(t)$ 的三阶导数存在，且 $f''(t)\neq 0$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$.

**【解】**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(t)=\frac{1}{f''(t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f''(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f''(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}\cdot\frac{1}{f''(t)}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}.$$

## 题型三　求隐函数的导数或微分

**提示** 由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$，称 $y$ 是变量 $x$ 的隐函数，其导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法有三种方法：

1° 方程两边对 $x$ 求导，要记住 $y$ 是 $x$ 的函数，则 $y$ 的函数是 $x$ 的复合函数，例如 $\frac{1}{y}$，$y^2$，$\ln y$，$e^y$ 等均是 $x$ 的复合函数. 对 $x$ 求导应按复合函数连锁法则做.

2° 公式法. 由 $F(x,y)=0$，知

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},$$

其中，$F'_x(x,y)$，$F'_y(x,y)$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 $x$ 和 $y$ 的偏导数.

3° 利用微分形式不变性，在方程两边求微分，然后解出 $\frac{dy}{dx}$.

**【例 2.13】** 设方程 $xy^2+e^y=\cos(x+y^2)$，　求 $y'$.

**【解法一】** $y^2+2xyy'+e^yy'=-\sin(x+y^2)\cdot(1+2yy')$，

$$y'=-\frac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}.$$

**【解法二】** 令 $F(x,y)=xy^2+e^y-\cos(x+y^2)$.

因为 $F'_x=y^2+\sin(x+y^2)$，　　$F'_y=2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)$，

所以 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}$.

**【解法三】** $d(xy^2+e^y)=d[\cos(x+y^2)]$，

$y^2dx+2xydy+e^ydy=-\sin(x+y^2)(dx+2ydy)$，

$[2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)]dy=-[y^2+\sin(x+y^2)]dx$，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}.$$

**【例 2.14】** 设有方程 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2t\,dt$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

**【解】** 方程两边对 $x$ 求导，可得

$$2-\sec^2(x-y)\cdot(1-y')=\sec^2(x-y)\cdot(1-y')$$

$$1-y'=\frac{1}{\sec^2(x-y)}\ \Rightarrow\ y'=1-\cos^2(x-y)=\sin^2(x-y).$$

$$y''=2\sin(x-y)\cos(x-y)\cdot(1-y')=2\sin(x-y)\cos(x-y)\cos^2(x-y)$$
$$=2\sin(x-y)\cos^3(x-y).$$

## 题型四　求幂指函数的导数或微分

**提示** $y=u(x)^{v(x)}$　$(u(x)>0,u(x)\neq1)$　$\Rightarrow y=e^{v(x)\ln u(x)}$.

$$y'=e^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

$$= u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

**【例 2.15】** 设 $y = x^{a^x} + a^{x^x} + x^{x^a}$，求 $y'$.

**【解】** $y = e^{a^x\ln x} + a^{e^{x\ln x}} + e^{x^a\ln x}$

$$y' = e^{a^x\ln x}\left(a^x\ln x\cdot\ln a + a^x\cdot\frac{1}{x}\right) + a^{e^{x\ln x}}e^{x\ln x}(\ln x+1)\cdot\ln a + e^{x^a\ln x}\left(ax^{a-1}\ln x + x^a\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{a^x}a^x\left(\ln a\ln x + \frac{1}{x}\right) + a^{x^x}(\ln x+1)x^x\cdot\ln a + x^{x^a+a-1}(a\ln x+1).$$

**【例 2.16】** 设由方程 $x^y = y^x$ 确定 $y$ 是 $x$ 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

**【解】** $e^{y\ln x} = e^{x\ln y}$，两边同时对 $x$ 求导，得

$$e^{y\ln x}\left(y'\ln x + y\frac{1}{x}\right) = e^{x\ln y}\left(\ln y + x\frac{y'}{y}\right)$$

$$\Rightarrow\quad x^y\left(y'\ln x + \frac{y}{x}\right) = y^x\left(\ln y + \frac{x}{y}y'\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(yx^y - xy^x\ln y)}{x(xy^x - yx^y\ln x)}.$$

## 题型五　求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分

**提示** 一般用对数微分法(即先对式子的两边取自然对数，然后在等式的两端再对 $x$ 求导).

**【例 2.17】** 设 $y = (x-2)^2\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^3)}}$，求 $y'$.

**【解】** 先将表达式写成分式指数幂的形式.

$$y = (x-2)^2(x+3)^{\frac{2}{3}}(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(5-3x^3)^{-\frac{1}{3}},$$

$$\ln y = 2\ln(x-2) + \frac{2}{3}\ln(x+3) + \frac{4}{3}\ln(3-2x^2) - \frac{1}{3}\ln(1+x^2) - \frac{1}{3}\ln(5-3x^3),$$

上式两边对 $x$ 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-2} + \frac{2}{3(x+3)} - \frac{16x}{3(3-2x^2)} - \frac{2x}{3(1+x^2)} + \frac{3x^2}{5-3x^3},$$

$$y' = (x-2)^2\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^3)}}\cdot\left[\frac{2}{x-2} + \frac{2}{3(x+3)} - \frac{16x}{3(3-2x^2)} - \frac{2x}{3(1+x^2)} + \frac{3x^2}{5-3x^3}\right].$$

## 题型六　求分段函数的导数或微分

**提示** 各区间段内导数的求法与一般所讲的导数的求法无异，要特别注意的是分界点处的导数一定要用导数的定义求.

**【例 2.18】** 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 2$，令 $F(x) = \begin{cases}\int_0^1 f(xt)dt, & x>0\\ 0, & x=0\\ \frac{\int_0^x\ln(1+2t)dt}{x}, & x<0\end{cases}$.

求 $F'(0)$.

【解】$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u = xt} \int_0^x f(u)\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{2x} = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\int_0^x \ln(1+2t)\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1,$$

故　$F'(0) = 1$.

【例 2.19】设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,又函数 $f(x)$ 可导,求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数.

【解】$F(x) = f[\varphi(x)] = \begin{cases} f\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$,

当　$x\neq 0$ 时,$F'(x) = f'\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\left[3x^2\sin\frac{1}{x} + x^3\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$$= f'\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\left(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right).$$

因为分界点 $x = 0$ 的两侧 $f(x)$ 的表达式用同一形式表示,所以分界点处的导数只用一种形式求即可.

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^3\sin\frac{1}{x}-0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^3\sin\frac{1}{x}-0}\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) = f'(0)\cdot 0 = 0.$$

故　$$F'(x) = \begin{cases} f'\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\left(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

## 题型七　求高阶导数

### 1. 直接法

所谓直接法,是指求出所给函数的一 ~ 三阶或四阶导数后,分析所得结果的规律性,从而写出 $n$ 阶导数的方法.

【例 2.20】设 $y = \mathrm{e}^x\cos x$,求 $y^{(n)}$.

【解】$y' = \mathrm{e}^x\cos x - \mathrm{e}^x\sin x = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$y'' = \sqrt{2}\left[e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] = (\sqrt{2})^2 e^x\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right),$$

$$y''' = (\sqrt{2})^2\left[e^x\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - e^x\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right] = (\sqrt{2})^3 e^x\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right).$$

**【例 2.21】** 设函数 $x=f(y)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 及 $f'[f^{-1}(x)]$, $f''[f^{-1}(x)]$ 均存在,且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$,则 $\dfrac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2}=$

(A) $-\dfrac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$.　　(B) $\dfrac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$

(C) $-\dfrac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$.　　(D) $\dfrac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$　　【　】

**【解】** 因为 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$,所以由反函数的导数公式有

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]},$$

$$\frac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}\right) = \frac{-\{f'[f^{-1}(x)]\}'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2} = \frac{-f''[f^{-1}(x)][f^{-1}(x)]'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$$

$$= \frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}\cdot\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$$

所以选择(C).

**【例 2.22】** 设 $f(x)$ 任意阶可导,且 $f'(x)=e^{-f(x)}$, $f(0)=1$. 求 $f^{(n)}(0)$.

**【解】** $f''(x) = -e^{-f(x)}f'(x) = -e^{-2f(x)}$,

$f'''(x) = 2e^{-2f(x)}f'(x) = 2e^{-3f(x)}$,

$f^{(4)}(x) = -3\cdot 2e^{-3f(x)}\cdot f'(x) = -3\cdot 2e^{-4f(x)}$,

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,e^{-nf(x)}$,

所以,$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,e^{-nf(0)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,e^{-n}$.

**2. 间接法**

利用已知的高阶导数公式,通过四则运算,变量代换,泰勒级数等方法,达到将给定的函数求出 $n$ 阶导数的方法,称之为间接法.

(1) 分式有理函数的高阶导数.

**提示** 先将有理假分式通过多项式除法化为整式与有理真分式之和,再将有理真分式写成部分分式之和,最后仿 $(x^m)^{(n)}$ 的表达式写出所给定的有理函数的 $n$ 阶导数.

**【例 2.23】** 设 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,求 $y^{(n)}$.

**【解】** 若 $c\neq 0$,用多项式除法,可得

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-1}\quad\left(x\neq -\frac{d}{c}\right),$$

故 $$y^{(n)}=\frac{bc-ad}{c^2}(-1)(-2)\cdot\cdots\cdot(-1-n+1)\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-1-n}$$

$$=\frac{bc-ad}{c^2}\frac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{d}{c}\right)^{n+1}}=\frac{(-1)^n n!c^{n-1}(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}.$$

**【例 2.24】**设 $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}(n\geqslant 2)$.

**【解】**$y=(x+3)+\dfrac{7x-6}{(x-2)(x-1)}=x+3+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，

$$y^{(n)}=(x+3)^{(n)}+[8(x-2)^{-1}]^{(n)}-[(x-1)^{-1}]^{(n)}$$
$$=0+(-1)^n\cdot 8\cdot n!(x-2)^{-1-n}-(-1)^n n!(x-1)^{-1-n}$$
$$=(-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].(n\geqslant 2)$$

(2) 由 $\cos^n\alpha x,\sin^m\beta x(m,n,\alpha,\beta$ 均为自然数）的和、差、积所构成的函数的高阶导数

提示 利用三角函数中积化和差与倍角公式把函数的次数逐次降低，最后变为 $\cos kx,\sin kx$ 之和、差形式，再用公式 $\sin^{(n)}kx=k^n\sin\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos^{(n)}kx=k^n\cos\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$将给定函数的 $n$ 阶导数写出来.

**【例 2.25】**设 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$，求 $y^{(n)}$.

**【解】**$y=\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\sin 2x=\dfrac{1}{4}\sin 4x-\dfrac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x)$

$$=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x).$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left[2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

**【例 2.26】**设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$， 求 $y^{(n)}$.

**【解】**$y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$$=\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x.$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos\left(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

(3) 利用函数的泰勒级数展开式，求函数在一点处的高阶导数.

**【例 2.27】**设 $y=\arcsin x$， 求 $y^{(n)}(0)$.

**【解】**因为 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$，$|x|<1$

所以 $$y=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1},\quad |x|<1. \qquad ①$$

但由麦克劳林级数知

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad ②$$

对比 ① 与 ② 中 $x^n$ 的系数，得

$$y^{(2k)}(0)=f^{(2k)}(0)=0,\quad y'(0)=1,$$

$$y^{(2k+1)}(0)=f^{(2k+1)}(0)=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)}{2^k\cdot k!(2k+1)}(2k+1)!,k=1,2,\cdots.$$

**【例 2.28】** 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

**【解】** 因为 $y'=f'(x)=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots,\quad |x|<1,$$

所以 $$y=f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,\qquad ③$$

其中 $|x|<1$,

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林级数展开式为

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\qquad ④$$

对比 ③,④ 中 $x^n$ 的系数,得

$$f^{(2k)}(0)=0,$$

$$f^{(2k+1)}(0)=(2k+1)!\frac{(-1)^k}{2k+1}=(-1)^k(2k)!,\text{其中},k=0,1,2,\cdots.$$

(4) 利用递推公式求 $n$ 阶导数.

**【例 2.29】** 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)$.

**【解】** $$y'=\frac{x}{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow(1-x^2)y'-xy-1=0$$

$$\Rightarrow(1-x^2)y''-3xy'-y=0$$

$$\Rightarrow(1-x^2)y'''-5xy''-4y'=0$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0.$$

显然，当 $x=0$ 时，$y'=1$，$y''=0$，$y'''=4,\cdots$

故 $y^{(2n)}(0)=0,y^{(2n+1)}(0)=4^n(n!)^2$.

(5) 利用莱布尼茨公式求高阶导数

对于形式为 $G(x)=xf(x)$ 或 $F(x)=x^2f(x)$ 的函数,经常用莱布尼茨公式求高阶导数. 此时:

$$G^{(n)}(x)=xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x),$$

$$F^{(n)}(x)=x^2f^n(x)+2xC_n^1f^{(n-1)}(x)+2C_n^2f^{(n-2)}(x).$$

**【例 2.30】** 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(n)}(0)$.

**【解】** $f'(x)=2x\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{1+x},f'(0)=0,$

$$f''(x)=2\ln(1+x)+\frac{2x}{1+x}+2x\cdot\frac{1}{1+x}+x^2\cdot\frac{(-1)}{(1+x)^2},f''(0)=0,$$

$$f^{(n)}(x)=x^2[\ln(1+x)]^{(n)}+2nx[\ln(1+x)]^{(n-1)}+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}[\ln(1+x)]^{(n-2)}$$

$$= x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}},$$

所以 $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! \quad (n \geqslant 3)$.

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　题设条件中出现 $f'_+(a)$ 或 $f'_-(b)$ 或 $f'(a)$ 时，则“不管三七二十一”先写出该点的导数的定义，然后结合极限的保号性处理即可.

**【例 2.31】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$，证明：存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

**【证】** 不妨设 $f'_+(a) > 0, f'_-(b) < 0$，于是

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

由极限保号性知，存在一个 $\delta_1 > 0$，当 $x \in (a, a+\delta_1)$ 时，恒有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a). \quad ①$$

同理，

$$f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0,$$

由极限保号性知，存在一个 $\delta_2 > 0$，当 $x \in (b - \delta_2, b)$ 时，恒有

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow f(x) > f(b). \quad ②$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值，由①② 知，最大值只能在 $(a,b)$ 内取得.

令 $\xi \in (a,b), f(\xi) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b}\{f(x)\}$，又 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 处可导，故由费尔马定理知，$f'(\xi) = 0$.

### 二、综合题解析

**【例 2.32】** 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x = 0$ 的某邻域内满足关系式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$，其中，$\alpha(x)$ 是当 $x \to 0$ 时比 $x$ 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

**【分析】** 曲线 $y = f(x)$ 在点 $[6, f(6)]$ 处的切线方程为 $y - f(6) = f'(6)(x-6)$. 由周期性，$f(6) = f(1), f'(6) = f'(1)$，故只需求 $f(1)$ 与 $f'(1)$. 又已知只给出 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，所以利用导数定义求 $f'(1)$.

**【解】** 由连续性，有

$$\lim_{x \to 0}[f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)] = \lim_{x \to 0}[8x + \alpha(x)],$$

即　$f(1) - 3f(1) = 0$，故 $f(1) = 0$.

因此，$f'(1) = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(1+u) - f(1)}{u} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(1+u)}{u}$. 又

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{8x+\alpha(x)}{\sin x},$$

即
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{f(1+\sin x)}{\sin x}+\frac{3f(1-\sin x)}{-\sin x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{8x+\alpha(x)}{x},$$

也即
$$f'(1)+3f'(1)=8,\text{故 } f'(1)=2.$$

由周期性 $f'(6)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(6+h)-f(6)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2.$

所以，要求的切线方程为 $y=2(x-6)$.

【例 2.33】设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geqslant1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 $M$ 之间的弧长，求 $3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.

【解】
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$\rho=\rho(x)=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}},$$

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

所以，
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

因此，$3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\dfrac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$

【例 2.34】设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{1+\mathrm{e}^{n(x-1)}}$，求 $f(x)$ 并讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

【解】$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1.\\ ax+b, & x<1\end{cases}$

仅当 $f_-(1)=f_+(1)=f(1)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，

即
$$a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1) \qquad ③$$

因此，当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，显然 $f(x)$ 在 $x\neq1$ 处连续，故当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

当 $f'_-(1)=f'_+(1)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可微. 又注意到可微必连续，于是

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{\text{由③}}{=\!=}\lim_{x\to1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{\text{由③}}{=\!=}\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

故仅当 $a=2,b=-1$ 时，$f'_-(1)=f'_+(1)$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，显然在 $x\neq1$ 处，$f(x)$

也可导.

综上所述,当 $a=2,b=-1$ 时,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上可导.

**【例 2.35】** 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内有二阶导数,且

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=0,$$

求:(1) $f(0)$,$f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值;

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right]$.

**【分析】** (1) 由题设知,$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$($f(x)$ 在点 $x=0$ 的二阶泰勒公式). 于是可由 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=0$ 计算 $f(0)$,$f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值.

(2) 由上述 $f(x)$ 的泰勒公式计算所给的极限.

**【解】** (1) 由题设知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的充分小邻域内有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)\text{($f(x)$ 在点 $x=0$ 的二阶泰勒公式)},$$

所以,$0=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^4)\right]+\left[f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2}f''(0)x^3+o(x^3)\right]}{x^3},$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[3+f(0)]x+f'(0)x^2+\left[-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}f''(0)\right]x^3+o(x^3)}{x^3}.$$

于是有
$$\begin{cases}3+f(0)=0\\ f'(0)=0\\ -\frac{9}{2}+\frac{1}{2}f''(0)=0\end{cases},$$

即 $f(0)=-3$,$f'(0)=0$,$f''(0)=9$.

(2) 由(1) 知在点 $x=0$ 的充分小邻域内有

$$f(x)=-3+\frac{9}{2}x^2+o(x^2),$$

所以,
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3+\left[-3+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

注 (2) 的极限也可如下方式计算:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{3}{x^2}-\frac{\sin 3x}{x^3}\right)+\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{\sin 3x}{x^3}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

## 习 题 二

**1. 填空题.**

(1) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt =$ ________.

(2) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x) =$ ________.

(3) 设 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ ________.

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 确定，则 $\frac{dy}{dx} =$ ________.

(5) 已知 $f(-x) = -f(x)$ 且 $f'(-x_0) = k$，则 $f'(x_0) =$ ________.

(6) 设 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + m\Delta x) - f(x_0 - n\Delta x)}{\Delta x} =$ ________.

(7) 设 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + k\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{3} f'(x_0)$，则 $k =$ ________.

(8) 已知 $\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{1}{x}$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right) =$ ________.

(9) 设 $f$ 为可导函数，$y = \sin\{f[\sin f(x)]\}$，则 $\frac{dy}{dx} =$ ________.

(10) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

**2. 选择题.**

(1) 设 $f(x)$ 可导，$F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$，则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的

A. 充分必要条件.　　B. 充分但非必要条件.

C. 必要但非充分条件.　　D. 既非充分又非必要条件.　　【　】

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t)dt$，则 $F'(x)$ 等于

A. $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.　　B. $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

C. $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.　　D. $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.　　【　】

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x) = [f(x)]^2$，则当 $n$ 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是

A. $n![f(x)]^{n+1}$.　　B. $n[f(x)]^{n+1}$.　　C. $[f(x)]^{2n}$.　　D. $n![f(x)]^{2n}$.

【　】

(4) 设函数对任意 $x$ 均满足 $f(1+x) = af(x)$，且 $f'(0) = b$，其中 $a,b$ 为非零常数，则

A. $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.　　B. $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f'(1) = a$.

C. $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f'(1) = b$.　　D. $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，且 $f'(1) = ab$.

【　】

(5) 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数 $n$ 为

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.　　【　】

(6) 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，当自变量 $x$ 由 $x_0$ 增加到 $x_0 + \Delta x$ 时，记 $\Delta y$ 为 $f(x)$ 的增量，$dy$ 为 $f(x)$ 的微分，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ 等于

A. $-1$.　　B. 0.　　C. 1.　　D. $\infty$.　　【　】

(7) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,则

A. $a=1,\quad b=0$.　　B. $a=0$,$b$ 为任意常数.

C. $a=0,\quad b=0$.　　D. $a=1$,$b$ 为任意常数.　　【　】

(8) 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

A. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在.　　B. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 存在.

C. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在.　　D. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.　　【　】

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,则

A. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

B. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.　　【　】

(10) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件是

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq0$.

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.　　【　】

**3. 计算题.**

(1) $y=\ln[\cos(10+3x^2)]$,求 $y'$.

(2) 已知 $f(u)$ 可导,$y=f[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]$,求 $y'$.

(3) 已知 $\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\cos t\mathrm{d}t+\sin y^2$,求 $y'$.

(4) 设 $y$ 为 $x$ 的函数是由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定的,求 $y'$.

(5) 已知 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(6) 设 $x=y^2+y$,$u=(x^2+x)^{3/2}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$.

(7) 设函数 $f(x)$ 二阶可导,$f'(0)\neq0$,且 $\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(\mathrm{e}^{3t}-1)\end{cases}$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$,$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

(8) 设曲线 $x=x(t)$,$y=y(t)$ 由方程组 $\begin{cases}x=t\mathrm{e}^t\\ \mathrm{e}^t+\mathrm{e}^y=2\mathrm{e}\end{cases}$ 确定,求该曲线在 $t=1$ 处的曲率 $k$.

**4.** 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 有二阶连续导数,且 $g(0)=1$

(1) 确定 $a$ 的值,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续;(2) 求 $f'(x)$.

**5.** 已知当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)$ 有定义且二阶可导,问 $a,b,c$ 为何值时

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant0\\ ax^2+bx+c, & x>0\end{cases}$$

是二阶可导.

**6.** 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)$.

**7.** 设 $y=x\ln x$，求 $f^{(n)}(1)$.

**8.** 证明 $y=(\arcsin x)^2$ 满足方程

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0.$$

## 参考答案

**1.** (1) $\int_{x^2}^{0}\cos t^2\,dt-2x^2\cos x^4$.　(2) $\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

(4) $\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.　(5) $f'(x_0)=k$.　(6) $(m+n)f'(x_0)$.

(7) $k=\dfrac{1}{3}$.　(8) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

(9) $f'(x)\cos f(x)f'[\sin f(x)]\cdot\cos\{f[\sin f(x)]\}$.　(10) $x-2y+2=0$.

**2.** (1)A　(2)A　(3)A　(4)D　(5)C　(6)B　(7)C　(8)B　(9)D　(10)B

**3.** (1) $y'=-6x\tan(10+3x^2)$.　(2) $y'=\dfrac{f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]}{\sqrt{a+x^2}}$.

(3) $y'=\dfrac{2x\cos x^2}{e^{y^2}-2y\cos y^2}$.　(4) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

(5) $y''=-\dfrac{2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}$.　(6) $y'=\dfrac{2}{3(2y+1)(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$.

(7) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=3$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\dfrac{9f'(0)+6f''(0)}{[f'(0)]^2}$.

(8) $k=e(1+4e^2)^{-\frac{3}{2}}$.

**4.** (1) $a=g'(0)$.　(2) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2} & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}(g''(0)+1), & x=0.\end{cases}$

**5.** $a=\dfrac{1}{2}f''_-(0)$，$b=f'_-(0)$，$c=f_-(0)$.

**6.** 当 $n=2k$ 时，$f^{(n)}(0)=n!$，$n=2k+1$ 时，$f^{(n)}(0)=0$　$(k=1,2,\cdots)$

**7.** $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-2}(n-2)!$.

**8.** 提示：先求 $y',y''$，得关系式：$(1-x^2)y''=2+xy'$，再两边求 $(n-1)$ 阶导数，利用莱布尼茨公式.

# 第三章　不定积分

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、不定积分的基本概念

**1. 原函数的定义**

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 中有定义，如果存在函数 $F(x)$，使得对于区间 $I$ 中任一个 $x$，均有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $I$ 中的一个原函数.

如果函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则有无穷多个原函数，且其全部原函数可表示为

$$F(x)+C \quad (其中 C 为任意常数).$$

**2. 不定积分**

函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 中的原函数的全体，称为 $f(x)$ 在区间 $I$ 中的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $I$ 中的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中，$f(x)$ 为被积函数；$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式；$x$ 为积分变量；$C$ 为积分常数

注 (1) 不定积分和原函数是两个不同的概念，前者是个集合，后者是该集合中的一个元素，因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x\neq F(x).$$

(2) 设 $F(x)$，$G(x)$ 均是 $f(x)$ 在区间 $I$ 中的原函数，显然有 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=G(x)+C，即有 F(x)+C=G(x)+C, \qquad ①$$

但 $F(x)=G(x)$ 不一定成立(因为 $C$ 是任意取值，① 式两边的 $C$ 不一定相等，所以不能随意去掉).

### 二、基本性质

(1) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$，($k\neq 0$ 为常数)；

(2) $\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_k(x)]\mathrm{d}x$

$$=\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_k(x)\mathrm{d}x;$$

(3) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$;

(4) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

## 三、基本公式

| | |
|---|---|
| (1) $\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C \quad (k \neq -1)$ | |
| $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$ | $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$ |
| (2) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$ | |
| (3) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$ | $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$ |
| (4) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$ | $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$ |
| (5) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$ | $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$ |
| (6) $\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \csc x\mathrm{d}x = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$ | |
| $\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}x = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$ | |
| (7) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$ | $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$ |
| (8) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ | $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ |
| (9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ | $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \arctan x + C$ |
| (10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ | $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$ |
| (11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$ | $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$ |
| (12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C$ | |

以上公式把 $x$ 换成 $u$ 仍然成立,$u$ 是以 $x$ 为自变量的函数.

**【例 3.1】** 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$ 的一个原函数为

(A) $1 + \sin x$. (B) $1 - \sin x$.

(C) $1 + \cos x$. (D) $1 - \cos x$. 【 】

**【解】** 因为 $f'(x) = \sin x$,所以 $f(x) = -\cos x + C$.

取 $$f(x) = -\cos x,$$

于是 $$\int f(x)\mathrm{d}x = \int(-\cos x)\mathrm{d}x = -\sin x + \widetilde{C}.$$

令 $\widetilde{C} = 1$,则得 $f(x)$ 的一个原函数为 $1 - \sin x$,故选择(B).

【例 3.2】设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, 0\leqslant x\leqslant 2$，则 $F(x)=$

$$(A)F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{1}{2}x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$(B)F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{1}{2}x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$(C)F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^2+2x-\frac{1}{2}x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$(D)F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-\frac{1}{2}x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

【解】当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3$.

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^x(2-x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{6}+2x-\frac{1}{2}x^2$.

故
$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{1}{2}x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

因此选择(B).

【另解】也可以从连续函数的原函数也连续的特性去分析处理.

## 四、基本积分法

### (一) 第一换元积分法(也称凑微分法)

设
$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C,$$

则
$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\xlongequal{令\ u=\varphi(x)}\int f(u)\mathrm{d}u$$
$$=F(u)+C\xlongequal{u=\varphi(x)}F[\varphi(x)]+C.$$

注 (1) 由 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$，这一步是凑微分的过程，所以第一换元法也称凑微分法.

(2) 运算熟练后不必再设中间变量 $u=\varphi(x)$.

(3) 凑微分法是非常重要的一种积分法，要运用自如，务必熟记基本积分表，并掌握常见的凑微分形式及“凑”的一些技巧.

常见的几种凑微分的形式

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$

(3) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

(4) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

(5) $\int f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$

(6) $\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$

(7) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$

(8) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$

(9) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$

(10) $\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$

(11) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$

(12) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$

**【例 3.3】** 设 $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x$ 为

(A) $-2(1-x^2)^2+C$. (B) $2(1-x^2)^2+C$.

(C) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$. (D) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$. 【　】

**【解】** $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$.

故选择(C).

**【例 3.4】** 求下列各式的不定积分.

(1) $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int x(1+x^2)^{100}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\cot\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$；　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

**【解】** (1) $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C$.

(2) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\int \cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x}+C$.

(3) $\int x(1+x^2)^{100}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{100}\mathrm{d}(1+x^2) = \frac{1}{202}(1+x^2)^{101}+C$.

(4) $\int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+2\arctan x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+2\arctan x)$

$$= \frac{1}{3}(1+2\arctan x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(5) $\int \frac{\cot\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos\theta}{(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} = -2(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}+C.$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2}\mathrm{d}(\arcsin x) = -\frac{1}{\arcsin x}+C.$

可以将常见的凑微分的 12 个公式进一步推广，即当 $f(u)$ 分别取 $u^a, a^u, \sin u, \cos u, \sec^2 u$, $\csc^2 u, \tan u, \cot u, \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \frac{1}{1+u^2}$ 等形式，而 $u=\varphi(x)$ 分别取 $ax+b, ax^b, \mathrm{e}^x, \ln x, \sin x$, $\cos x, \arctan x, \arcsin x, \tan x, \cot x$ 等函数时，也仍然成立.

**【例 3.5】** 求下列各式的不定积分.

(1) $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int (x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$；　　(4) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$.

**【解】** (1) $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(1+\sin x\cos x)}{1+\sin x\cos x} = \ln|1+\sin x\cos x|+C.$

(2) $\int (x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2-2x}\mathrm{d}(x^2-2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-2x}+C.$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2\right)\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{2+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$

(4) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x} + \int\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x-\tan x+x+C.$$

(5) $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^5} = \frac{1}{4}(\cos x+\sin x)^{-4}+C.$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$

**复杂积分式的凑微分法**

**提示** 将被积分式 $g(x)\mathrm{d}x$ 写成 $f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 或 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 较 $\varphi(x)$ 复杂. 对 $f(x)$ 或构成 $f(x)$ 的主要部分求导，若其导数为 $\varphi(x)$ 的常数倍，则 $\varphi(x)\mathrm{d}x = k\mathrm{d}f(x)$ 或 $\varphi(x)\mathrm{d}x = k\mathrm{d}f_*(x)$，其中 $k$ 为常数，$f_*(x)$ 为 $f(x)$ 的主要部分.

**【例 3.6】** 计算下列积分：

(1) $\int \sqrt{(x^2+x)\mathrm{e}^x}(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int (x\ln x)^{\frac{3}{2}}(\ln x+1)\mathrm{d}x$；

(3) $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$； (6) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}$， $b\neq a$.

【解】(1) 因为 $[(x^2+x)\mathrm{e}^x]'=(2x+1)\mathrm{e}^x+(x^2+x)\mathrm{e}^x=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x$，

所以原式 $=\int\sqrt{(x^2+x)\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}[(x^2+x)\mathrm{e}^x]=\frac{2}{3}[(x^2+x)\mathrm{e}^x]^{\frac{3}{2}}+C.$

(2) 因为 $(x\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，

所以原式 $=\int(x\ln x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(x\ln x)=\frac{2}{5}(x\ln x)^{\frac{5}{2}}+C.$

(3) 因为 $(\mathrm{e}^x\cos x)'=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$，

所以原式 $=\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos x}+C.$

(4) 因为 $\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$，

所以原式 $=-\int\arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2+C.$

(5) 因为 $[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

所以原式 $=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}\,\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2}+5)]^{\frac{3}{2}}+C.$

(6) 因为 $(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)'=a^2\cdot 2\cos x(-\sin x)+b^2\cdot 2\sin x\cos x=(b^2-a^2)\sin 2x$，

所以原式 $=\frac{1}{b^2-a^2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}=\frac{2}{b^2-a^2}\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}+C.$

【例 3.7】计算下列积分.

(1) $\int\frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x(1+\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\ln x+2}{x\ln x(1+x\ln^2 x)}\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

提示 分子分母同乘(或除)以一个因子，再仿前法凑(或凑其中一部分形式).

【解】(1) 因为 $(\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x})'=-\sin x\,\mathrm{e}^{\sin x}+\cos^2 x\,\mathrm{e}^{\sin x}=(\cos^2 x-\sin x)\mathrm{e}^{\sin x}$，

原式 $=\int\frac{(\cos^2 x-\sin x)\mathrm{e}^{\sin x}}{\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}(1+\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x})}{\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}(1+\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x})}$

$=\int\left(\frac{1}{\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}}-\frac{1}{\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}+1}\right)\mathrm{d}(\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x})=\ln\left|\frac{\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}}{1+\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}}\right|+C.$

(2) 原被积式的分子分母同除以 $x^2$，得

$$\int\frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(\frac{x-\ln x}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\left(\frac{x-\ln x}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x-\ln x}{x}\right)=\frac{1}{\frac{x-\ln x}{x}}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C.$$

(3) 因为 $(x\ln^2 x)'=\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln x(\ln x+2)$，

所以只要分子分母同乘以 $\ln x$，便有

$$\text{原式} = \int \frac{d(x\ln^2 x)}{x\ln^2 x(1+x\ln^2 x)} = \int\left(\frac{1}{x\ln^2 x} - \frac{1}{1+x\ln^2 x}\right)d(x\ln^2 x)$$

$$= \ln|x\ln^2 x| - \ln|1+x\ln^2 x| + C.$$

(4) 原被积分式的分子分母同除以 $x^2$，则

$$\text{原式} = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right] + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) + C.$$

（二）第二换元积分法

### 1. 利用三角函数代换，变根式积分为三角有理式积分

| 被积函数 $f(x)$ 含根式 | 所作代换 | 三角形示意图 |
| --- | --- | --- |
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x = a\sin t$ | 斜边 $a$，对边 $x$，邻边 $\sqrt{a^2-x^2}$，角 $t$ |
| $\sqrt{a^2+x^2}$ | $x = a\tan t$ | 斜边 $\sqrt{a^2+x^2}$，对边 $x$，邻边 $a$，角 $t$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x = a\sec t$ | 斜边 $x$，对边 $\sqrt{x^2-a^2}$，邻边 $a$，角 $t$ |

注 记住三角形示意图可为变量还原提供方便.

**【例 3.8】** 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$；　　(2) $\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$；　$(a>0)$　　(4) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$；　　(6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

**【解】** (1) 因为被积函数 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{1-x^2}$，

所以应作变换 $x = \sin t$，$dx = \cos t dt$，

于是

$$\text{原式} = \int \frac{\sin t\cos t}{(\sin^2 t+1)\cos t}dt = -\int \frac{d(\cos t)}{2-\cos^2 t}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\cos t} + \frac{1}{\sqrt{2}+\cos t}\right)d(\cos t)$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|+C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}\right|+C.$$

(2) 因为被积函数 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{1+x^2}$，所以应作变换 $x=\tan t$，

$$原式=\int\frac{\tan^3 t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}(\cos t)=\cos t+\frac{1}{\cos t}+C=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}+C.$$

(3) 因为被积函数 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，所以应作变换 $x=a\sec t$，

$$原式=\int\frac{a\tan t}{a^4\sec^4 t}\cdot a\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\tan^2 t}{\sec^3 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\sin^2 t\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t+C=\frac{1}{3a^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)^3+C.$$

(4) $$\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{令x=\tan t}\int\frac{\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2}\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int\sin^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C.$$

(5) 令 $x=3\sec t$，则 $\mathrm{d}x=3\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$，于是，

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{3\tan t}{9\sec^2 t}3\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{\tan^2 t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|-\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-9}+\tilde{C}.$$

(6) 令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，

$$原式=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t-\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}(\sin t)-\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\sin t}+\cot t+t+C=-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+C.$$

**2. 倒代换$\left(即令 x=\frac{1}{t}\right)$**

提示 设 $m$、$n$ 分别为被积函数的分子、分母关于 $x$ 的最高次数，当 $n-m>1$ 时，用倒代换可望成功.

**【例 3.9】**求下列不定积分.

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}(a>0)$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^7+2)}$；

(3) $\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; (4) $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

**【解】** (1) 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，于是

$$原式=\int t^2\frac{1}{\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)=-\int\frac{tdt}{\sqrt{a^2t^2+1}}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\frac{d(a^2t^2+1)}{2\sqrt{a^2t^2+1}}=-\frac{\sqrt{a^2t^2+1}}{a^2}+C\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$$

(2) $$原式\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\int\frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int\frac{t^6}{1+2t^7}dt=-\frac{1}{14}\int\frac{1}{1+2t^7}d(1+2t^7)$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

(3) $$原式=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\xlongequal{令x+\frac{1}{2}=\frac{1}{t}}\int\frac{1}{\left(\frac{1}{t^2}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int\frac{tdt}{\left(1+\frac{3}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{3}\int\frac{d\left(\frac{3}{4}t^2+1\right)}{\left(1+\frac{3}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{3}\left(1+\frac{3}{4}t^2\right)^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}+C.$$

(4) $$\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\int\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)$$

$$=-\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int\frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

**3. 指数代换(适用于被积函数 $f(x)$ 由 $a^x$ 所构成的代数式)**

**提示** 令 $a^x=t$， $dx=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{dt}{t}$.

**【例 3.10】** 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{2^x dx}{1+2^x+4^x}$; (2) $\int\frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}$;

(3) $\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$; (4) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

【解】(1) 令 $2^x=t$, $dx=\frac{1}{\ln2}\cdot\frac{dt}{t}$,

$$原式=\int\frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{1}{\ln2}\cdot\frac{dt}{t}=\frac{1}{\ln2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{\ln2}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\ln2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}\ln2}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}\ln2}\arctan\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(2) 令 $e^x=t$, $dx=\frac{dt}{t}$,

$$原式=\int\frac{1}{t(1+t^2)}\cdot\frac{dt}{t}=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{t}-\arctan t+C=-e^{-x}-\arctan(e^x)+C.$$

(3) 令 $e^{\frac{x}{6}}=t, x=6\ln t, dx=\frac{6}{t}dt$,

$$原式=\int\frac{1}{1+t^3+t^2+t}\cdot\frac{6}{t}dt=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)dt$$

$$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

(4) 令 $e^x=t, x=\ln t, dx=\frac{1}{t}dt$,

$$原式=\int\frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+t}}{t^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1-t}}{t^2}dt. \qquad ②$$

$$\int\frac{\sqrt{1+t}}{t^2}dt\xlongequal{令\sqrt{1+t}=u}\int\frac{u}{(u^2-1)^2}\cdot2u\,du=2\int\frac{u^2-1+1}{(u^2-1)^2}du$$

$$=2\int\frac{du}{u^2-1}+2\int\frac{du}{(u^2-1)^2}$$

$$=2\int\frac{du}{u^2-1}+\frac{1}{2}\int\left[-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{u+1}+\frac{1}{(u+1)^2}\right]du$$

$$=-\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|-\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2(u-1)}+$$

$$\frac{1}{2}\ln|u+1|-\frac{1}{2(u+1)}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|-\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x}+C_1. \qquad ③$$

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令}\sqrt{1-t}=v} \int \frac{-2v^2\mathrm{d}v}{(1-v^2)^2} = -2\int \frac{v^2}{(v^2-1)^2}\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+1}\right| - \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x} + C_2. \qquad ④$$

将③,④代入②得

$$\text{原式} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+1}\right| - \frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} - \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} + C.$$

### (三) 分部积分法

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 具有连续的导数,则公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

称为分部积分公式.

关键:如果把被积函数分成两部分,如何选取 $u$ 和 $\mathrm{d}v$.

选取的原则:(1) 积分容易者选为 $\mathrm{d}v$; (2) 求导简单者选为 $u$.

在二者不可兼得的情况下,首先要保证的是前者.

可用分部积分法求积分的类型:

**1.** $\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$,**其中** $k$,$a$ **为常数**,$P_n(x)$ **为** $n$ **次多项式**

选取:$u(x)=P_n(x)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$ (或 $\sin ax\mathrm{d}x$, $\cos ax\mathrm{d}x$).

**【例 3.11】**求下列不定积分.

(1) $\int (x^2+1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$; (2) $\int (x^3+2x+5)\cos 2x\mathrm{d}x$.

**【解】**(1) 原式 $= \frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{e}^{2x} - \int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C.$$

(2) 原式 $= \frac{1}{2}(x^3+2x+5)\sin 2x - \frac{1}{2}\int (3x^2+2)\sin 2x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}(x^3+2x+5)\sin 2x + \frac{1}{4}(3x^2+2)\cos 2x - \frac{3}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+2x+5)\sin 2x + \frac{1}{4}(3x^2+2)\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C.$$

由以上可看出,这种类型的积分可反复利用分部积分公式进行下去,但较繁且易错,以下介绍一个分部积分法的推广公式.

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 有 $n+1$ 阶连续导数,则

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - u'''v^{(n-3)} + \cdots + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.$$

**【证】**当 $n=0$ 时, $\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x$,

当 $n\geqslant 1$ 时, $\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\mathrm{d}x$,

$$\int u'v^{(n)}\mathrm{d}x = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x,$$

$$\int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}\mathrm{d}x$$

$$\vdots$$

$$\int u^{(n)}v'\mathrm{d}x = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$$

由下往上依次代入，即可证得推广的分部积分公式.

用表格法表示推广公式如下：

| $u$ 的各阶导数 | $u$ | ⊕ | $u'$ | ⊖ | $u''$ | ⊕ | $u'''$ | ⊖ | … | $u^{(n+1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v^{(n+1)}$ 的各阶原函数 | $v^{(n+1)}$ | | $v^{(n)}$ | | $v^{(n-1)}$ | | $v^{(n-2)}$ | | … | $v$ |

计算规则：

1° 推广公式的各项(不包括符号)为从左上到右下错位相乘，最后一项为$\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$；

2° 各项符号为“+”“−”相间，最后一项符号为$(-1)^{n+1}$；

3° 当表格中同一列的两个函数乘积等于所给被积函数的常数倍时，求导和求原函数工作不再进行，用解方程的方法即可求得积分. 当被积函数中有一个因子为对数或反三角函数时，须做变量替换把它换成指数或三角函数时才能使用表格法.

注 当 $P_n(x)$ 的次数较高时，用表格法相当方便.

**【例 3.12】**求下列不定积分.

(1)$\int(x^5+3x^2-2x+5)\cos x\mathrm{d}x$；　　(2)$\int(x^4-2x^3-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

**【解】**(1) 设 $u = x^5+3x^2-2x+5, v^{(n+1)} = \cos x$，用表格表示如下：

| $x^5+3x^2+2x+5$ | ⊕ | $5x^4+6x-2$ | ⊖ | $20x^3+6$ | ⊕ | $60x^2$ | ⊖ | $120x$ | ⊕ | $120$ | ⊖ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | | $\sin x$ | | $-\cos x$ | | $-\sin x$ | | $\cos x$ | | $\sin x$ | | $-\cos x$ |

原式 $=(x^5+3x^2-2x+5)\sin x+(5x^4+6x-2)\cos x-(20x^3+6)\sin x-60x^2\cos x+120x\sin x+120\cos x+C$.

(2) 令 $u = x^4-2x^3-1, v^{(n+1)} = \mathrm{e}^{2x}$，用表格表示如下：

| $x^4-2x^3-1$ | ⊕ | $4x^3-6x^2$ | ⊖ | $12x^2-12x$ | ⊕ | $24x-12$ | ⊖ | $24$ | ⊕ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^{2x}$ | | $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ | | $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$ | | $\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}$ | | $\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}$ | | $\frac{1}{32}\mathrm{e}^{2x}$ |

$$\text{原式} = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2} - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} + C$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^{2x} + C$$

**2. $\int\mathrm{e}^{kx}\sin(ax+b)\mathrm{d}x$，$\int\mathrm{e}^{kx}\cos(ax+b)\mathrm{d}x$，其中 $k,a,b$ 均为常数**

$u(x)$，$\mathrm{d}v(x)$ 的选取可随意，用表格法计算也相当方便，例如$\int\mathrm{e}^{kx}\sin(ax+b)\mathrm{d}x$的计算如下：

| $\sin(ax+b)$ | ⊕ | $a\cos(ax+b)$ | ⊖ | $-a^2\sin(ax+b)$ | ↕⊕ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^{kx}$ | | $\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$ | | $\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{kx}$ | |

$$\int e^{kx}\sin(ax+b)\,dx=\frac{1}{k}e^{kx}\sin(ax+b)-\frac{a}{k^2}e^{kx}\cos(ax+b)-\frac{a^2}{k^2}\int e^{kx}\sin(ax+b)\,dx$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+k^2}{k^2}\int e^{kx}\sin(ax+b)\,dx=\frac{k\sin(ax+b)-a\cos(ax+b)}{k^2}e^{kx}+C$$

所以$\displaystyle\int e^{kx}\sin(ax+b)\,dx=\frac{k\sin(ax+b)-a\cos(ax+b)}{k^2+a^2}e^{kx}+C.$

**3.** $\int P_n(x)\ln(x)\,dx,\int P_n(x)\arcsin x\,dx,\int P_n(x)\arctan x\,dx$

选取：$u(x)=\ln x,\arcsin x,\arctan x$； $dv(x)=P_n(x)\,dx.$

**注** 利用
$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\arctan x+\operatorname{arccot}x=\frac{\pi}{2}$$
可把
$$\int P_n(x)\arccos x\,dx,\quad\int P_n(x)\operatorname{arccot}x\,dx$$
化为
$$\int P_n(x)\arcsin x\,dx,\quad\int P_n(x)\arctan x\,dx$$
的积分.

**提示** 当$\ln x,\arcsin x,\arccos x,\arctan x$的次数高于1时，最好作变量替换化为指数函数、三角函数，然后再用表格法计算部分积分，最后还原变量.

**【例3.13】**求下列不定积分：

(1) $\int x^2\arccos x\,dx$；　　(2) $\int x(\arcsin x)^2\,dx$；

(3) $\int x^n\ln x\,dx\quad(n\neq-1)$；　　(4) $\int x^3(\ln x)^4\,dx.$

**【解】**(1) 原式$\displaystyle=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\int\frac{1}{3}x^3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\frac{x^3}{3}\arccos x+\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(x^2)$

$$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int\sqrt{1-x^2}\,d(x^2)+\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arccos x+\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+C.$$

(2) 令$\arcsin x=u,\quad x=\sin u,\quad dx=\cos u\,du,$

于是
$$原式=\int\sin u\cdot u^2\cos u\,du=\frac{1}{2}\int u^2\sin 2u\,du$$

| $u^2$ | $2u$ (+) | $2$ (−) | $0$ (+) |
|---|---|---|---|
| $\sin 2u$ | $-\frac{1}{2}\cos 2u$ | $-\frac{1}{4}\sin 2u$ | $\frac{1}{8}\cos 2u$ |

故原式$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u^2\cos 2u+\frac{1}{2}u\sin 2u+\frac{1}{4}\cos 2u\right)+C$

$$=-\frac{1}{4}u^2(\cos^2u-\sin^2u)+\frac{1}{4}u(2\sin u\cos u)+\frac{1}{8}(\cos^2u-\sin^2u)+C$$

$$=-\frac{1}{4}(\arcsin x)^2\cdot(1-2x^2)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{8}(1-2x^2)+C.$$

(3) 原式$\displaystyle=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+C.$

(4) 令$\ln x=u,x=e^u,dx=e^u\,du$

$$原式 = \int e^{3u} \cdot u^4 e^u du = \int u^4 e^{4u} du$$

| $u^4$ | $4u^3$ ⊕ | $12u^2$ ⊖ | $24u$ ⊕ | $24$ ⊖ | $0$ ⊕ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{4u}$ | $\frac{1}{4}e^{4u}$ | $\frac{1}{16}e^{4u}$ | $\frac{1}{64}e^{4u}$ | $\frac{1}{256}e^{4u}$ | $\frac{1}{1024}e^{4u}$ |

$$原式 = \left(\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{16}u^2 - \frac{3}{32}u + \frac{3}{128}\right)e^{4u} + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln^4 x - \ln^3 x + \frac{3}{4}\ln^2 x - \frac{3}{8}\ln x + \frac{3}{32}\right)x^4 + C.$$

### 4. 递推公式

不定积分中的递推公式的推导，一般多用分部积分法求解.

**【例 3.14】** 建立下列不定积分的递推公式：

(1) $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$；　　(2) $I_n = \int \frac{1}{x^n\sqrt{1+x^2}}dx$，$(n \geqslant 2)$

(3) $I_n = \int \sec^n x\,dx$；　　(4) $I_n = \int \tan^n x\,dx$.

**【解】** (1) $I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right]$$

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right].$$

(2) $I_n = \int \frac{x}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} - \int \sqrt{1+x^2}[-(n+1)]x^{-(n+2)}dx$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1)\int \frac{1+x^2}{x^{n+2}\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1)I_{n+2} + (n+1)I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = -\frac{1}{n+1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} - \frac{n}{n+1}I_n$$

$$I_n = \frac{1}{1-n}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

(3) $I_n = \int \sec^{n-2}x\sec^2 x\,dx = \sec^{n-2}x\tan x - \int (n-2)\sec^{n-3}x\sec x\tan x\,\tan x\,dx$

$$= \sec^{n-2}x\,\tan x - (n-2)\int \sec^{n-2}x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \sec^{n-2}x\,\tan x - (n-2)\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$\Rightarrow I_n = \sec^{n-2}x\,\tan x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\,\tan x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

(4) $I_n = \int \tan^{n-2}x\,\tan^2 x\,dx = \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \tan^{n-2} x \mathrm{d}x$$

$$= \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}(\tan x) - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

**【例 3.15】**求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$；　(3) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$；　(5) $\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

**【解】**(1) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sin^3 x}\mathrm{d}(\sin x) = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$

$$= -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\cot x + C.$$

(2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int \frac{1+\sin x}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{e}^x}{\cos^2 \frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{e}^x}{\cos^2 \frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= \tan\frac{x}{2}\mathrm{e}^x - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \tan\frac{x}{2} + C.$$

(3) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$

$$= x\sin(\ln x) - \left\{x\cos(\ln x) - \int x\left[-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x\right\}$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

故 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]x + C.$

(4) $\int \frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+2}(x+1)\mathrm{e}^x + \int \frac{1}{x+2}[(x+1)\mathrm{e}^x]'\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{x+2}(x+1)\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x+2} + C.$$

(5) $\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + \int \frac{1}{x+2}(x^2\mathrm{e}^x)'\mathrm{d}x = -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + \int \frac{1}{x+2}x(x+2)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

$$= -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = -\frac{x^2\mathrm{e}^x}{x+2} + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = \frac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x + C.$$

(6) $\int \frac{\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}x$

$$= -\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x - \int \frac{1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{2x})}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = -\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x - \int \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x - \ln\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C$$

$$= -\mathrm{e}^x\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x - x + \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C.$$

## 第2节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　有理函数的不定积分

**提示** 有理函数的积分总可化为整式和如下四种类型的积分：

(1) $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a|+C$

(2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C \quad (n\neq 1)$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n} \xlongequal[\text{令}\frac{4q-p^2}{4}=a^2]{\text{令}x+\frac{p}{2}=u} \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n}$

(4) $\int \frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(a-\frac{p}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$

其中 $p^2-4q<0$

这就是说，有理函数积分从理论上讲总可以“积”出来，但过分的墨守成规将会造成很大的运算困难. 因此遇到有理函数积分的试题，最好先分析被积函数的特点，灵活选择解法，常用的方法中有凑微分法和变量替换法.

**【例 3.16】** 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})}$；　(2) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$.

**【解】** (1)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})} = \int \frac{x^9\mathrm{d}x}{x^{10}(2+x^{10})} = \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}(x^{10})}{x^{10}(2+x^{10})}$$
$$= \frac{1}{20}\int\left(\frac{1}{x^{10}}-\frac{1}{2+x^{10}}\right)\mathrm{d}(x^{10}) = \frac{1}{20}[\ln x^{10}-\ln(x^{10}+2)]+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{20}\ln(x^{10}+2)+C.$$

(2)
$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x = \int \frac{(1-x^7)x^6}{x^7(1+x^7)}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int \frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)}\mathrm{d}(x^7)$$
$$= \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{x^7}-\frac{2}{1+x^7}\right)\mathrm{d}(x^7) = \ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C.$$

(3)
$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^n\cdot x^{n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}(x^n)$$
$$= \frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}(x^n) = \frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C.$$

**【例 3.17】** 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{2x^3+1}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{x^{11}\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}$；　(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$；　(4) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x$.

**【解】** (1) 令 $x-1=\frac{1}{u}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$，于是

$$\text{原式}=\int u^{100}\left[2\left(\frac{u+1}{u}\right)^3+1\right]\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = -\int u^{95}(3u^3+6u^2+6u+2)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{33}u^{99}-\frac{3}{49}u^{98}-\frac{6}{97}u^{97}-\frac{1}{48}u^{96}+C$$

$$=-\frac{1}{33}\frac{1}{(x-1)^{99}}-\frac{3}{49(x-1)^{98}}-\frac{6}{97(x-1)^{97}}-\frac{1}{48(x-1)^{96}}+C.$$

(2) 令 $x^4=u$，则 $du=4x^3dx$. 于是

$$原式=\frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}du=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)du$$

$$=\frac{1}{4}(u+\ln|u+1|-4\ln|u+2|)+C$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x^4)-\ln(x^4+2)+C.$$

(3) 令 $x^{10}=u$，则 $du=10x^9dx$，于是

$$原式=\frac{1}{10}\int\frac{du}{u(u+1)^2}=\frac{1}{10}\int\frac{u+1-u}{u(u+1)^2}du=\frac{1}{10}\int\left[\frac{1}{u(u+1)}-\frac{1}{(u+1)^2}\right]du$$

$$=\frac{1}{10}\int\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}\right]du=\frac{1}{10}\left(\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}\right)+C$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(1+x^{10})+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

(4) 令 $x^n=u$，则 $du=nx^{n-1}dx$. 于是

$$原式=\frac{1}{n}\int\frac{u^2du}{(1+u^2)^2}=\frac{1}{n}\int\frac{u^2+1-1}{(1+u^2)^2}du$$

$$=\frac{1}{n}\int\left[\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u^2)^2}\right]du=\frac{1}{n}\arctan u-\frac{1}{n}\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$$

由递推公式 $\int\frac{du}{(1+u^2)^2}=\frac{1}{2(2-1)}\left[\frac{u}{(u^2+1)}+\int\frac{du}{1+u^2}\right]$，

$$故原式=\frac{1}{n}\arctan u-\frac{1}{n}\left[\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan u\right]+C$$

$$=\frac{1}{2n}\arctan u-\frac{u}{2n(u^2+1)}+C=\frac{1}{2n}\arctan(x^n)-\frac{x^n}{2n(x^{2n}+1)}+C.$$

## 题型二　简单无理函数的不定积分

**提示** 无理函数的积分，一般是通过选择变量替换，去掉根号，化为有理函数的积分来进行.

常见的变换除了第二换元积分法中所介绍的三角代换外还有：

| 类型 | 积分形式 | 所作代换 |
|---|---|---|
| 1 | $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\cdots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ | $t^N=\frac{ax+b}{cx+d}$，$N$ 为 $n_1$，$n_2,\cdots,n_k$ 的最小公倍数 |
| 2 | $\int R(\sqrt{a-x},\sqrt{b-x})dx$ | $\sqrt{a-x}=\sqrt{b-a}\cdot\tan t$ |
| 3 | $\int R(\sqrt{x-a},\sqrt{b-x})dx$ | $\sqrt{x-a}=\sqrt{b-a}\cdot\sin t$ |
| 4 | $\int R(\sqrt{x-a},\sqrt{x-b})dx$ | $\sqrt{x-a}=\sqrt{b-a}\cdot\sec t$ |

解题时应注意先将无理函数的分子或分母有理化.

【例 3.18】求下列不定积分.

(1)$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$；　(2)$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$；　(3)$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

【解】(1)$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \xlongequal{令 x=t^6} \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{1+t}dt = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$

$$= 6\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|\right)+C$$

$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.$$

(2)$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}dx$

$$= \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx.$$

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx = \int\frac{x+1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}dx\left(令\ x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t\right)$$

$$= \int\frac{\frac{1}{2}\sec t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\tan t}\frac{1}{2}\sec t\tan t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sec^2 t+\sec t)dt = \frac{1}{2}(\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)+C$$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{x^2+x}+\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|)+C,$$

所以原积分 $=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{4}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|+C.$

(3)$\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx = \int\frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}dx$

$$= \int(x+1)\sqrt{x}dx-\int x\sqrt{x+1}dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int(x+1-1)\sqrt{x+1}dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

## 题型三　三角有理式的不定积分

**提示** 由 $\sin x,\cos x$ 及常数,经过有限次四则运算所得到的函数称为三角有理式,记为 $R(\sin x,\cos x)$,积分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 称为三角有理式的积分.

对这类积分的基本思路是:(1) 尽量使分母简单. 为此,或将分子分母同乘以某个因子,把分母化为 $\sin^k x$(或 $\cos^k x$) 的单项式,或将分母整个看成一项. (2) 尽量使 $R(\sin x,\cos x)$ 的幂降低. 为此通常利用倍角公式或积化和差公式以达到目的.

**1."1"的妙用**

**【例 3.19】**求下列不定积分:

(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x}$;　　(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x + 2\sin x}$;

(3)$\int \frac{1}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

**【解】**(1)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos^5 x} = \frac{1}{\sin x\cos^5 x} + \frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cos^5 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}\\ &= \frac{1}{\sin x\cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{1}{\sin x\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 x\cos x}\\ &= \frac{2}{\sin x\cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x\cos x}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^5 x} + 2\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x\cos x}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x\cos x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故原积分} &= \int\left(\frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x\cos x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2\sin^2 x} + 3\ln|\csc 2x - \cot 2x| + C.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} &= \frac{1}{2\sin x\cos x + 2\sin x} = \frac{1}{2\sin x(\cos x + 1)}\\ &= \frac{1}{4\sin x\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{8}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{4\sin x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故原积分} &= \frac{1}{8}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{3}}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\int\csc x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\ln|\csc x - \cot x| + C.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} &= \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = \int\csc x\mathrm{d}x + \int\cot^2 x\csc x\mathrm{d}x\\ &= \int\csc x\mathrm{d}x - \int\cot x\mathrm{d}(\csc x)\\ &= \ln|\csc x - \cot x| - \left[\cot x\csc x - \int\csc x\cdot(-\csc^2 x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| - \cot x \csc x - \int \frac{dx}{\sin^3 x},$$

故 $$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| - \frac{1}{2}\cot x \csc x + C.$$

**2. 分母的简化**

分母可化为单项式的积分类型.

(1) $\int \frac{P^*(\sin x,\cos x)}{(1\pm\cos x)^k}dx = \int \frac{P^*(\sin x,\cos x)(1\mp\cos x)^k}{(\sin^2 x)^k}dx$

因为 $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

所以更经常用的是：

$\int \frac{P^*(\sin x,\cos x)}{(1+\cos x)^k}dx = \int \frac{P^*(\sin x,\cos x)}{\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^k}dx$

$\int \frac{P^*(\sin x,\cos x)}{(1-\cos x)^k}dx = \int \frac{P^*(\sin x,\cos x)}{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^k}dx$

(2) $\int \frac{P^*(\sin x,\cos x)}{(1\pm\sin x)^k}dx = \int \frac{P^*(\sin x,\cos x)(1\mp\sin x)^k}{(\cos^2 x)^k}dx$

(3) $\int \frac{P^*(\sin x,\cos x)}{(\cos x\pm\sin x)^k}dx = \int \frac{P^*(\sin x,\cos x)(\cos x\mp\sin x)}{(\cos 2x)^k}dx$

注 这种分子分母同乘以一个因式的做法在不定积分中是允许的，但在定积分运算中一般不许可.

**【例 3.20】**求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$；　　(2) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$.

**【解】**(1) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C.$$

(2) 因为 $1+\sin x+\cos x = \sin x + (1+\cos x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}$,

所以原积分 $= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}$

$$= \int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

**【例 3.21】**求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$；　　(2) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

**【解】**(1) 因为 $\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x} = \frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2(\sin x+\cos x)}$,

所以原积分 $=\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

(2) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}+C.$$

### 3. 降幂法

常用的降幂公式

(1) 积化和差公式

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x]$$

(2) 倍角公式

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

**【例 3.22】**求下列不定积分.

(1) $\int\sin 4x\cos 2x\cos 3x dx$； (2) $\int\sin^2x\cos^4x dx$； (3) $\int\sin^5x\cos^6x dx$.

**【解】**(1) $\sin 4x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)\cos 3x$

$$=\frac{1}{2}\sin 6x\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 3x$$

$$=\frac{1}{4}\sin 9x+\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x,$$

原积分 $=\frac{1}{4}\int(\sin 9x+\sin 5x+\sin 3x-\sin x)dx$

$$=-\frac{1}{36}\cos 9x-\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x+C.$$

(2) $\sin^2x\cos^4x=\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2\cos^2x=\frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$

$$=\frac{1}{8}(1+\cos 2x)\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)$$

$$=\frac{1}{16}\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 6x\right)$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 6x,$$

$$原积分 = \int\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 6x\right)dx$$
$$=\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+C.$$

(3) $\int\sin^5 x\cos^6 x dx=-\int\sin^4 x\cos^6 x d(\cos x)=-\int(1-\cos^2 x)^2\cos^6 x d(\cos x)$
$$=-\int(\cos^6 x-2\cos^8 x+\cos^{10}x)d(\cos x)$$
$$=-\frac{1}{7}\cos^7 x+\frac{2}{9}\cos^9 x-\frac{1}{11}\cos^{11}x+C.$$

## 题型四　含有反三角函数的不定积分

**提示** 这类题可直接令反三角函数为新变量求解.

**【例 3.23】** 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx$；　　(2) $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

**【解】** (1) 令 $\arctan x=u, x=\tan u, dx=\frac{du}{\cos^2 u}$.

于是
$$原积分=\int\frac{\tan^2 u}{1+\tan^2 u}\cdot u\cdot\frac{du}{\cos^2 u}=\int u\tan^2 u du$$
$$=\int u(\sec^2 u-1)du=\int u\sec^2 u du-\frac{1}{2}u^2$$
$$=\int u d(\tan u)-\frac{1}{2}u^2=u\tan u-\int\tan u du-\frac{1}{2}u^2$$
$$=u\tan u+\ln|\cos u|-\frac{1}{2}u^2+C$$
$$=x\arctan x+\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$
$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$$

(2) 令 $\arccos x=u, x=\cos u, dx=-\sin u du$.

于是
$$原积分=\int\frac{u}{\sin^3 u}(-\sin u du)=\int u d(\cot u)$$
$$=u\cot u-\int\cot u du=u\cot u-\ln|\sin u|+C$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C.$$

## 题型五　抽象函数的不定积分

**提示** 所谓抽象函数的不定积分,是指被积函数由抽象函数所构成的一类积分,其解法同样可用换元法和分部积分法.

**【例 3.24】** 求解下列不定积分.

(1) $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]dx$；　　(2) $\int\frac{f'(\ln x)}{x\sqrt{f(\ln x)}}dx$.

(3) $\int xf'(2x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$.

【解】(1) $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C.$$

(2) 原积分 $=\int\frac{f'(\ln x)}{\sqrt{f(\ln x)}}\mathrm{d}(\ln x)=\int\frac{\mathrm{d}(f(\ln x))}{\sqrt{f(\ln x)}}=2\sqrt{f(\ln x)}+C.$

(3) $\int xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(f(2x))=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{4}\int f(2x)\mathrm{d}(2x),$$

因为 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的原函数,所以 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$

于是
$$f(2x)=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{4x^2},$$

故
$$\int xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{8x}-\frac{\sin 2x}{8x}+C=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4x}\sin 2x+C.$$

## 题型六　分段函数的不定积分

**提示** 连续函数必有原函数,且原函数连续.如果分段函数的分界点是函数的第一类间断点,则包含该点在内的区间不存在原函数.

解题程序:

(1) 先分别求出各区间段的不定积分表达式;

(2) 由原函数的连续性确定出各积分常数的关系.

**【例 3.25】** 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$,求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

【解】当 $x<0$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x=x+C_1$,

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+C_2$,

当 $x>1$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C_3$,

由于原函数的连续性,分别考虑在 $x=0,x=1$ 处的左、右极限可知

$$C_1=C_2,\quad \frac{1}{2}+1+C_2=1+C_3.$$

解之,有 $C_1=C_2=C_3-\frac{1}{2}.$

令 $C_1=C_2=C_3-\frac{1}{2}=C$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2+x+C, & 0\leqslant x\leqslant 1.\\ x^2+\frac{1}{2}+C, & x>1\end{cases}$$

**【例 3.26】** 求$\int \max(x^3,x^2,1)\mathrm{d}x$.

**【解】** 令 $f(x)=\max(x^3,x^2,1)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 1\\ x^2, & x\leqslant -1\\ 1, & |x|<1\end{cases}$.

当 $x\geqslant 1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+C_1$，

当 $x\leqslant -1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_2$，

当 $|x|<1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C_3$.

由于原函数的连续性，有

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_3),$$

即 $\frac{1}{4}+C_1=1+C_3$. ①

又 $$\lim_{x\to -1^+}(x+C_3)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right),$$

即 $-1+C_3=-\frac{1}{3}+C_2$. ②

联立解 ①，②，并令 $C_3=C$，则

$$C_1=\frac{3}{4}+C,\quad C_2=-\frac{2}{3}+C,$$

故 $$\int \max(x^3,x^2,1)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+C, & x\leqslant -1,\\ x+C, & -1<x<1,\\ \frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}+C, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　含有对数函数、反三角函数的不定积分(不定积分)，要想到利用三步法来求解：(1) 凑微分法；(2) 分部积分法；(3) 变量替换法.

具体如下：

(1) 若对数函数、反三角函数的导数是另一部分的常数倍，则用凑微分法；

(2) 若对数函数、反三角函数的导数不是另一部分的常数倍，而另一部分不通过作变量替换可得出积分，则用分部积分法，此时设对数函数、反三角函数为 $u$，另一部分设为 $dv$；

(3) 如果另一部分需要通过变量替换才可积分，用变量替换法，此时将对数函数、反三角函数设成变量 $t$.

**【例 3.27】** 计算下列不定积分.

(1) $\int \frac{10^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$； (2) $\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx$； (3) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$； (4) $\int x\arctan x dx$.

**【解】** (1) $\int \frac{10^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int 10^{2\arcsin x}d\arcsin x$

$$= \frac{1}{2}\int 10^{2\arcsin x}d(2\arcsin x) = \frac{10^{2\arcsin x}}{2\ln 10} + C.$$

(2) $\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x\ln\ln x}d\ln x = \int \frac{1}{\ln\ln x}d\ln\ln x = \ln\ln\ln x + C.$

(3) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\int \ln x\, d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$

(4) $\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}\int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

## 二、综合题解析

**【例 3.28】** 设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(0,0)=0$，$\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$，$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\cos y$，求不定积分 $\int f(x,x)dx$.

**【分析】** 先由 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$，$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\cos y$ 及 $f(0,0)=0$ 算出 $f(x,y)$ 的表达式，然后计算不定积分 $\int f(x,x)dx$.

**【解】** 由 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$ 得 $f(x,y) = c(y)e^{-x}$，其中 $c(y)$ 是可微的待定函数.

上式两边对 $y$ 求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = c'(y)e^{-x}.$$

与题设 $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\cos y$ 比较得 $c'(y) = \cos y$，即 $c(y) = \int \cos y dy = \sin y + C$. 所以

$$f(x,y) = (\sin y + C)e^{-x}.$$

利用 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$. 所以

$$f(x,y) = e^{-x}\sin y.$$

从而 $\int f(x,x)dx = \int e^{-x}\sin x dx$.

下面计算不定积分

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\int e^{-x}d\cos x = -\left(e^{-x}\cos x + \int e^{-x}\cos x dx\right)$$

$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x} d\sin x$$

$$= -e^{-x}\cos x - \left(e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx\right)$$

$$= -e^{-x}(\cos x + \sin x) - \int e^{-x}\sin x dx.$$

所以，
$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_1.$$

因此
$$\int f(x,x) dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_1.$$

**【例 3.29】** 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0) = 0$ 及

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases},$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式；

(2) 记由曲线 $y = f(x)$，$y = -f(-x)$ 及直线 $x = 1$ 围成的位于第 Ⅰ 象限内的图形为 $D$，求 $D$ 的面积 $S$.

**【分析】**(1) 根据所给的 $f'(\ln x)$ 及 $f(0) = 0$ 计算 $f(x)$ 的表达式.

(2) 画出 $D$ 的图形，用定积分计算它的面积 $S$.

**【解】**(1) 由 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$,

得
$$f'(t) = \begin{cases} 1, & e^t \leqslant 1 \\ e^{\frac{t}{2}}, & e^t > 1 \end{cases} (其中\ t = \ln x)$$

$$= \begin{cases} 1, & t \leqslant 0 \\ e^{\frac{t}{2}}, & t > 0 \end{cases},$$

所以 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u) du = \int_0^x f'(u) du$

$$= \begin{cases} \int_0^x du, & x \leqslant 0 \\ \int_0^x e^{\frac{u}{2}} du, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ 2(e^{\frac{x}{2}} - 1), & x > 0. \end{cases}$$

(2) 由(1) 得

$$-f(-x) = \begin{cases} x, & -x \leqslant 0 \\ -2(e^{-\frac{x}{2}} - 1), & -x > 0 \end{cases},$$

$$= \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -2(e^{-\frac{x}{2}} - 1), & x < 0 \end{cases}.$$

由此可知，当 $x \geqslant 0$ 时，$y = f(x) = 2(e^{\frac{x}{2}} - 1)$，$y = -f(-x) = x$.

由于当 $x \geqslant 0$ 时，$e^x \geqslant 1 + x$(且仅当 $x = 0$ 取等号).

所以，对 $x \geqslant 0$ 有 $2(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geqslant 2 \cdot \frac{x}{2} = x$. 曲线 $y = f(x)$，$y = -f(-x)$ 及直线 $x = 1$ 围成的位于第一象限内的图形 $D$，如图 3-1 所示.

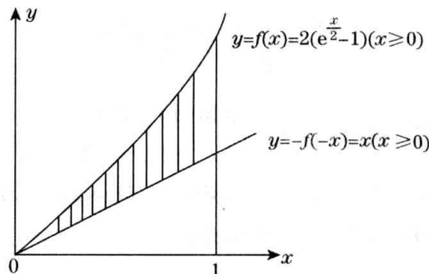



图 3-1

于是 $D$ 的面积 $S=\int_0^1(2e^{\frac{x}{2}}-2-x)dx=\left(4e^{\frac{x}{2}}-2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=4e^{\frac{1}{2}}-\frac{13}{2}$.

## 习题三

**1.** 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; (2) $\int\frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1+x}{1-x}dx$;

(3) $\int\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$; (4) $\int\frac{dx}{x(x^8+1)}$;

(5) $\int\frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

**2.** 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$; (2) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; (4) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;

(5) $\int\sqrt{(1-x^2)^3}dx$; (6) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$;

(7) $\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

**3.** 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$; (2) $\int\frac{dx}{2^x(1+4^x)}$.

**4.** 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x^5}{(x-2)^{100}}dx$; (2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}$.

**5.** 求下列不定积分.

(1) $\int x\cos^2xdx$; (2) $\int\sec^3xdx$; (3) $\int\frac{(\ln x)^3}{x^2}dx$;

(4) $\int\cos(\ln x)dx$; (5) $\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3x}dx$.

**6.** 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$; (2) $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; (3) $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

**7.** 设 $f(x)=\begin{cases}x\ln(1+x^2)-3, & x\geqslant0\\(x^2+2x-3)e^{-x}, & x<0\end{cases}$, 求 $\int f(x)dx$.

**8.** 设 $f'(e^x)=a\sin x+b\cos x$,($a,b$ 为不同时为零的常数). 求 $f(x)$.

**9.** 求下列不定积分.

(1) $\int3^{x^2+3x}(2x+3)dx$; (2) $\int(3x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}(3x-1)dx$;

(3) $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$; (4) $\int\frac{xdx}{(1+x^2+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})}$.

**10.** 设当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)$ 连续，求$\int\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

**11.** 设 $f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$，求 $f(x)$.

**12.** 求下列不定积分.

(1)$\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；　(2)$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$；

(3)$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(4)$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

**13.** 求下列不定积分.

(1)$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$；　(2)$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x\ (a>0)$；

(3)$\int\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x$；　(4)$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

**14.** 求下列不定积分.

(1)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$；　(2)$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$；　(3)$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

**15.** 求下列不定积分.

(1)$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$；　(2)$\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$；

(3)$\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

参　考　答　案

**1.** (1) $\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C$；　(2) $\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C$；

(3) $\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)^2+C$；　(4) $-\frac{1}{8}\ln(1+x^8)+C$；

(5) $\frac{1}{2}x-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C$.

**2.** (1) $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$；　(2) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$；

(3)$\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$；　(4) $\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$；

(5) $\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{x(5-2x^2)}{8}\sqrt{1-x^2}+C$；　(6) $\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}+C$；

(7)$\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

**3.** (1)$\arctan(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})+C$；　(2) $-\frac{1}{\ln 2}(2^{-x}+\arctan 2^x)+C$.

**4.** (1)$-\left[\frac{32}{99(x-2)^{99}}+\frac{40}{49(x-2)^{98}}+\frac{80}{98(x-2)^{97}}+\frac{5}{12(x-2)^{96}}+\frac{2}{19(x-2)^{95}}+\frac{1}{94(x-2)^{94}}\right]+C$；

(2) $-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C.$

**5.** (1) $\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$; (2) $\frac{1}{2}[\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|]+C$;

(3) $-\frac{1}{x}[(\ln x)^3+3(\ln x)^2+6\ln x+6]+C$; (4) $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$;

(5) $-\frac{x}{8}\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C.$

**6.** (1) $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}\right|+C$;

(2) $\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$;

(3) $-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x)+C.$

**7.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}[x^2-\ln(1+x^2)]-3x+C, & x\geqslant 0\\ -(x^2+4x+1)\mathrm{e}^{-x}+1+C, & x<0\end{cases}.$

**8.** $f(x)=\frac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x)+(b-a)\cos(\ln x)]+C.$

**9.** (1) $\frac{3^{x^2+3x}}{\ln 3}+C$; (2) $\frac{1}{5}(3x^2-2x+5)^{\frac{5}{2}}+C$;

(3) $\frac{1}{2}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2+C$; (4) $\ln|\ln(1+\sqrt{1+x^2})|+C.$

**10.** $\frac{f(x)}{x\mathrm{e}^x}+C.$

**11.** $-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}(x-2)^3+C.$

**12.** (1) $\frac{1}{4}\arctan x-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{x}{4(x^2+1)}+C$;

(2) $(1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+C$ (提示：令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}=t, x=\tan^2 t$;

(3) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$;

(4) $-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$

**13.** (1) $\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$;

(2) $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$;

(3) $\arcsin\mathrm{e}^x-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+C$;

(4) $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}+C$

(提示：原积分化为 $\int\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}\mathrm{d}x$，令 $x-a=a\sin t$)

**14.** (1) $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C$；

(2) $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$；

(3) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$

**15.** (1) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C\left(\text{提示：}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}dx^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}dx\sqrt{x}\right)$；

(2) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})+C$；

(3) $2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln|x|-(\arctan\sqrt{x-1})^2+C.$

# 第四章 定积分及反常积分

## 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

### 一、基本性质

(1) 定积分只与被积函数和积分限有关,而与积分变量无关,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots;$$

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;

特例:$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \int_b^b f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$;

(4) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ($k$ 为常数);

(6) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (定积分对区间的可加性);

(7) **定积分比较定理** 设 $f(x)\leqslant g(x), x\in[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

推论:① 当 $f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$,

② $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$;

(8) **估值定理** 设 $m\leqslant f(x)\leqslant M, x\in[a,b]$,其中 $m,M$ 为常数,则

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a);$$

(9) **积分中值定理** 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在一个点 $\xi$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),$$

也可写成

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

所以积分中值定理也称之为**平均值公式**.

与定积分性质有关的命题有三个:估值问题、不等式的证明和求极限.

### 1. 估值问题

定积分估值问题是指确定常数 $m,M$,使 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$ 成立. 其中,$M$ 要求尽可能小,$m$ 尽可能大,即 $M,m$ 分别接近于 $f(x)$ 的上下确界.

**提示** (1) 或者求出被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上的最值,定出 $f(x)$ 的范围;或者用不等式放缩法写出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的界限;或者二者结合得出 $f(x)$ 的适合范围;

(2) 用估值定理或比较定理进行分析处理.

**【例 4.1】** 估计下列各积分值.

(1) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$;　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$;　(3) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}$.

**【解】** (1) 令
$$f(x)=x\arctan x,x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right],$$

因为 $f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0$, 所以 $f(x)$“↗”.

于是
$$\max f(x)=f(\sqrt{3})=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$
$$\min f(x)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi,$$

因此 $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\leqslant f(x)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,由估值定理有 $\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\pi$.

(2) 令
$$f(x)=1+\sin^2 x,\quad x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi\right],$$

因为
$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x,$$

令
$$f'(x)=0,得\ x=\frac{\pi}{2},\pi\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi\right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2},\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin^2\frac{\pi}{2}=2,\quad f(\pi)=1,\quad f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=1+\sin^2\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2},$$

所以 $1\leqslant f(x)\leqslant 2$.　故　$\pi\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x\leqslant 2\pi$.

(3) 因为
$$4\geqslant 4-2x-x^2+x^3\geqslant 4-2x-x^2,x\in[0,1],$$

所以
$$\frac{1}{2}\leqslant f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2}},$$

由估值定理有 $\frac{1}{2}\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-2x-x^2}}$,

而 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-2x-x^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{5-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}\Big|_0^1=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$,

故
$$\frac{1}{2}\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}\leqslant\arcsin\frac{2}{5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

### 2. 不等式的证明

**提示** 思路之一:与估值问题同.

思路之二:先将积分区间分成若干子区间,再用比较定理进行分析处理.

**【例 4.2】** 证明下列不等式.

(1) $2\leqslant\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{8}{3}$;　　(2) $\frac{1}{2}\leqslant\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}\leqslant\frac{\pi}{6},(n>2)$.

**【证】** (1) 令

$$f(x)=\sqrt{1+x^4},x\in[-1,1],$$

则

$$f'(x)=\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}=\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}},$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$.

因为 $f(-1)=f(1)=\sqrt{2}$,　$f(0)=1$,所以 $1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}$.

上式两边对 $x$ 在$[-1,1]$上积分,得不出右边要证的结果,因此必须对 $f(x)$ 重新进行分析,显然有　$f(x)=\sqrt{1+x^4}\leqslant\sqrt{1+2x^2+x^4}=\sqrt{(1+x^2)^2}=1+x^2$,

于是

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{1}(1+x^2)\mathrm{d}x,$$

故

$$2\leqslant\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{8}{3}.$$

(2) 显然当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时,$(n>2)$ 有

$$1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}\leqslant\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6},$$

即

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}\leqslant\frac{\pi}{6}.$$

**【例 4.3】** 设 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上连续且单调递减.证明:

$$\int_{1}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant f(1)+\int_{1}^{n}f(x)\mathrm{d}x.$$

**【证】** 因为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上连续且单调递减　所以

$$f(i+1)\leqslant f(i),\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

因此,由比较定理有

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x&=\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{1}^{2}f(1)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}f(2)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n}^{n+1}f(n)\mathrm{d}x\\&=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(1)+\int_{1}^{n}f(x)\mathrm{d}x&=f(1)+\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant f(1)+\int_{1}^{2}f(2)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}f(3)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(n)\mathrm{d}x\\&=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k).\end{aligned}$$

故命题得证.

### 3. 求极限

提示 (1) 将被积函数 $f(x)$ 在积分区间内放大或缩小，注意：一般情况下以 $n$ 为指数幂的因子保留；(2) 利用定积分比较定理；(3) 取极限.

【例 4.4】求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

【解】(1) 因为
$$0\leqslant\frac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n,$$
所以
$$0\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$
又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=0$，　故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$.

(2) 因为
$$0\leqslant\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\leqslant x^n,\quad x\in[0,1],$$
所以
$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$
又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，　故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=0$.

## 二、定理和公式

### 1. 重要公式

(1) 设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，　则
$$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时}\\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时}\end{cases}.$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的连续函数，$a$ 为任意实数，则
$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2$.

(4)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}.$$

【例 4.5】求下列定积分.

(1) $\int_{-3}^{3}[x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{9-x^2}]\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\arctan x+\cos^7x+\sin^8x)\mathrm{d}x$.

提示 凡遇积分区间是关于原点对称的，就应考虑到“对称区间上函数积分的奇偶性”，即重要公式(1).

【解】(1) 因为 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数，$x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数，$\sqrt{9-x^2}$ 为偶函数，

所以 原积分 $= 2\int_0^3(-\sqrt{9-x^2})\mathrm{d}x = -2\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{由公式(3)}} (-2)\frac{\pi}{4}(3)^2 = -4.5\pi.$$

(2) 因为 $x^2\arctan x$ 为奇函数，$\cos^7 x,\sin^8 x$ 为偶函数，

所以原积分 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7 x\mathrm{d}x + \sin^8 x)\mathrm{d}x = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\mathrm{d}x\right)$

$$= 2\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{16}{35}+\frac{35\pi}{256}\right).$$

### 2. 重要定理

**定理 1** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in[a,b]$，则变上限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 对 $x$ 可导，并且有

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Phi(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

推论 1 设 $F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x) = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

推论 2 设 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$.

推论 3 设 $F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)g(x)\mathrm{d}t$，则 $F'(x) = \left[g(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'_x$.

$$= g'(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t + g(x)f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

**定理 2** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

**定理 3**（牛顿－莱布尼茨公式） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

注 (1) 函数在闭区间上连续这个条件若不满足，则结论可能不成立；

(2) 一见到函数 $f(x)$ 在闭区间上“连续”，就应该联想到 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，在证明定积分有关命题时，这是一条思路.

**【例 4.6】** 求下列导数.

(1) $F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$； (2) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos t^2\mathrm{d}t$；

(3) 由方程 $\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 1$，确定 $y$ 为 $x$ 的函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**【解】** (1) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}(x^3)' - \frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}(x^2)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

(2) $F'(x) = \cos(\cos x)^2(\cos x)' - \cos(\sin x)^2(\sin x)'$

$= -\sin x\cos(\cos^2 x) - \cos x\cos(\sin^2 x)$.

(3) 方程 $\int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 1$ 两边对 $x$ 求导，得

$$e^{y^2}\cdot y' + \frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2}}2x = 0 \Rightarrow y' = \pm 2e^{-y^2}\sin x^2.$$

【例 4.7】设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且满足 $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\mathrm{d}t = x$，求 $f(2)$.

【解】方程 $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\mathrm{d}t = x$ 的两边对 $x$ 求导，得

$$f[x^2(1+x)][x^2(1+x)]' = 1,$$

即

$$f(x^2+x^3)\cdot(2x+3x^2) = 1.$$

令 $x=1$， 得 $f(2)=\frac{1}{5}$.

【例 4.8】设当 $x>0$ 时，$f(x)$ 可导，且满足方程

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \quad (x>0).$$

求 $f(x)$.

【解】方程两边对 $x$ 求导，得

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}f(x).$$

将原方程的 $f(x)$ 的表达式代入上式，得

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\left[1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{x},$$

积分得，
$$f(x) = \ln x + C.$$

由原方程中令 $x=1$，可得 $f(1)=1$，上式中令 $x=1$， 得 $C=1$.

故
$$f(x) = \ln x + 1.$$

【例 4.9】求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}}{\ln x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2} te^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6e^x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x |\sin t|\mathrm{d}t}{x}$.

【解】(1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}} \xlongequal{取\,p=1} 1$，可知

$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}$ 发散趋于 $+\infty$，因此本题属 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，

$$所以原极限 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+5x^2+2}} = 1.$$

$$(2)\ 原极限 = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(3)\ \lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2} te^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6e^x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x^2e^{x^2}\sin x^2\cdot 2x}{6x^5e^x+x^6e^x}$$

$$\xlongequal{\sin x^2\sim x^2}\lim_{x\to 0}\frac{2x^5\mathrm{e}^{x^2}}{x^5(6+x)\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{(6+x)\mathrm{e}^x}=\frac{1}{3}.$$

(4) 本题是属于$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式,由于$|\sin t|$是以$\pi$为周期的函数,因此有

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2,$$

其中,$n\in\mathbf{N}$. 又当$x\to+\infty$,存在$n$,使$n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$,因此

$$\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{x}|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t,$$

$$2n\leqslant\int_0^{x}|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant 2(n+1).$$

可见当$x\to\infty$时,$\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t\to+\infty$.

由第一章洛必达法则的注中可知,本题不能用洛必达法则.

因为
$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\frac{2}{\pi},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n\pi}=\frac{2}{\pi},$$

所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{2}{\pi}.\text{(夹逼定理)}$$

**【例 4.10】** 设$f(x)$是连续函数,且$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则$f(x)=$ ________.

**【解】** 因为$f(x)$连续,所以$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$存在,不妨设$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=l$,

于是
$$f(x)=x+2l,$$

积分有
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1(t+2l)\mathrm{d}t,$$

$$l=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1+2l\Rightarrow l=-\frac{1}{2},$$

故
$$f(x)=x+2\left(-\frac{1}{2}\right)=x-1.$$

## 三、定积分的计算法

定积分的计算常用的有三种方法:牛顿—莱布尼茨公式,换元积分法,分部积分法.

### (一) 牛顿—莱布尼茨公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}$$

使用公式的注意事项:

(1) $f(x)$在$[a,b]$上连续;

(2) $F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

**【例 4.11】** 求下列定积分.

(1) $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx$.

【解】(1) $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2\int_1^4 \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

$= 2\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)d(\sqrt{x}) = 2[\ln\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})]\Big|_1^4 = 2\ln\frac{4}{3}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}[x\tan x + \ln\cos x]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$.

（二）定积分的换元积分法

**定理**　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变换 $x=\varphi(t)$ 满足如下条件：

(1) $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $\varphi'(t)\neq 0$；

(2) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$，并且当 $t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，$\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

注　(1) 在做变量替换的同时，一定要更换积分上下限；(2) 用 $t=\varphi(x)$ 引入新变量 $t$ 时，一定要注意反函数 $x=\varphi(t)$ 的单值、可微等条件.

**【例 4.12】** 求下列定积分.

(1) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$；　　(2) $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx \quad (a>0)$；

(3) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}}dx$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10}x - \cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx$；

(5) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$；　　(6) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

【解】(1) 令 $u=\arcsin\sqrt{x}, x=\sin^2 u, dx = 2\sin u\cos u du$.

原积分 $= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\sin u\cos u}2\sin u\cos u du = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} u du = \frac{5}{144}\pi^2$.

(2) 令 $x=\frac{1}{u}, dx = -\frac{du}{u^2}$.

原积分 $= \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2a}} \sqrt{\frac{1}{u^2}-a^2}\cdot u^4\cdot\left(-\frac{1}{u^2}du\right) = \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{1-a^2u^2}\,u du$

$= -\frac{1}{2a^2}\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{1-a^2u^2}\,d(1-a^2u^2) = -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}(1-a^2u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}$.

(3) 令 $e^{-x}=\sin t, x=-\ln\sin t, dx = -\frac{\cos t}{\sin t}dt$.

原积分 $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}dt\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$

$= \ln|\csc t - \cot t|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4) 令 $x=\frac{\pi}{2}-u, dx = -du$.

$$原积分 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^{10}u - \sin^{10}u}{4 - \cos u - \sin u}(-\mathrm{d}u) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{10}x - \sin^{10}x}{4 - \sin x - \cos x}\mathrm{d}x,$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10}x - \cos^{10}x}{4 - \sin x - \cos x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^{10}x - \cos^{10}x}{4 - \sin x - \cos x} + \frac{\cos^{10}x - \sin^{10}x}{4 - \sin x - \cos x}\right)\mathrm{d}x = 0,$$

故原积分 $= 0$.

(5) 令 $x = a\sin t, \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$.

$$原积分 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a\sin t + a\cos t} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t.$$

$$又因为\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t \xlongequal{t = \frac{\pi}{2} - u} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin u}{\cos u + \sin u}(-\mathrm{d}u) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t,$$

所以
$$2 \times 原积分 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

故原积分 $= \frac{\pi}{4}$.

注 注意:此题不可这样解:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t(\cos t - \sin t)}{(\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t - \cos t\sin t}{\cos 2t}\mathrm{d}t,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t - \sin 2t}{\cos 2t}\mathrm{d}t.$$

理由是 $\cos t - \sin t$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处为"零".

(6) 令 $x = \tan t$,则有

$$原积分 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t}\right)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos t}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right)\mathrm{d}t - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t.$$

因为
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2,$$

又
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\right)\mathrm{d}t \xlongequal{t = \frac{\pi}{4} - u} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-\mathrm{d}u)$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t,$$

所以原积分 $= \frac{\pi}{8}\ln 2$.

**【例 4.13】** 求 $I_n = \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x + \cos^{2n}x}\mathrm{d}x$ ($n$ 为自然数).

**【解】** $I_n \xlongequal{x = \frac{\pi}{2} - u} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos^{2n}u}{\cos^{2n}u + \sin^{2n}u}(-\mathrm{d}u)$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n}u}{\cos^{2n}u + \sin^{2n}u}\mathrm{d}u - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^{2n}u}{\cos^{2n}u + \sin^{2n}u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}u}{\cos^{2n}u+\sin^{2n}u}du=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}dx.$$

又因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}dx\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2n}t}{\sin^{2n}t+\cos^{2n}t}(-dt)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx,$$

故 $I_n=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}.$

### (三) 定积分的分部积分法

设 $f(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导函数 $u'(x),v'(x)$，则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

其中，$u(x),dv=v'(x)dx$ 的选择与不定积分的分部积分法相同.

**【例 4.14】** 求下列定积分.

(1) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$；　(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}dx$；

(3) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$；　(4) $\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x dx$.

**【解】** (1) 原式 $=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\int_0^3\frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$

$$=\pi-\int_0^3\frac{x}{1+x}d(\sqrt{x})=\pi-\int_0^3\frac{1+(\sqrt{x})^2-1}{1+(\sqrt{x})^2}d(\sqrt{x})$$

$$=\pi-(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})\Big|_0^3=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}.$$

(2) 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}dx-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx.$

因为 $-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{x}{2}}d(\sqrt{\cos x})=2\left(e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}dx\right)$

$$=\sqrt[4]{8}(e^{\frac{\pi}{8}}-e^{-\frac{\pi}{8}})-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}dx,$$

所以原积分 $=\sqrt[4]{8}(e^{\frac{\pi}{8}}-e^{-\frac{\pi}{8}}).$

(3) 原积分 $=\int_0^1\ln(1+x)d\left(\frac{1}{2-x}\right)=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2-x}\cdot\frac{dx}{1+x}$

$$=\ln 2+\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln 2+\frac{1}{3}[\ln|x-2|-\ln|1+x|]\Big|_0^1$$

$$=\ln 2+\frac{1}{3}(-\ln 2-\ln 2)=\frac{1}{3}\ln 2.$$

(4) 因为 $\cos(n+1)x=\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x.$

所以原积分 $=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(nx)\cos x dx-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin(nx)dx.$

又 $\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(nx)\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}\sin^n x=\frac{1}{n}\sin^n x\cos(nx)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin^n x\sin(nx)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\pi}\sin^n x\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

故 原积分 $=0$.

## 四、反常积分的基本概念

### 1. 无穷限的反常积分

1° 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a),$$

若上式极限存在,则称反常积分收敛,否则称为发散;

2° $\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$,

若上式极限存在,则称反常积分收敛,否则称为发散;

3° $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,

如果 $\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,则称反常积分收敛,否则称为发散.

### 2. 有奇点的反常积分(瑕积分)

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数

1° 若 $f(x)$ 在点 $a$ 处无界,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$,

若上式极限存在,则称反常积分收敛,否则称为发散;

2° 若 $f(x)$ 在点 $b$ 处无界,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)-F(a)$,

若上式极限存在,则称反常积分收敛,否则称为发散;

3° 若 $a<c<b$,$f(x)$ 在点 $c$ 无界,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$,

若 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$,$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,称反常积分收敛,否则称为发散.

### 3. 绝对收敛

若 $I$ 为无穷区间,且 $\int_I|f(x)|\mathrm{d}x$ 或有奇点的积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,称反常积分绝对收敛.

**定理**:若反常积分绝对收敛,则反常积分收敛.

### 4. 对称区间上的反常积分

若反常积分收敛,则

1° 若 $f(x)$ 是偶函数,则对称区间上的反常积分为半区间积分的二倍;

2° 若 $f(x)$ 是奇函数,则对称区间上的反常积分为零.

特别注意:反常积分不收敛时以上性质不成立.

**例如**:$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\neq 0$.

因为$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}$ 发散.

因为$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,所以$\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=0$.

上述情形在概率论中计算数学期望、方差时经常遇到,应特别注意.

**5. 反常积分的判敛准则**

(1) 无穷限反常积分的判敛准则.

准则 1:设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,若存在 $M>0$,使得

① $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{M}{x^m}$,$m>1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

② $\frac{M}{x^m}\leqslant f(x)$,$m\leqslant 1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

准则 2:设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,

① 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^m f(x)=k$, $0\leqslant k<+\infty$, $m>1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

② 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^m f(x)=k$, $0<k\leqslant+\infty$, $m\leqslant 1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注 积分区间为$(-\infty,b)$ 及$(-\infty,+\infty)$ 时有类似准则.

(2) 瑕积分的判敛准则.

准则 1:设 $f(x)$ 在$[a,b)$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,若存在 $M>0$,使得

① $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{M}{(b-x)^m}$,$0<m<1$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

② $\frac{M}{(b-x)^m}\leqslant f(x)$,$m\geqslant 1$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

准则 2:设 $f(x)$ 在$[a,b)$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,

① 若$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k$, $0\leqslant k<+\infty$, $0<m<1$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

② 若$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k$, $0<k\leqslant+\infty$, $m\geqslant 1$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注 在 $x=a$,$x=c(a<c<b)$ 为瑕点时有类似准则.

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　分段函数的定积分

**提示** (1) 要认清积分限是被积函数定义域的哪个区间段的端点,然后分别按段积分再求和.

(2) 当被积函数是给定函数与某一简单函数复合而成的函数时,要通过变量代换将其化为给定函数的形式,切记:与此同时积分限也要相应改变.

**【例 4.15】** 设 $f(x)=\begin{cases}kx, & 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ c, & \frac{l}{2}<x\leqslant l\end{cases}$, 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

【解】当 $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$ 时， $\Phi(x)=\int_0^x kt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}kx^2$，

当 $\frac{l}{2}<x\leqslant l$ 时，

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{l}{2}}kt\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{l}{2}}^x c\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}kl^2+c\left(x-\frac{l}{2}\right).$$

综上所述，可知

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{2}kx^2, & 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ \frac{1}{8}kl^2+c\left(x-\frac{l}{2}\right), & \frac{l}{2}<x\leqslant l\end{cases}.$$

【例 4.16】求下列积分.

(1) $\int_{-2}^2\max(x,x^2)\mathrm{d}x$； (2) $\int_{-3}^2\min(2,x^2)\mathrm{d}x$.

【解】(1) 作出 $y=x$ 及 $y=x^2$ 在$[-2,2]$上的图形，如图 4-1 所示.

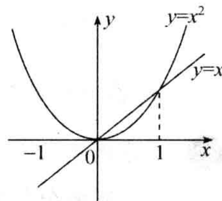



图 4-1

由图可知 $f(x)=\max(x,x^2)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$.

故

$$\text{原积分}=\int_{-2}^0 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{11}{2}.$$

(2) 作出 $y=2$ 及 $y=x^2$ 在$[-3,2]$上的图形，如图 4-2 所示.

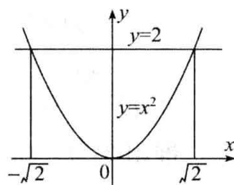



图 4-2

由图可知 $f(x)=\min(2,x^2)=\begin{cases}2, & -3\leqslant x\leqslant-\sqrt{2}\\ x^2, & -\sqrt{2}<x\leqslant\sqrt{2}\\ 2, & \sqrt{2}<x\leqslant 2\end{cases}$.

故原积分 $=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}2\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^2 2\mathrm{d}x=10-\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

【例 4.17】求下列定积分.

(1) $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$，其中，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & x\geqslant 0\\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0\end{cases}$.

(2) $\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\,(x\geqslant 0)$，其中，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x$，而

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & x\geqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

【解】(1) 设 $u=x-1$，则

$$I=\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)d(e^x) + \ln 2$$

$$= [\ln e^x - \ln(1+e^x)]\Big|_{-1}^{0} + \ln 2 = \ln(1+e).$$

(2) 设 $u = x - t$,则

$$I = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = -\int_x^0 f(x-u)g(u)du$$

$$= \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

由于当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x) = x$,所以,当 $x \geqslant t$ 时

$$f(x-t) = x - t,$$

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & t \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

故 $I = \begin{cases} \int_0^x (x-t)\sin t dt = x - \sin x, & 当 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-t)\sin t dt = x - 1, & 当 x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

## 题型二　被积函数带有绝对值符号的定积分

提示 在作积分运算之前设法去掉绝对值,其方法是先令绝对值内的式子等于"0",求出在积分区间内的根,再据此把积分区间分成若干个子区间,各子区间上的被积函数的绝对值就可以去掉了.(注意符号!!)

**【例 4.18】** 求下列定积分.

(1) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$;　　(2) $\int_{-2}^{5} |x^2 - 2x - 3| dx$;

(3) $\int_0^1 t|t - x| dt$;　　(4) $\int_a^b |x| dx \quad (a < b)$.

**【解】** (1) 令 $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$,

$$原积分 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} |\ln x| dx + \int_1^e |\ln x| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$$

$$= -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_1^e$$

$$= 1 + \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + e\ln e - e + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

(2) 令 $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 3$,

$$原积分 = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 2x - 3| dx + \int_{-1}^{3} |x^2 - 2x - 3| dx + \int_3^5 |x^2 - 2x - 3| dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)dx - \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx + \int_3^5 (x^2 - 2x - 3)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\Big|_{-2}^{-1} - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\Big|_3^5$$

$$=\frac{71}{3}.$$

(3) 令 $t-x=0\Rightarrow t=x$

当 $x<0$ 时，

$$\int_0^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t=\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{x}{2},$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\int_0^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3},$$

当 $x>1$ 时，

$$\int_0^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}-\frac{1}{3},$$

综上所述，$\int_0^1 t\mid t-x\mid \mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{2}, & x<0\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}, & x>1\end{cases}$

(4) 令 $x=0$，可得如下结果

1° 当 $a<b<0$ 时，

$$\int_a^b \mid x\mid \mathrm{d}x=-\int_a^b x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(b^2-a^2);$$

2° 当 $a<0<b$ 时，

$$\int_a^b \mid x\mid \mathrm{d}x=\int_a^0(-x)\mathrm{d}x+\int_0^b x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2+a^2);$$

3° 当 $0<a<b$ 时，

$$\int_a^b \mid x\mid \mathrm{d}x=\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

综上所述，$\int_a^b \mid x\mid \mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(b^2-a^2), & a<b<0\\ \dfrac{1}{2}(b^2+a^2), & a<0<b.\\ \dfrac{1}{2}(b^2-a^2), & 0<a<b\end{cases}$

## 题型三　被积函数中含有“变限积分”的定积分

**提示** 思路之一：用分部积分法做，将变上限积分取作 $u$，其余的部分取作 $\mathrm{d}v$.

思路之二：将原积分化为二重积分，再更换累次积分次序.

**【例 4.19】**求下列定积分.

(1) 设 $f(x)=\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$，　求 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}y$，　求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】(1)$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left[\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=x\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\Big|_0^a-\int_0^a x\mathrm{e}^{(a^2-x^2)}(-1)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{a^2-x^2}\mathrm{d}(a^2-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a^2-x^2}\Big|_0^a$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a^2-x^2}\Big|_a^0=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a^2}-1).$$

(2)$\int_0^1(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x-1)^2\left[\int_0^x\mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\int_0^x\mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}y\right]\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3\cdot\mathrm{e}^{-x^2+2x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2\mathrm{e}^{-(x-1)^2+1}\mathrm{d}[(x-1)^2]$$

$$\xlongequal{令(x-1)^2=u}-\frac{\mathrm{e}}{6}\int_1^0 u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(\mathrm{e}-2).$$

【另解】积分区域如图 4-3 所示.

(1)$I=\int_0^a\left[\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{e}^{y(2a-y)}(a-y)\mathrm{d}y$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{-(a-y)^2+a^2}\mathrm{d}[(a-y)^2]=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a^2}[-\mathrm{e}^{-(a-y)^2}]\Big|_0^a=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a^2}-1).$$

(2)$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1(x-1)^2\mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\mathrm{e}^{-(y-1)^2+1}\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_y^1\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{-(y-1)^2+1}(y-1)^3\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\mathrm{e}}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-(y-1)^2}\cdot(y-1)^2\mathrm{d}[(y-1)^2]$$

$$\xlongequal{令(y-1)^2=u}-\frac{\mathrm{e}}{6}\int_1^0\mathrm{e}^{-u}\cdot u\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(\mathrm{e}-2).$$

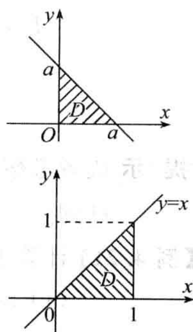


图 4-3

【例 4.20】求下列定积分.

(1)$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$;

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,并设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$,求$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

【解】(1)$I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^2\left[\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$$=x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\Big|_0^2-\int_0^2 x(-\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

(2)$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$

$$=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\Big|_0^1-\int_0^1\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]=f(x)\cdot(-f(x))\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^2 = \frac{1}{2}A^2.$$

注 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

**【另解】** 积分区域见图 4-4.

(1) $I = \int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x$

$= \int_0^2 ye^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-y^2}\mathrm{d}(y^2)$

$= -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{-4}).$

(2) $I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \cdot \int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y,$

$2I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = A^2,$

$I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A^2.$

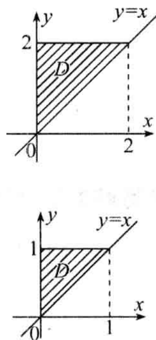


图 4-4

## 题型四　对称区间上的定积分

提示 或者考察被积函数是否为奇偶函数,用奇偶函数积分的"特性"处理,或作负变换 $x=-u$ 处理.

**【例 4.21】** 计算下列积分.

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且对任何 $x,y$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,计算 $\int_{-1}^1 (x^2+1)f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x.$

**【解】** (1) 对于这种被积函数含有抽象因子的积分,通常是利用奇偶性积分的"特性"处理,以下证明 $f(x)$ 为奇函数.

令 $y=0$,　则由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 可得:

$$f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0,$$

又　$f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$,即 $f(x)+f(-x)=0$,

可知 $f(x)$ 为奇函数,于是

$$\int_{-1}^1 (x^2+1)f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(2) 令 $x=-u$,　则 $I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 u}{1+e^u}\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$

$$2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{1}{1+e^x}\right)\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\pi - 2),$$

故 $$I = \frac{1}{8}(\pi - 2).$$

**【例 4.22】** 设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（$A$ 为常数）.

(1) 证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 利用结论(1)计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

**【证】** (1) $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x$，

因为 $\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=-u} -\int_a^0 f(-u)g(-u)\mathrm{d}u = \int_0^a f(-x)g(x)\mathrm{d}x$，

所以 $$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)g(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^a [f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x = A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 取 $f(x)=\arctan \mathrm{e}^x$，$g(x)=|\sin x|$，$a=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数.

因为 $(\arctan \mathrm{e}^x + \arctan \mathrm{e}^{-x})' = 0$，所以 $\arctan \mathrm{e}^x + \arctan \mathrm{e}^{-x} = A$.

令 $x=0$，得 $2\arctan 1 = A$. 于是，$A=\frac{\pi}{2}$，$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$，故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

## 题型五　被积函数的分母为两项，而分子为其中一项的定积分

**提示** 作变量代换，所作代换满足以下两点要求：(1) 变换前后积分上下限或者不变，或者交换位置；(2) 交换后，分母中的另一项成为分子中的项.

**【例 4.23】** 求下列定积分.

(1) $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^a}$（$a$ 为常数）；　　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\cos x}}\mathrm{d}x$.

**【解】** (1) $I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal[\text{即 } x=6-u]{\text{令 } 9-x=u+3} \int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(u+3)}}{\sqrt{\ln(u+3)}+\sqrt{\ln(9-u)}}(-\mathrm{d}u)$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(u+3)}}{\sqrt{\ln(9-u)}+\sqrt{\ln(u+3)}}\mathrm{d}u = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}\mathrm{d}x,$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{2}^{4}\frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=\int_{2}^{4}dx=2,$$

所以 $I=1$.

(2) 令 $$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^{a}}\xlongequal{令 u=\frac{\pi}{2}-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{1+(\cot u)^{a}}\cdot(-du)$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan u)^{a}}{1+(\tan u)^{a}}du=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)^{a}}{1+(\tan x)^{a}}dx,$$

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+(\tan x)^{a}}+\frac{(\tan x)^{a}}{1+(\tan x)^{a}}\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},$$

所以 $$I=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 令 $$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx\xlongequal{令 x=\frac{\pi}{2}-u}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{e^{\cos u}}{e^{\cos u}+e^{\sin u}}(-du)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx,$$

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}+e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx=\frac{\pi}{2},所以 I=\frac{\pi}{4}.$$

## 题型六　由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分

**提示** 通过变量代换把原积分分解成可抵消或易积分的若干个积分；一般来讲，变量代换是这样做的：积分区间为对称的，令 $x=-u$；积分区间为 $[0,\pi]$ 的，令 $x=\pi-u$；积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的，令 $x=\frac{\pi}{2}-u$；积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的，令 $x=\frac{\pi}{4}-u$.

**【例 4.24】** 求下列定积分.

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$；　　(2) $\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{3}x}{1+\cos^{2}x}dx$；

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx$.

**【解】** (1) $$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

又 $$\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

代入原积分，得原积分 $=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$.

(2) $$I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{3}x}{1+\cos^{2}x}dx\xlongequal{令 x=\pi-u}\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin^{3}u}{1+\cos^{2}u}(-du)$$

$$=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{3}u}{1+\cos^{2}u}du-\int_{0}^{\pi}\frac{u\sin^{3}u}{1+\cos^{2}u}du$$

$$=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{3}x}{1+\cos^{2}x}dx-\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{3}x}{1+\cos^{2}x}dx.$$

于是 $$2I=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{3}x}{1+\cos^{2}x}dx-\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{3}x}{1+\cos^{2}x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{3}x}{1+\cos^{2}x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= -\pi\int_0^{\pi} \frac{2-(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= -2\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} + \pi\cos x\Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2\pi,$$

故
$$I = \frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi).$$

(3)
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx \xlongequal{令 x=\frac{\pi}{2}-u} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{f(\cos u)}{f(\cos u)+f(\sin u)}(-du)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx,$$

又
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx,$$

于是
$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

故
$$I = \frac{\pi}{4}.$$

## 题型七　已知一定积分，求另一定积分

提示　一般用变量代换.

**【例 4.25】** 已知 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx = A$，　求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{x+1}dx$.

**【解】** $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x+1}dx$

$$\xlongequal{令 u=2x} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+2}du = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos u}{u+2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos u}{(u+2)^2}du\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi+2}-A\right).$$

**【例 4.26】** 设 $F(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)dx$.　求 $F(-a)$，$F(a^2)$.

**【解】**
$$F(-a) = \int_0^{\pi} \ln(1+2a\cos x+a^2)dx \xlongequal{令 x=\pi-t} -\int_{\pi}^{0} \ln(1-2a\cos t+a^2)dt$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)dx = F(a),$$

$$2F(a) = F(a)+F(-a) = \int_0^{\pi} \ln[(1-2a\cos x+a^2)(1+2a\cos x+a^2)]dx$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(1-2a^2\cos 2x+a^4)dx \xlongequal{令 x=\pi-\frac{t}{2}} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1-2a^2\cos t+a^4)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \ln(1-2a^2\cos t+a^4)dt + \int_{\pi}^{2\pi} \ln(1-2a^2\cos t+a^4)dt\right].$$

因为
$$\int_{\pi}^{2\pi} \ln(1-2a^2\cos t+a^4)dt \xlongequal{令 t=2\pi-u} \int_{\pi}^{0} \ln(1-2a^2\cos u+a^4)(-du)$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) \mathrm{d}t,$$

所以 $2F(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos x + a^4) \mathrm{d}x = F(a^2).$

即
$$F(a^2) = 2F(a).$$

## 题型八　定积分等式的证明

证明定积分等式常用的方法有换元法、分部积分法、构造函数法、泰勒公式法等.

**1. 换元法(适用于被积函数或其主要部分仅给出连续条件的命题)**

**提示** (1) 依据定积分与积分变量无关的性质,改写等式一端的积分变量为 $u$;

(2) 作变量代换.(i) 若等式一端的被积函数或其主要部分为 $f(x)$,而另一端为 $f[\varphi(u)]$,则作代换 $x = \varphi(u)$;(ii) 若等式一端为 $f(x)$,另一端为 $f(u)$,则所作代换依据等式两端的积分限;

(3) 利用所作代换,由等式一端推导出另一端.

**注** 若抽象函数以三角函数为中间变量,则虽然等式一端为 $f(\sin x)$,另一端为 $f(\sin u)$,但由于 $f(\sin u) = f[\sin(\pi - u)]$,我们还是依据 (i) 而不是 (ii) 作代换,显然此处应作代换 $x = \pi - u$.

**【例 4.27】** 设 $f(x)$ 连续,证明:

(1) $\int_0^a x^3 f(x^2) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) \mathrm{d}x$;

(2) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x] \mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) \mathrm{d}x = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) \mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^1 \ln f(x+t) \mathrm{d}t = \int_0^x \ln \frac{f(1+t)}{f(t)} \mathrm{d}t + \int_0^1 \ln f(t) \mathrm{d}t$;

(5) 设 $n$ 为正整数,证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x$.

**【分析】** (1) $\int_0^a x^3 f(x^2) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u f(u) \mathrm{d}u$,

比较 $f(x^2)$ 与 $f(u)$,可知应令 $x^2 = u$.

(2) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)u] \mathrm{d}u$,

比较 $f(x)$ 与 $f[a + (b-a)u]$,可知应令 $x = a + (b-a)u$.

(3) 先证 $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} f(|\cos x|) \mathrm{d}x$,

即 $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} f(|\cos u|) \mathrm{d}u$,

比较 $f(|\cos x|) = f(|\cos u|) = f(|\cos(\pi + u)|)$,可知应令 $x = \pi + u$,

再证 $\int_0^{\pi} f(|\cos x|) \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) \mathrm{d}x$,

即 $\int_0^{\pi} f(|\cos x|) \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos(\pi - v)|) \mathrm{d}v$,

比较 $f(|\cos x|)=f(|\cos(\pi-v)|)$，可知应令 $x=\pi-v$.

（4）按一般的作法，若抽象函数中，中间变量含有参数，则应令该中间变量为 $u$，因此，

$$\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } x+t=u} \int_x^{x+1}\ln f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_x^0 \ln f(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 \ln f(u)\mathrm{d}u+\int_1^{x+1}\ln f(u)\mathrm{d}u,$$

比较要证的等式，可知要证的是

$$\int_1^{x+1}\ln f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x \ln f(1+t)\mathrm{d}t,$$

显然，应作变换 $u=1+t$.

（5）先令 $t=2x$，有 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^n\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t$，

又 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t$，再证 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t$，

只需作换元 $t=\pi-u$.

**【证】**（1）$\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x^2=u} \frac{1}{2}\int_0^{a^2}uf(u)\mathrm{d}u$，由于定积分与积分变量无关，

故 $$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)\mathrm{d}x.$$

（2）略.

（3）因为 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$，

$$\int_{\pi}^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=\pi+u} \int_0^{\pi}f(|\cos u|)\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$$

所以 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x\right].$$

又因为 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=\pi-v} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(|\cos v|)(-\mathrm{d}v)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x$，

故 $$\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x.$$

（4）因为 $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } x+t=u} \int_x^{x+1}\ln f(u)\mathrm{d}u$

$$=\int_x^0 \ln f(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 \ln f(u)\mathrm{d}u+\int_1^{x+1}\ln f(u)\mathrm{d}u,$$

又因为 $$\int_1^{x+1}\ln f(u)\mathrm{d}u \xlongequal{u=t+1} \int_0^x \ln f(t+1)\mathrm{d}t,$$

所以 $$\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t=\int_0^x \ln\frac{f(t+1)}{f(t)}\mathrm{d}t+\int_0^1 \ln f(t)\mathrm{d}t.$$

（5）令 $t=2x$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^n\mathrm{d}2x=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t.$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t\right),$$

又 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t \mathrm{d}t \xlongequal{t=\pi-u} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\pi-u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \mathrm{d}u$,

所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x.$$

又
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n t \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x,$$

因此，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x.$$

**【例 4.28】** 证明下列等式：

(1) $\int_0^a x\{f[\varphi(x)] + f[\varphi(a-x)]\}\mathrm{d}x = a\int_0^a f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x$；

(2) $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad (x>0)$.

**【分析】** (1) 原式等价于
$$\int_0^a xf[\varphi(x)]\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x = \int_0^a (a-u)f[\varphi(a-u)]\mathrm{d}u,$$

可见应作代换 $x = a-u$.

(2) $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$,

比较 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 与 $f(u) = \frac{1}{1+u^2}$，可知形式一致，因此作变换只能从两端的积分限去考虑：左端积分限为 $x,1$；右端积分限为 $1,\frac{1}{x}$. 可见应作代换 $x = \frac{1}{u}$.

**【证】** (1) $\int_0^a xf[\varphi(x)]\mathrm{d}x \xlongequal{令 x=a-u} \int_a^0 (a-u)f[\varphi(a-u)](-\mathrm{d}u)$

$= a\int_0^a f[\varphi(a-u)]\mathrm{d}u - \int_0^a uf[\varphi(a-u)]\mathrm{d}u$

$= a\int_0^a f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x - \int_0^a xf[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x$,

把后一项移到等式左端，便得
$$\int_0^a x\{f[\varphi(x)] + f[\varphi(a-x)]\}\mathrm{d}x = a\int_0^a f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x.$$

(2) $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \xlongequal{令 x=\frac{1}{u}} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

**【例 4.29】** 设函数 $f(x)$ 连续，且关于 $x=T$ 对称，$a<T<b$. 证明：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x.$$

**【分析】** $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，是指 $f(x+T) = f(T-x)$，
$$右边 = 2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x,$$

可知，要证命题成立，只需证

$$\int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

即证

$$\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x = -\int_T^b f(u)\mathrm{d}u = \int_b^T f(u)\mathrm{d}u,$$

比较左右两端的积分限，可知应作代换 $x = 2T - u$.

【证】$\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x = 2T-u} \int_T^b f(2T-u)(-\mathrm{d}u) = -\int_T^b f[T-(u-T)]\mathrm{d}u$

$$\xlongequal[x=T\text{ 对称}]{\text{因为 } f(x) \text{ 关于}} -\int_T^b f[T+(u-T)]\mathrm{d}u = -\int_T^b f(u)\mathrm{d}u = -\int_T^b f(x)\mathrm{d}x,$$

于是
$$\int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

等式两边同加上$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

命题得证.

**【例 4.30】**设 $f(x)$ 是定义在全数轴上，且以 $T$ 为周期的连续函数，$a$ 为任意常数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

**【分析】**原等式 $\Leftrightarrow \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$

可见要证命题成立，只需 $\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = 0,$

即证
$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u,$$

比较两端的积分限，可知应作变换 $x = u + T$.

**【证】**因为$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x = u+T} \int_0^a f(u+T)\mathrm{d}u$

$$= \int_0^a f(x+T)\mathrm{d}x \xlongequal[f(x+T)=f(x)]{\text{因为 } f(x) \text{ 以 } T \text{ 为周期}} \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

所以$\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = 0,$

等式两端各加上$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$，于是得

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\mathrm{d}x,$$

命题得证.

**【例 4.31】**设 $f(x)$ 连续，且常数 $a > 0$，证明：

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

**【分析】** $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}$,

比较 $f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)$ 与 $f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)$ 可知应令 $x^2=u$,于是

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{2u}=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

与欲证的等式右端比较,可知须证

$$\int_a^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

比较上式两端的积分限,可知应令 $u=\frac{a^2}{t}$,

$$\int_a^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\xlongequal{\text{令 } u=\frac{a^2}{t}}\int_a^1 f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\cdot\frac{t}{a^2}\left(-\frac{a^2}{t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

**【证】** 因为 $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\xlongequal{\text{令 } x^2=u}\int_1^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2u}$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}+\int_a^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right].$$

又因为 $\int_a^{a^2} f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\xlongequal{\text{令 } u=\frac{a^2}{t}}\int_a^1 f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\cdot\frac{t}{a^2}\left(-\frac{a^2}{t^2}\mathrm{d}t\right)$

$$=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

所以 $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

命题得证.

**2. 分部积分法(适用于被积函数中含有 $f'(x)$ 或变限积分的命题)**

**【例 4.32】** 设 $f'(x)$ 连续,$F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$,证明:

$$F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a).$$

**【证】** $F(2a)-2F(a)=\int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t-2\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$

$$=\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t,$$

因为 $\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t=-f(t)f(2a-t)\Big|_a^{2a}+\int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)\mathrm{d}t$

$$=f^2(a)-f(0)f(2a)+\int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

所以原式 $=f^2(a)-f(0)f(2a)+\int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$,

又因为 $\int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 2a-t=u} \int_a^0 f(u)f'(2a-u)(-\mathrm{d}u)$

$$= \int_0^a f(u)f'(2a-u)\mathrm{d}u = \int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t,$$

故 $$F(2a)-2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a).$$

**【例 4.33】** 若 $f(x)$ 是连续函数，则

$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

**【证】** $\int_0^x \left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u = u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^x - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$

$$= x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

**【例 4.34】** 当 $x \geqslant 0$ 时，$f_0(x) > 0$，若令 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots)$

则 $f_n(x)$ 可表示为 $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}f_0(t)\mathrm{d}t.$

**【证】** 因为 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$，

所以 $f'_n(x) = f_{n-1}(x)$， 且 $f_n(0) = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$，

右式 $= \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}f_0(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}f'_1(t)\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}f_1(t)\Big|_0^x + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f_1(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f'_2(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}f_2(t)\Big|_0^x + \frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (x-t)^{n-3}f_2(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (x-t)^{n-3}f'_3(t)\mathrm{d}t$$

$$= \cdots = \int_0^x (x-t)f_{n-2}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x (x-t)f'_{n-1}(t)\mathrm{d}t = (x-t)f_{n-1}(t)\Big|_0^x + \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t = f_n(x).$$

**3. 构造辅助函数法(适用于证明在积分限中至少存在一点 $\xi$ 或 $x_0$，使等式成立的命题)**

**证题思路：**

(1) 将 $\xi$ 或 $x_0$ 改成 $x$，移项使等式一端为零，则另一端即为所作的辅助函数 $F(x)$ 或 $F'(x)$；

(2) 验证 $F(x)$ 满足介值定理或微分中值定理的条件；

(3) 由介值或微分中值定理，即可证得命题.

**【例 4.35】** 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

**【分析】** 若令 $f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)$，则再往下做就困难了，

若令 $$F'(x) = f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

则 $$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_x^b g(t)\mathrm{d}t,$$

不难验证该函数在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件.

**【证】** 作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$,由于 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,所以 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导,并有 $F(a)=F(b)=0$,

由罗尔定理有 $F'(\xi)=0,\quad \xi\in(a,b)$,

即 $$\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right]'_x\Bigg|_{x=\xi}=\left[f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\cdot g(x)\right]\Bigg|_{x=\xi}$$
$$=f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x-g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=0,$$

亦即 $$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

**【例 4.36】** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导,且 $f'(x)>0$,$f(a)>0$,试证:对于图 4-5 所示的两个面积函数 $A(x)$ 和 $B(x)$,存在唯一的 $\xi\in(a,b)$,

使得 $$\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=1994.$$

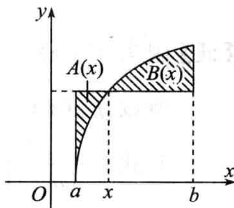


图 4-5

**【分析】** 把上式中的 $\xi$ 改为 $x$,则 $A(x)=1994B(x)$,

因为 $A(x)=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

$$B(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t-f(x)(b-x),$$

所以可令辅助函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=A(x)-1994B(x)$$
$$=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-1994\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t-f(x)(b-x)\right].$$

**【证】** 令 $F(x)=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-1994\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t-f(x)(b-x)\right]$,

$F'(x)=f'(x)(x-a)+1994f'(x)(b-x)>0$ (因为 $f'(x)>0$),

可知 $F(x)$ 在$(a,b)$内单调增加,故 $F(x)$ 在$(a,b)$内至多有一个零点.

又因为 $$f'(x)>0,f(x)“\nearrow”,$$

所以 $$F(a)=-1994\left[\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-f(a)(b-a)\right]$$
$$=-1994\int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t<0,$$
$$F(b)=f(b)(b-a)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t>0,$$

由闭区间上连续函数的零值定理,可知 $F(x)$ 在$(a,b)$内至少有一个零点.

综上所述,可知 $F(x)$ 在$(a,b)$内有唯一的零点 $\xi$,使得 $F(\xi)=0$,即$\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=1994$.

**【例 4.37】** 设 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $g(x)\neq0$,$x\in[a,b]$,试证:至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

【分析】令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

于是

$$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad G(b)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\text{结论}\Rightarrow \frac{F(b)}{G(b)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)},\text{把 }\xi\text{ 换成 }x$$

$$\Rightarrow \frac{F(b)}{G(b)}=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow F(b)g(x)=G(b)f(x)$$

$$\Rightarrow F(b)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=G(b)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

辅助函数 $W(x)=F(b)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-G(b)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$

【证】由题设条件，显然 $W(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

由变上限积分定理知 $W(x)$ 在 $(a,b)$ 上可导，

又 $W(a)=0,$

$W(b)=F(b)G(b)-G(b)F(b)=0,$

由罗尔定理知在 $(a,b)$ 内至少存在一个 $\xi$，使 $W'(\xi)=0$，

即 $F(b)g(\xi)-G(b)f(\xi)=0$，亦即 $\dfrac{F(b)}{G(b)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}.$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

【另证】用柯西中值定理.

**4. 泰勒公式法(适用于被积函数 $f(x)$ 具有二阶或二阶以上连续导数的命题)**

**证题思路：**

(1) 作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$；

(2) 将 $F(x)$ 在所需点处(一般是根据右边表达式确定展开点)进行泰勒展开；

(3) 对泰勒余项作适用处理(一般是利用介值定理).

【例 4.38】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，证明在 $(a,b)$ 内存在一点 $\xi$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

【证】令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则有

$$F(a)=0,F'(x)=f(x),F''(x)=f'(x),F'''(x)=f''(x),$$

$F(x)$ 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处的二阶泰勒公式为

$$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+$$
$$\frac{1}{3!}F'''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3$$
$$=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+$$
$$\frac{1}{3!}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3,$$

其中，$\xi$ 在 $x$ 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间.

分别将 $x=b, x=a$ 代入上式，并相减，则得

$$F(b)-F(a)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2},$$

其中，$\xi_1,\xi_2$ 分别在 $\frac{a+b}{2}$ 与 $b, a$ 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间.

不妨设 $f''(\xi_1)\leqslant f''(\xi_2)$，则 $f''(\xi_1)\leqslant\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant f''(\xi_2)$，

考虑到 $f''(x)$ 的连续性及介值定理，可知在 $\xi_1,\xi_2$ 之间至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2},$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

## 题型九 定积分不等式的证明

**提示** 常用定理：定积分的比较定理，估值定理，函数的单调增减性，微分与积分中值定理，泰勒公式.

常用不等式：(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$； (2) $a>0$， $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$；

(3) 柯西不等式 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$.

下面根据被积函数的连续性、可导性、二阶和二阶以上可导性，分别给出证题的思路.

### 1. 仅告知被积函数连续的命题的证法

一般来讲，这类命题的证明要做辅助函数(或者说用辅助函数法简便).

辅助函数的作法：将要证结论中的积分上限(或下限)换成 $x$，式中相同的字母也换成 $x$，移项使不等式一端为0，则另一端的表达式即为所作的辅助函数 $F(x)$.

**这类命题的证题思路：**

(1) 作辅助函数 $F(x)$；

(2) 求 $F(x)$ 的导数 $F'(x)$，并判别 $F(x)$ 的单调性；

(3) 求 $F(x)$ 的积分区间 $[a,b]$ 的端点值 $F(a),F(b)$，其中必有一个为“0”，由第(2)条思路可推出 $F(b)>F(a)$[或 $F(b)<F(a)$]，从而得出命题的证明.

**【例 4.39】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**【分析】** 把结论中的 $b$ 换成 $x$，移项，得

$$\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\leqslant 0,$$

令 $$F(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t.$$

**【证】** 方法一：令 $F(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t$，

因为 $F'(x) = 2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \cdot f(x) - \int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t - (x-a)f^2(x)$

$= \int_a^x 2f(x)f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f^2(x)\mathrm{d}t$

$= -\int_a^x [f^2(t) - 2f(x)f(t) + f^2(x)]\mathrm{d}t = -\int_a^x [f(t) - f(x)]^2\mathrm{d}t \leqslant 0,$

所以 $F(x)$ 单调递减，$x \in [a,b]$.

又因为 $F(a) = 0$，　所以 $F(b) \leqslant F(a) = 0$，

故
$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**方法二：**用柯西不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b 1^2\mathrm{d}x = (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**【例 4.40】**设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且严格单增，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

**【证】**作辅助函数

$$F(x) = (a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - 2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$$

因为 $F'(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + (a+x)f(x) - 2xf(x)$

$= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + (a-x)f(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(x)\mathrm{d}t$

$= \int_a^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t < 0,$

（因 $t \leqslant x$，且 $f(x)$ 严格单调增，即 $f(t) < f(x)$）

所以 $F(x)$ 单调递减，又 $F(a) = 0$，

故　$F(b) < F(a) = 0$.　即　$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

**【例 4.41】**设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$. 证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

**【证】**作辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} - (x-a)^2$，

因为 $F'(x) = f(x)\int_a^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{f(x)} - 2(x-a)$

$= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)}\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)}\mathrm{d}t - \int_a^x 2\mathrm{d}t$

$= \int_a^x \left(\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2\right)\mathrm{d}t \geqslant 0 \left(\text{因为 } f(x) > 0, \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geqslant 2\right),$

所以 $F(x)$ 单调递增.

又因为 $F(a) = 0$，所以 $F(b) \geqslant F(a) = 0$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

**【例 4.42】**设 $f(x)$，$g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续增函数 $(a,b > 0)$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

**【证】** 作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-(x-a)\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$,

因为 $F'(x)=f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(x)g(x)$

$$=\int_a^x f(x)g(t)\mathrm{d}t+\int_a^x g(x)f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(x)g(x)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x [f(x)g(t)+g(x)f(t)-f(t)g(t)-f(x)g(x)]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_a^x [f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]\mathrm{d}t<0\text{(因为 } f(x),g(x) \text{ 均为增函数)}$$

所以 $F(x)$ 单调递减.

又因为 $F(a)=0$,所以 $F(b)\leqslant F(a)=0$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

**【例 4.43】** 设 $y=f(x)$ 是在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加的可导函数,且 $f(0)=0$,它的反函数为 $x=g(y)$,证明:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y\geqslant ab\ (a,b>0).$$

**【证】** 由已知得,$g[f(x)]=x$,$f[g(y)]=y$,$x=g(y)$ 严格单调增加,

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant f(0)=0$, $g(y)\geqslant g(0)=g[f(0)]=0$.

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{g(b)} g[f(x)]\mathrm{d}f(x)$$

(代入 $y=f(x)$,$x=g(y)$,$y=b$,$x=g(b)$)

$$=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{g(b)} x\mathrm{d}f(x)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+xf(x)\Big|_0^{g(b)}-\int_0^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=bg(b)+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_0^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

(1) 如果 $g(b)=a$,有 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y=ab$.

(2) 如果 $g(b)>a$,有

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y&=bg(b)-\int_a^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x\\&>bg(b)-f[g(b)][g(b)-a]=bg(b)-b[g(b)-a]\\&=ab.\end{aligned}$$

$(x\leqslant g(b),f(x)\leqslant f[g(b)])$

(3) 如果 $g(b)<a$,有

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y&=bg(b)+\int_{g(b)}^a f(x)\mathrm{d}x\\&>bg(b)+f[g(b)][a-g(b)]=ab.\end{aligned}$$

所以,$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y\geqslant ab\quad(a,b>0)$.

**2. 已知被积函数 $f(x)$ 一阶可导,又至少一个端点的函数值为 $0(f(a)=0$ 或 $f(b)=0)$ 的命题的证法**

**(Ⅰ)证题思路之一:**

(1) 写出含这个端点的拉格朗日中值定理

$$f(x)=f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi)\quad (f(a)=0),$$

或
$$f(x)=f(x)-f(b)=(x-b)f'(\xi)\quad (f(b)=0);$$

(2) 再根据题意进行不等式的放缩;

(3) 用定积分的比较定理,估值定理或函数的绝对值不等式等定积分性质作分析处理.

【例 4.44】设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导,且 $f'(x)\leqslant M, f(a)=0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

【证】由题设可知,对 $\forall x\in[a,b]$, $f(x)$ 在$[a,b]$上满足拉氏微分中值定理,于是有

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\xi\in(a,x),$$

因为 $f'(x)\leqslant M$, 所以 $f(x)\leqslant M(x-a)$. 由定积分比较定理,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

【例 4.45】设 $f(x)$ 在$[a,b]$上不恒为零,且其导数 $f'(x)$ 连续,并且有 $f(a)=f(b)=0$. 试证:

存在一个 $\xi\in[a,b]$,使 $|f'(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【证】因为 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续,所以 $|f'(x)|$ 在$[a,b]$上连续.

于是,存在一个 $\xi$,使得 $|f'(\xi)|=M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$.

又由题设有

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)\quad (a<\xi_1<x)$$

$$f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)\quad (x<\xi_2<b)$$

$$\Rightarrow |f(x)|\leqslant M(x-a),\quad |f(x)|\leqslant M(b-x),$$

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\mathrm{d}x\right]=\frac{(b-a)^2}{4}M,$$

又 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$,所以$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M$,即

$$M\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

故
$$|f'(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**(Ⅱ)证题思路之二:**

(1) 写出等式

$$f(x)\xlongequal{\text{当 } f(a)=0 \text{ 时}}f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

或
$$f(x)-f(\xi)=\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 利用定积分比较定理、估值定理或绝对值不等式进行分析处理.

【例 4.46】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，且 $f(a)=0$，试证：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

【证】$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，于是由柯西不等式

$$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_a^x \mathrm{d}t\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t,$$

故 $$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \{(x-a)\int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t\}\mathrm{d}x = \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x\int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

【例 4.47】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数. 证明：对于 $x\in[0,1]$，有

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 [|f(t)|+|f'(t)|]\mathrm{d}t.$$

【证】因为 $f(t)$ 连续，$|f(t)|$ 也连续，所以由积分中值定理有

$$\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |f(\xi)|,\quad 0\leqslant \xi \leqslant 1,$$

又 $$f(x)-f(\xi)=\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad \text{即}\quad f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

所以 $$|f(x)| \leqslant |f(\xi)|+\left|\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(\xi)|+\int_\xi^x |f'(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant |f(\xi)|+\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t,$$

故 $$|f(x)| \leqslant \int_0^1 [|f(t)|+|f'(t)|]\mathrm{d}t.$$

【例 4.48】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，证明：对任意的 $x_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$x_2\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 有

$$|f'(x)| \leqslant 3|f(x_2)-f(x_1)|+\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

【证】对任意的 $x_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$x_2\in\left(\frac{2}{3},1\right)$，$\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$，使

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

又 $x_2-x_1\geqslant\frac{1}{3}$，所以，$|f'(\xi)| \leqslant 3|f(x_2)-f(x_1)|$.

又 $$|f'(x)|-|f'(\xi)| \leqslant |f'(x)-f'(\xi)| = \left|\int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_\xi^x |f''(t)|\mathrm{d}t\left(\text{或}\int_x^\xi |f''(t)|\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x,$$

即 $$|f'(x)| \leqslant |f'(\xi)|+\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 3|f(x_2)-f(x_1)|+\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

**3. 已知被积函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，且又知最高阶导数的符号的命题的证法**

证题思路：直接写出 $f(x)$ 的泰勒展开式(证明定积分等式是将辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

展成泰勒公式)，然后根据题意对展开式进行放缩.

**【例 4.49】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，且 $f''(x)>0$，证明：

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{①}$$

**【证】** 先证左端不等式 $(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 成立.

由题设，对 $\forall x\in[a,b]$，当 $x>a$ 时，$f(x)>f(a)$，故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>(b-a)f(a). \tag{②}$$

再证右端不等式成立.

对 $\forall t\in[a,b]$，$f(t)$ 在点 $x$ 处的泰勒展开式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(t-x)^2,\text{其中},\xi\text{ 在 } t \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

因为 $f''(\xi)>0$，

所以 $f(t)>f(x)+f'(x)(t-x)$. ③

将 $t=b,t=a$ 分别代入 ③ 式并相加，得

$$f(b)+f(a)>2f(x)+(a+b)f'(x)-2xf'(x). \tag{④}$$

对 ④ 的两边在 $[a,b]$ 上积分，则

$$[f(b)+f(a)](b-a)>2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+(a+b)\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2[f(b)+f(a)](b-a)>4\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{⑤}$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，由 ②，⑤ 可知 ① 成立.

## 题型十　计算反常积分

**提示** (1) 区别类型(无穷积分，瑕积分)，对既有无穷积分又有瑕积分的混合型，一定要先进行分解，使各单个积分为只有一个瑕点的瑕积分，或只有一个积分限为无穷的无穷积分；

(2) 求出被积函数的原函数；

(3) 按定义求出各反常积分的值；

(4) 求出(3) 所得各值的代数和.

**【例 4.50】** 求下列反常积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+9}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\mathrm{d}x$.

**【解】** (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\xlongequal{\text{令 }1+\mathrm{e}^x=u}\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2(u-1)}$

$$=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\left(\ln|u-1|-\ln|u|+\frac{1}{u}\right)\Big|_2^{+\infty}$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(\ln\frac{u-1}{u}+\frac{1}{u}\right)+\ln 2-\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{x+2}{\sqrt5}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{x+2}{\sqrt5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt5}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt5}.$$

(3) $$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}=0$，所以 $x=0$ 不是奇点.

由于 $F(x)=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$，则 $F(0)$ 没有意义；

所以对于 $x=0$ 按奇点处理.

所以 $$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]-\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]$$

$$=0-\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+x^2}\right]=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=\infty$，$x=e$ 为奇点.

所以 $$\int_1^e\frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx=\int_1^e\frac{d\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e$$

$$=\lim_{x\to e^-}\arcsin(\ln x)-\arcsin(\ln 1)=\frac{\pi}{2}.$$

## 题型十一　反常积分的判敛

**提示** 有两种方法：直接法，即由敛散性的定义判别；间接法，即由判别准则判别. 绝大多数情况下用判别准则判别.

**【例 4.51】** 判别下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{3x^4-x^2+1}dx$；(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx$；(3) $\int_0^1\frac{1}{\ln x}dx$；(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

**【解】** (1) 因为 $f(x)\sim\frac{1}{3x^2}$（当 $x\to+\infty$ 时），而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{3x^4-x^2+1}dx$ 收敛.

(2) 因为 $f(x)=\frac{\sin^2x}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx$ 收敛.

(3) 因为 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}\to\infty$(当 $x\to 1$ 时),所以 $x=1$ 为瑕点,

当 $0<x<1$ 时,$\ln x<0$,为了能用前面所讲的判别准则,

不妨考虑 $\int_0^1\dfrac{1}{-\ln x}dx$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\dfrac{1}{-\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=1, m=1$,

所以 $\int_0^1\dfrac{1}{-\ln x}dx$ 发散,故 $\int_0^1\dfrac{1}{\ln x}dx$ 发散.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}=+\infty$,所以 $x=0$ 为瑕点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{5}{6}}\dfrac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=0$,

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$ 收敛,即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势 1**　在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,要立刻想到先用积分中值定理对该积分式进行处理.

**【例 4.52】** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内二阶可导,且 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right), 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=f(2)$,证明:存在一个 $\xi\in(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

**【证】** $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=2(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta)$ , $\dfrac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant 1$ (积分中值定理),

于是 $f(x)$ 在 $[\eta,2]\subset[0,2]$ 上满足罗尔定理,即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$,使

$$f'(\xi_1)=0;$$

又 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上满足罗尔定理,即存在一个 $\xi_2\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,使

$$f'(\xi_2)=0,$$

则 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

由于 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上满足罗尔定理,于是存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

**思维定势 2**　对定限或变限积分,若被积函数或其主要部分为复合函数,要立刻想到先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$.

**【例 4.53】** 求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 $u$ 的连续函数):

(1) $F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$;　　　　(2) $F(x)=\int_0^{x^2} tf(x-t)\mathrm{d}t$.

【解】(1) 令 $u=x-y$,则

$$F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x=\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u,$$

则 $$F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y).$$

(2) 令 $u=x-t$,则

$$F(x)=\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=-x\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u+\int_x^{x-x^2}uf(u)\mathrm{d}u,$$

则 $$\begin{aligned}F'(x)&=-\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u-x[f(x-x^2)(1-2x)-f(x)]+\\&\quad(1-2x)(x-x^2)f(x-x^2)-xf(x)\\&=\int_{x-x^2}^x f(u)\mathrm{d}u+x^2(2x-1)f(x-x^2).\end{aligned}$$

**思维定势 3　对称区间上定积分的计算,要想到利用被积函数的奇偶性简化计算.**

【例 4.54】设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$,$a\geqslant 0$ 上连续,计算

$$I=\int_{-a}^a[(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x)+(x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)]\mathrm{d}x.$$

【解】$$\begin{aligned}I&=\int_{-a}^a\{x[f(x)+f(-x)]+\mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)]\}\mathrm{d}x\\&=\int_{-a}^a x[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x+\int_{-a}^a\mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

(因为 $x[f(x)+f(-x)]$ 和 $\mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)]$ 在 $[-a,a]$ 上为奇函数)

【例 4.55】计算定积分 $\int_{-2}^2 x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.

【解】显然 $f(x)=x\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 非奇非偶,所以

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x&=\int_0^2[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^2[x\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\ln(1+\mathrm{e}^{-x})]\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

## 二、综合题解析

【例 4.56】设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0$,$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$. 证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

【证】$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } u=x^n-t^n}\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u,$

于是 $$F'(x)=x^{n-1}f(x^n),$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}$$

$$= \frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n-0} = \frac{1}{2n}f'(0).$$

【例 4.57】设 $\varphi(t)$ 是正值连续函数，$f(x) = \int_{-a}^{a} |x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t, -a \leqslant x \leqslant a(a>0)$，

证明：曲线 $y = f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的.

【证】$f(x) = \int_{-a}^{x}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{a}(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t$

$$= x\int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_{-a}^{x}t\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{a}t\varphi(t)\mathrm{d}t - x\int_{x}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

$$f'(x) = \int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t + x\varphi(x) - x\varphi(x) - x\varphi(x) - \int_{x}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t + x\varphi(x)$$

$$= \int_{-a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

$$f''(x) = \varphi(x) + \varphi(x) = 2\varphi(x) > 0,$$

故曲线 $y = f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的.

【例 4.58】设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2\mathrm{e}^x - f(x)$，且 $f(0) = 0, g(0) = 2$，

求 $\int_{0}^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$.

【解】由 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2\mathrm{e}^x - f(x)$，

得 $f''(x) = 2\mathrm{e}^x - f(x)$，于是有 $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2\mathrm{e}^x, \\ f(0) = 0, f'(0) = 2. \end{cases}$

解方程得 $f(x) = \sin x - \cos x + \mathrm{e}^x$.

故
$$\int_{0}^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\frac{f(x)}{1+x} = \frac{f(x)}{1+x}\bigg|_{0}^{\pi} = \frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{1+\pi}.$$

## 习　题　四

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：对于任意选定的连续函数 $\Phi(x)$，均有 $\int_{a}^{b}f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x = 0$，则在 $[a,b]$ 上，$f(x) = 0$.

2. 设 $\lambda$ 为任意实数，证明：$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot x)^{\lambda}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，对任意 $x,y$ 都有 $|f(x)-f(y)| < M|x-y|$，证明：
$$\left|\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

4. 设 $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，$n$ 为大于 1 的正整数，证明：$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，$f(x) > 0$，证明：对于满足 $0 < \alpha < \beta < 1$ 的任何 $\alpha,\beta$，有

$$\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x > \alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

**6.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

**7.** 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且单调不增，证明：任给 $\alpha\in(0,1)$，有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

**8.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：在$(a,b)$内存在一点$\xi$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi).$$

**9.** 设 $f$ 连续，证明：
$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

**10.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$f'(x)$ 在$[a,b]$内存在且可积，$f(a)=f(b)=0$，试证：

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x,(a<x<b).$$

**11.** 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有二阶连续导数 $f''(x)$，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0$，试证：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x > 4.$$

**12.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

**13.** 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有一阶连续导数，且 $f(1)-f(0)=1$，试证：

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 1.$$

**14.** 设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，且$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$，$\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x = a > 0$，

证明：$\exists\xi\in[0,2]$，使 $|f(\xi)|\geqslant a$.

**15.** 计算下列反常积分.

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$；
(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$；
(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(4) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)\mathrm{d}x$；
(5) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$；
(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

**16.** 判别下列反常积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$；
(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5x^2+2x+3}{x^3+4}\mathrm{d}x$；
(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{3+2x^3}\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$；
(5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$；
(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$.

## 参考答案

**1.** 令 $\Phi(x)=f(x)$，利用反证法.

**2.** $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^\lambda}{(\sin x)^\lambda+(\cos x)^\lambda}\mathrm{d}x$，令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，两积分相加.

3. $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\right|$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}M\left|x-\frac{k}{n}\right|\mathrm{d}x=M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{M}{2n}.$$

4. 因为 $\tan^{n+2}x\leqslant\tan^{n}x\leqslant\tan^{n-2}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $I_{n+2}<I_n<I_{n-2}$.

有 $2I_n>I_{n+2}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n}x\sec^2x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n}x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1}$,

$2I_n<I_{n-2}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\sec^2x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n-1}$.

5. 利用积分中值定理，$\exists\xi\in(0,\alpha)$，$\beta\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x=\alpha\beta f(\xi)$，

$\exists\eta\in(\alpha,\beta)$，$\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x=\alpha(\beta-\alpha)f(\eta)$，由 $f(\xi)>f(\eta)$ 即可证明.

注：积分中值定理中的 $\xi$ 可以在开区间内取到.

6. 略.

7. 原不等式等价于：$(1-\alpha)\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_{\alpha}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

由积分中值定理，$\exists\xi_1\leqslant\alpha$，$(1-\alpha)\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x=\alpha(1-\alpha)f(\xi_1)$，

$\exists\xi_2\geqslant\alpha$，$\alpha\int_{\alpha}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\alpha(1-\alpha)f(\xi_2)$，

所以，$\xi_2\geqslant\xi_1$，$f(\xi_2)\leqslant f(\xi_1)$，即原不等式成立.

8. 略.　9. 略.

10. 因为 $f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$,　$f(x)=f(x)-f(b)=\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t$,

所以，$|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t$，$|f(x)|=\left|\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t$（因 $x<b$），两式相加得，

$$2|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t+\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

11. 因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq0$，

所以，$|f(x)|$ 在$[0,1]$上连续，且 $|f(x)|\neq0$，

因此，$|f(x)|$ 在$(0,1)$内有最大值，即 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $|f(x_0)|$ 为 $|f(x)|$ 的最大值，又

$f(x_0)=f(x_0)-f(0)=f'(\xi_1)x_0$，$0<\xi_1<x_0$，

$f(x_0)=f(x_0)-f(1)=f'(\xi_2)(x_0-1)$，$x_0<\xi_2<1$，

所以，$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)}{x_0}$,　$f'(\xi_2)=\frac{f(x_0)}{x_0-1}$，$[\xi_1,\xi_2]\subset[0,1]$，

因此，$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{|f(x_0)|}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x>\frac{1}{|f'(x_0)|}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\mathrm{d}x$

$$\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{|f(x_0)|}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\left|\frac{1}{x_0-1}-\frac{1}{x_0}\right|$$

$$=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{1-x_0}=\frac{1}{x_0(1-x_0)}\geqslant\frac{4}{(x_0+1-x_0)^2}=4.$$

**12.** 利用泰勒公式，令 $x_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

$$\ln t=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(t-x_0)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2}(t-x_0)^2\leqslant\ln x_0+\frac{1}{x_0}(t-x_0),$$

令 $t=f(x)$，两边对 $x$ 积分即可.

**13.** 利用柯西不等式.

**14.** 由已知，$|f(x)|$ 在 $[0,2]$ 上连续，故 $\exists\xi\in[0,2]$，使 $|f(\xi)|\geqslant f(x)$，$x\in[0,2]$.

$$a=\left|\int_0^2(x-1)f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^2|x-1||f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=|f(\xi)|\int_0^2|x-1|\mathrm{d}x=|f(\xi)|.$$

**15.** (1) $\frac{3}{2}(\mathrm{e}^2-1)^{\frac{2}{3}}$； (2) $\frac{\pi}{12}$； (3) 2； (4) $-\frac{1}{2}$； (5) $\frac{\pi}{3}$； (6) $\frac{\pi}{2}-1$.

**16.** (1) 收敛；(2) 发散；(3) 收敛；(4) 收敛；(5) 发散；(6) 收敛.

# 第五章　微分中值定理

## 第 1 节　重要概念、定理和公式的剖析

**定理 1**（有界性）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M, x\in[a,b]$.

**定理 2**（最值定理）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必能取得最大和最小值，即存在 $\xi,\eta\in[a,b]$，使得 $M=f(\xi)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，$m=f(\eta)=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，即 $m\leqslant f(x)\leqslant M, x\in[a,b]$.

**定理 3**（介值定理）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\mu$ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$（或 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 $M$ 与最小值 $m$）之间的任一实数，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\xi$，使 $\mu=f(\xi)$（注意，$\xi$ 可取端点值）.

**定理 4**（零值定理）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)$ 与 $f(b)$ 严格异号，即 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=0$（注意，$\xi$ 不可取端点值）.

**定理 5**（费尔马定理）　若函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 或 $f(x)\geqslant f(x_0)$；

(2) $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，

则有 $f'(x_0)=0$.

**定理 6**（罗尔定理）　若函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$，

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'(\xi)=0$.

**定理 7**（拉格朗日中值定理）　若函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内可导，

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

或

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),$$

或

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)], 0<\theta<1.$$

**推论**：若 $f'(x)=0, x\in[a,b]$，则 $f(x)=C, x\in[a,b]$（$C$ 是常数）.

**定理 8**（柯西中值定理）　设函数 $f(x),g(x)$ 满足以下条件：

(1) $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导,且 $g'(x) \neq 0$,

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, $a < \xi < b$.

**定理 9**(泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内具有 $n+1$ 阶导数,$x$ 为该邻域内异于 $x_0$ 的任一点,则在 $(x,x_0)$ 或 $(x_0,x)$ 内至少存在一个 $\xi$,使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad ①$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (拉氏型 $n$ 阶泰勒余项),

或 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ (皮亚诺型 $n$ 阶泰勒余项).

当 $x_0 = 0$ 时,式 ① 成为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad ②$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 或 $R_n(x) = o(x^n)$.

式 ① 称为 $n$ 阶泰勒公式,式 ② 称为 $n$ 阶麦克劳林公式.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 闭区间上连续函数命题的证明

**提示** **方法 1**(直接法) 先利用最值定理,$m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a,b]$, $M$, $m$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值、最小值,然后用介值定理证明.

适用于:在闭区间 $[a,b]$ 上存在 $\xi$,使得关于 $\xi$ 的关系式成立.

**方法 2**(间接法) 作辅助函数 $F(x)$;若作 $F(x)$ 的过程无积分运算,则验证 $F(x)$ 满足零值定理;若作 $F(x)$ 的过程有积分运算,则验证 $F(x)$ 满足罗尔定理.

适用于:在开区间 $(a,b)$ 上存在 $\xi$,使得关于 $\xi$ 的关系式成立.

**辅助函数的作法:**

(1) 将欲证结论中的 $\xi$ 或 $x_0$ 改写成 $x$,移项,使等式一端为零,另一端记作 $F^*(x)$;

(2) 令 $F(x) = F^*(x)$,验证 $F(x)$ 是否满足零值定理,若满足,则命题得证;若不满足,则改令

$$F'(x) = F^*(x) \Rightarrow F(x) = \int F^*(x)\mathrm{d}x + C \quad (令\ C = 0),$$

或 $$F'(x) = k(x)F^*(x) \Rightarrow F(x) = \int k(x)F^*(x)\mathrm{d}x;$$

(其中,$k(x)$ 是某个已知函数)

(3) 验证 $F(x)$ 是否满足罗尔定理,若满足,则定理得证;若不满足,则改令 $F''(x) = F^*(x) \Rightarrow F(x)$ (两次积分);

(4) 将 $F(x)$ 在指定点展成一阶泰勒公式,命题即可得证.

【例 5.1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, c_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$. 证明:至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得 $f(\xi) = \dfrac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$.

【分析】因为涉及闭区间上的一个点,所以用方法 1.

【证】因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,所以有 $m \leqslant f(x) \leqslant M, x \in [a,b]$,其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 $M$,最小值为 $m$. 于是

$$m \leqslant f(x_1) \leqslant M, c_1 > 0, \Rightarrow c_1 m \leqslant c_1 f(x_1) \leqslant c_1 M$$
$$m \leqslant f(x_2) \leqslant M, c_2 > 0, \Rightarrow c_2 m \leqslant c_2 f(x_1) \leqslant c_2 M$$
$$\vdots$$
$$m \leqslant f(x_n) \leqslant M, c_n > 0, \Rightarrow c_n m \leqslant c_n f(x_n) \leqslant c_n M$$
$$\Rightarrow (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) m \leqslant c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n) \leqslant (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) M$$
$$\Rightarrow m \leqslant \frac{c_1 f(x_1) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \leqslant M,$$

则由介值定理可得,至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}.$$

【例 5.2】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b](a < b)$ 上连续,且 $f(x) > 0$,证明:至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【分析】题中是证明在开区间 $(a,b)$ 上存在一点 $\xi$,使得关于 $\xi$ 的关系式成立,则用方法 2. 另外,只证左边的"=",这是因为定积分对区间的可加性:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】将欲证等式中的 $\xi$ 改为 $x$,则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = 0$,作辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且

$$F(a) = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t < 0 \quad (\text{因为 } f(x) > 0), \quad F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0,$$

即 $F(a) \cdot F(b) < 0$,所以由零值定理可知,至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $F(\xi) = 0$,故下式成立,即

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 5.3】设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明:存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得

$$f(\xi)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【分析】题中是证明在开区间 $(a,b)$ 上存在一点 $\xi$,使得关于 $\xi$ 的关系式成立,则用方法 2. 将欲证等式中的 $\xi$ 改为 $x$,则

$$f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t = g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

作辅助函数 $F(x) = f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t, F(a) = -g(a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, F(b) =$

$f(b)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$,零值定理不易验证,故改令

$$\begin{aligned}F'(x) &= f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \\ &= f(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t + g(x)\int_b^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \cdot \int_b^x f(t)\mathrm{d}t\right]'.\end{aligned}$$

**【证】**令 $F(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \cdot \int_b^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导.又

$$F(a) = \int_a^a g(t)\mathrm{d}t \cdot \int_b^a f(t)\mathrm{d}t = 0,\quad F(b) = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \cdot \int_b^b f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

所以 $F(x)$ 在$[a,b]$上满足罗尔定理,故至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $F'(\xi) = 0$,即

$$f(\xi)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**【例 5.4】**设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $f(0) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明:存在一点 $\xi \in (0,1)$,使得 $\xi f(\xi) = \int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

**【证】**题中是证明在开区间$(a,b)$上存在一点 $\xi$,使得关于 $\xi$ 的关系式成立,则用方法 2.

记 $\varphi(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$上连续,但 $\varphi(0)\varphi(1) < 0$ 不成立.由于

$$\frac{xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2} = \left[\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\right]',\quad x \neq 0,$$

所以作辅助函数

$$F(x) = \begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}, & x \neq 0. \\ 0, & x = 0\end{cases}$$

因为

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1} = f(0) = 0 = F(0),$$

所以 $F(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且

$$F(1) = \frac{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}{1} = 0 = F(0).$$

故由罗尔定理可知,至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使得 $F'(\xi) = 0$,即 $\xi f(\xi) = \int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

**【例 5.5】**设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$. 证明:至少存在一点 $\xi \in (0,+\infty)$,使得 $f(\xi) + \xi = 0$.

**【证】**将欲证等式中的 $\xi$ 改为 $x$,作辅助函数 $F(x) = f(x) + x$,于是有

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) + x]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2} < 0,$$

所以由积分中值定理,存在 $a \in [0,1]$,使$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = (1-0)F(a) < 0$,即 $F(a) < 0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+x}{x}=0+1=1$，所以由极限的保号性，存在 $b>a$，使 $\dfrac{F(b)}{b}>0$，即 $F(b)>0$.

因此，由零值定理可知，至少存在 $\xi\in(a,b)\subset(0,+\infty)$，使得

$$F(\xi)=0,\qquad 即\ f(\xi)+\xi=0.$$

**【例 5.6】** 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. 证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$.

**【分析】** 将欲证等式中的 $\xi$ 改为 $x$，则 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

**【证】** 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(0)=0$，$F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，可知零值定理不易验证.

改令 $F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则由

$$\int_0^x F'(u)\mathrm{d}u=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$\Rightarrow F(u)\Big|_0^x=u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

$$\Rightarrow F(x)-F(0)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

得

$$F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

显然 $F(x)$ 在$[0,1]$上可导，且

$$F(0)=0,\qquad F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=0,$$

即 $F(x)$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理，所以，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$.

**【例 5.7】** 证明方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

**【分析】** 由原方程可推出 $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$. 令

$$f(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c),$$

$$f(0)=-(a+b+c),\quad f(1)=3a+2b+c.$$

显然零值定理不易验证.

改令 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$，则

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x.$$

**【证】** 作辅助函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$，显然 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=0$，则 $f(x)$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理，所以至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$，即方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

## 题型二　证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理

**提示** 验证定理的正确性，主要有两点：

(1) $f(x)$ 满足某中值定理的条件；

(2) 若条件满足,找出定理结论中的 $\xi$ 值.

【例 5.8】验证 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$ 在[0,2]上满足拉格朗日中值定理,并求满足拉格朗日中值定理的 $\xi$ 值.

【证】(1) 显然 $\dfrac{3-x^2}{2}$,$\dfrac{1}{x}$ 分别在[0,1)和(1,2]上连续,又

$$f_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=1=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=f_+(1)=f(1),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,因此 $f(x)$ 在[0,2]上连续.

(2) 当 $x<1$ 时,$f'(x)=\left(\dfrac{3-x^2}{2}\right)'=-x$;当 $x>1$ 时,$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

又
$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^2}{2(x-1)}=-1,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1,$$

所以 $f'(1)=-1$,即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,因此 $f(x)$ 在(0,2)内可导,且

$$f'(x)=\begin{cases}-x, & 0<x\leqslant1\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1<x<2\end{cases}.$$

由(1),(2)可知,$f(x)$ 在[0,2]上满足拉格朗日中值定理的条件,因而存在 $\xi\in(0,2)$,使

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(\xi),\text{即 } f'(\xi)=-\frac{1}{2}.$$

当 $0<\xi\leqslant1$ 时

$$f'(\xi)=-\xi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\xi=\frac{1}{2},$$

当 $1<\xi<2$ 时

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\xi=\sqrt{2}.$$

故满足拉格朗日中值定理的 $\xi$ 为 $\dfrac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

## 题型三　证明某个函数恒等于一个常数的命题

提示 利用拉格朗日中值定理的推论,即若 $f'(x)=0,x\in[a,b]$,则 $f(x)=C,x\in[a,b]$ ($C$ 是常数).

【例 5.9】证明:$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$(当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时).

【证】令 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$,则

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}.\quad①$$

因为 $|x|<\dfrac{1}{2}$,所以 $0<1-4x^2\leqslant1$,则由式①可推得

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

所以 $f(x)=C$，令 $x=0\Rightarrow C=\pi$，故

$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi,\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

**【例 5.10】** 设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，$f(a)=b$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数. 证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=ab.$$

**【分析】** 因为 $b=f(a)$，则结论等价为

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{f(a)} g(x)\mathrm{d}x=af(a).$$

**【证】** 将上式中的 $a$ 改为 $x$，则令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t-xf(x),$$

$$F'(x)=f(x)+g(f(x))f'(x)-f(x)-xf'(x)=xf'(x)-xf'(x)=0.$$

则 $F(x)=C$. 令 $x=0\Rightarrow C=0$（因为 $f(0)=0$），则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t-xf(x)=0.$

将 $x=a$ 代入上式得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=ab.$$

## 题型四　命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明

**提示** **方法 1**　验证 $\xi$ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点，利用极值存在的必要条件或费尔马定理可得证.

**方法 2**　验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在包含 $x=\xi$ 于其内的区间上满足罗尔定理条件.

**方法 3**　利用泰勒公式.

**【例 5.11】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$. 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

**【证】** 不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$，于是

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由极限保号性可知，存在一个 $\delta_1>0$. 当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow f(x)>f(a). \tag{②}$$

同理，有

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,$$

由极限保号性可知，存在一个 $\delta_2>0$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow f(x)>f(b). \tag{③}$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值. 由式 ②、式 ③ 可知，最大值只能在 $(a,b)$ 内取得.

令 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，又 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处可导，故由费尔马定理可知，$f'(\xi)=0$.

【例 5.12】设 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导,又 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$. 证明:存在一点 $\xi\in(0,3)$,使得 $f'(\xi)=0$.

【证】由题设可知,$f(x)$ 在$[0,2]$上连续,所以 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, $m,M$ 分别是 $f(x)$ 在$[0,2]$上的最小值和最大值,于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,\quad m\leqslant f(1)\leqslant M,\quad m\leqslant f(2)\leqslant M.$$

则
$$3m\leqslant f(0)+f(1)+f(2)\leqslant 3M\Rightarrow m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由介值定理可知,存在一点 $\eta\in[0,2]$,使得 $f(\eta)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$;又 $f(3)=1$,可知,$f(x)$ 在$[\eta,3]$上满足罗尔定理,故存在一点 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$,使得 $f'(\xi)=0$.

【例 5.13】设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内二阶可导,$f(0)=f(1)$, $f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x$. 证明:存在一点 $\xi\in(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【证】因为 $f(0)=f(1)$,可知 $f(x)$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理,于是存在一点 $\xi_1\in(0,1)$,使得 $f'(\xi_1)=0$.

又
$$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x=2\left(\frac{3}{2}-1\right)f(\eta)=f(\eta)\quad(\text{积分中值定理})\left(\eta\in\left(1,\frac{3}{2}\right)\right).$$

由上式可知,$f(x)$ 在$[\eta,2]$上满足罗尔定理,于是存在一点 $\xi_2\in(1,2)$,使得 $f'(\xi_2)=0$. 由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, $f'(x)$ 在$(0,2)$内可导,可知 $f'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上满足罗尔定理,故存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【例 5.14】设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$. 证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【证】令 $F(x)=f(x)-g(x)$,则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内具有二阶导数且 $F(a)=F(b)=0$.

(1) 若 $f(x)$, $g(x)$ 在$(a,b)$内同一点 $c$ 取得最大值,则 $f(c)=g(c)\Rightarrow F(c)=0$,于是由罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$,使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

再利用罗尔定理可知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(2) 若 $f(x)$, $g(x)$ 在$(a,b)$内不同点 $c_1$, $c_2$ 取得最大值,则 $f(c_1)=g(c_2)=M$,于是

$$F(c_1)=f(c_1)-g(c_1)>0,\quad F(c_2)=f(c_2)-g(c_2)<0.$$

于是由零值定理可知,存在 $c_3\in(c_1,c_2)$,使得 $F(c_3)=0$.

由罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(a,c_3)$, $\xi_2\in(c_3,b)$,使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

再利用罗尔定理可知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

**题型五 欲证结论:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k\neq0)$ 或由 $a$, $b$, $f(a)$, $f(b)$, $\xi$, $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $\cdots$, $f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立**

**提示** (1) 作辅助函数 $F(x)$;

(2) 验证 $F(x)$ 满足罗尔定理.

辅助函数 $F(x)$ 的作法如下.

**1. 原函数法(也称微分方程法)**

具体步骤如下.

(1) 将欲证结论中的 $\xi$ 改成 $x$；

(2) 将式子写成容易去掉一次导数符号的形式(即容易积分的形式)；

(3) 去掉一次导数符号(即作一次积分)，移项，使等式一端为“0”，另一端即为新作辅助函数 $F(x)$(为简便，积分常数取“0”).

对于拉格朗日中值定理：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

两边积分得 $f(x)+C=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，令 $C=0$，并移项得

$$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x=0,$$

则辅助函数为 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

对于柯西中值定理：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\xlongequal{令\ \xi=x}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

两边积分得 $f(x)+C=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$，令 $C=0$，并移项得

$$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)=0,$$

则辅助函数为 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$.

**2. 常数 $k$ 值法**

此法适用于常数部分可被分离出的命题. 构造辅助函数的步骤如下.

(1) 令常数部分为 $k$；

(2) 作恒等变形，使上述等式一端为 $a$ 及 $f(a)$ 构成的代数式，另一端为 $b$ 及 $f(b)$ 构成的代数式；

(3) 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式. 若是，只要把 $a$(或 $b$) 改成 $x$，相应的函数值 $f(a)$(或 $f(b)$) 改成 $f(x)$，则代换变量后的端点表达式就是所求的辅助函数 $F(x)$.

如：对于拉格朗日中值定理 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，令

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k\Rightarrow f(b)-f(a)-k(b-a)=0$$

$$\Rightarrow f(b)-kb=f(a)-ka,$$

则令 $F(x)=f(x)-kx=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ (令一端常数值为 $x$).

**【例 5.15】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，$f(a)=0$，$a>0$. 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

【分析】将欲证等式中的 $\xi$ 改为 $x$，则

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)\Rightarrow f(x)=\frac{b-x}{a}f'(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{b-x}.$$

上式两边积分 $\Rightarrow \ln f(x)=-a\ln(b-x)+C\Rightarrow(b-x)^a f(x)=C.$

【证】作辅助函数 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，则 $F(a)=0,F(b)=0$，于是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理，所以存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

【例 5.16】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导. 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

【分析】令 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=k\Rightarrow bf(b)-kb=af(a)-ka$ 为轮换对称式.

【证】令 $F(x)=xf(x)-kx=xf(x)-\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}x$，则

$$F(b)-F(a)=bf(b)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}b-af(a)+\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}a=0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，即存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

【例 5.17】设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f'(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. 试证：至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

【分析】欲证结论可写为

$$f''(\xi)(1-2\xi)-2f'(\xi)=f'(\xi),$$

令 $\xi=x$，则上式为

$$f''(x)(1-2x)-2f'(x)=f'(x),$$

即
$$[f'(x)(1-2x)]'=f'(x).$$

两边积分得
$$f'(x)(1-2x)=f(x)+C,$$

令 $C=0$，并移项得

$$f'(x)(1-2x)-f(x)=0,$$

则令辅助函数为 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$.

【证】作辅助函数 $F(x)=f'(x)(1-2x)-f(x)$. 显然，$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内可导，且

$$F(0)=f'(0)(1-0)-f(0)=0,$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

所以，$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上满足罗尔定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f''(\xi)(1-2\xi)-3f'(\xi)=0$，亦即 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

【例 5.18】设 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，且 $0<x_1<x_2$，试证：在 $(x_1,x_2)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

**【分析】** 令 $\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = k \Rightarrow \frac{f(x_2)-k}{x_2} = \frac{f(x_1)-k}{x_1}$ （对称式）.

故所作辅助函数 $F(x)$ 为

$$F(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}\frac{1}{x}.$$

**【证】** 略.

## 题型六　欲证结论：在 $(a,b)$ 内至少存在两点 $\xi,\eta(\xi\neq\eta)$ 满足某个代数式

**提示** **证明方法**　用两次拉格朗日中值定理；或者用一次拉格朗日中值定理，用一次柯西中值定理；或者用两次柯西中值定理.

证明中的辅助函数的作法不同于题型五，而是利用分离变量法，使等式一端只含有 $\xi$ 的代数式，另一端只含有 $\eta$ 的代数式，结合原函数法稍加分析 $\xi,\eta$ 的代数式，即可看出该作什么样的辅助函数.

**【例 5.19】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，$f(a)=f(b)=1$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

**【分析】** $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1\Rightarrow e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}\Rightarrow[e^x f(x)]'_{x=\eta}=e^{\xi}$.

**【证】** (1) $F(x)=e^x f(x)$，则由拉格朗日中值定理，存在一个 $\eta\in(a,b)$，使得

$$F'(\eta)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a},\tag{④}$$

即 $\quad e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}$ (因为 $f(b)=f(a)=1$).

(2) 又令 $\varphi(x)=e^x$，则由拉格朗日中值定理，存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a},\quad 即\ e^{\xi}=\frac{e^b-e^a}{b-a}.\tag{⑤}$$

由式④、式⑤可得 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$，即 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

**【例 5.20】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0, b>a>0$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

**【分析】** $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}f'(\eta)=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{2\sqrt{\eta}}}$.

**【证】** 令 $\varphi(x)=\sqrt{x}$，由题设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $\varphi'(x)\neq 0(x\in[a,b])$ 满足柯西中值定理的条件，则存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\eta)}{\varphi'(\eta)},$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{2\sqrt{\eta}}}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=2\sqrt{\eta}f'(\eta)$$

$$\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2\sqrt{\eta}f'(\eta)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\tag{⑥}$$

又由拉格朗日中值定理可知,存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{7}$$

所以由式⑥、式⑦得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad (\xi,\eta \in (a,b)).$$

**【例 5.21】** 已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f(\xi) = 1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta \in (0,1)$,使得 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta) = 1$.

**【证】** (1) 令 $F(x) = f(x)+x-1$,即要证明 $F(x)=0$ 在$(0,1)$内有实根.

由于 $F(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $F(0)\cdot F(1) = [f(0)-1]f(1) = -1 < 0$,所以由零值定理,存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi) = 1-\xi$.

(2) 利用(1)的结果,对 $f(x)$ 在$[0,\xi]$上应用拉格朗日中值定理可知,存在 $\eta \in (0,\xi)$,使得

$$f'(\eta) = \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi} = \frac{1-\xi}{\xi}, \tag{8}$$

对 $f(x)$ 在$[\xi,1]$上应用拉格朗日中值定值可知,存在 $\zeta \in (\xi,1)$,使得

$$f'(\zeta) = \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi} = \frac{\xi}{1-\xi}, \tag{9}$$

于是,由式⑧、式⑨得 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta) = 1$.

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

> **思维定势 1**　在题设条件中函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$,要立刻想到先用拉格朗日中值定理处理.

**【例 5.22】** 设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=\frac{1}{3}$,证明:存在 $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$,$\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

**【分析】** $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2 \Rightarrow [f'(\xi)-\xi^2]+[f'(\eta)-\eta^2]=0$

$$\Rightarrow \left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'_{x=\xi} + \left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'_{x=\eta} = 0.$$

**【证】** 设 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$,则 $F(0)=0$,$F(1)=0$,且 $F(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$内可导. 对 $F(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2},1\right]$上运用拉格朗日中值定理得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=F'(\xi)\left(\frac{1}{2}-0\right),\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \tag{1}$$

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=F'(\eta)\left(1-\frac{1}{2}\right),\ \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right). \tag{2}$$

①+②得

$F'(\xi)+F'(\eta)=0$，即 $f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$，

亦即
$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

**思维定势 2** 题设条件中出现 $0\leqslant\theta(x)\leqslant 1$ 时，要立刻想到或者用拉格朗日中值定理[$f(x)$ 一阶可导]或者用泰勒公式[$f(x)$ 二阶或二阶以上可导]来处理.

**【例 5.23】** 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，证明：

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

**【证】** (1) 由拉格朗日中值定理，对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$.

又因为 $f''(x)$ 连续且 $f''(x)\neq 0$，所以，在 $(-1,1)$ 内 $f''(x)>0$(或 $<0$)，即 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调增加(或单调减少)，于是，$\theta(x)$ 是唯一的.

(2) 再由拉格朗日中值定理，在 0 与 $\theta(x)x$ 之间存在 $\xi$，使得
$$f'(\theta(x)x)=f'(0)+f''(\xi)\cdot\theta(x)x,$$
代入 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 得
$$f(x)=f(0)+xf'(0)+f''(\xi)\cdot\theta(x)\cdot x^2,$$
于是
$$\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\cdot\frac{1}{f''(\xi)},$$
所以
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\theta(x)&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\cdot\frac{1}{f''(\xi)}\right]\\&=\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\\&=\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\text{(洛必达法则)}\\&=\frac{1}{f''(0)}\cdot\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**思维定势 3** 题设条件中函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，要立刻想到先把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

**【例 5.24】** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，证明：$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

**【证】** 由题设可知，存在正常数 $M_0,M_2$，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有
$$|f(x)|\leqslant M_0,\ |f''(x)|\leqslant M_2.$$
由泰勒公式有
$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(\xi),\ x<\xi<x+1,$$
于是有
$$f'(x)=f(x+1)-f(x)-\frac{1}{2}f''(\xi),$$
$$|f'(x)|\leqslant|f(x+1)|+|f(x)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|\leqslant 2M_0+\frac{1}{2}M_2.$$

所以函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

**【例 5.25】** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，$f(0)=f(1)=0$，并且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\leqslant A$，求证：$|f'(x)|\leqslant\dfrac{A}{2}$，$x\in[0,1]$.

**【证】** 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.\ (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

取 $x=0, x_0=x$，则

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(0-x)^2, 0<\xi_1<x\leqslant 1, \quad ③$$

取 $x=1, x_0=x$，则

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1-x)^2, 0\leqslant x<\xi_2<1. \quad ④$$

④ − ③ 得

$$\begin{aligned}f'(x)&=f(1)-f(0)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]\\&=\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].\end{aligned}$$

又当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\leqslant A$，则

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1),$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$2x^2-2x+1=2x(x-1)+1\leqslant 1$，

因此，$|f'(x)|\leqslant\dfrac{A}{2}$，$x\in[0,1]$.

## 二、综合题解析

**【例 5.26】** 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{\cos\pi x}=0$，$2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$.

证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

**【分析】** 先由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{\cos\pi x}=0$ 推得 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，以及由 $2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$ 推得存在 $\eta\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，使得 $f'(\eta)=0$. 然后由罗尔定理即可得证存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

**【解】** 由题设得

$$0=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\xlongequal{\text{令 } t=x-\frac{1}{2}}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(t+\frac{1}{2}\right)}{-\sin\pi t}.$$

由此可得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}f\left(t+\dfrac{1}{2}\right)=0$，并且

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(t+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f\left(t+\frac{1}{2}\right)}{-\sin\pi t}\cdot\frac{-\sin\pi t}{t}\right]=0\cdot(-\pi)=0. \quad ⑤$$

另一方面，由题设 $2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$ 及积分中值定理知，存在 $\eta_1\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，使 $f(\eta_1)=$

$f(2)$. 于是对 $f(x)$ 在$[\eta_1,2]$上应用罗尔定理得,存在 $\eta_2\in(\eta_1,2)$,使

$$f'(\eta_2)=0\quad\left(显然\ \eta_2>\frac{1}{2}\right).\qquad ⑥$$

由式⑤式⑥,对 $f'(x)$ 在$\left[\frac{1}{2},\eta_2\right]$上应用罗尔定理知,存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},\eta_2\right)\subset(0,2)$,使$f''(\xi)=0$.

注 欲证存在 $\xi\in(0,2)$, 使 $f''(\xi)=0$, 通常是先在$(0,2)$上寻找两个不同的点 $x_1$, $x_2\left(如本题题解中的\ x_1=\frac{1}{2},x_2=\eta_2\right)$,使 $f'(x_1)=f'(x_2)$,然后应用罗尔定理. 这是解这类问题的常用方法.

**【例 5.27】** 设 $y=f(x)$ 是$[0,1]$上的非负连续函数.

(1) 证明至少存在一点 $x_0\in(0,1)$,使得在$[0,x_0]$上,以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于$[x_0,1]$上以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(2) 又设 $f(x)$ 在$(0,1)$内可导,且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的 $x_0$ 是唯一的.

**【分析】** (1) 根据题设知,要证存在 $x_0\in(0,1)$,使得

$$x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1f(x)\mathrm{d}x=0.$$

为此引入辅助函数 $F(x)=xf(x)-\int_x^1f(t)\mathrm{d}t$,并应用微分中值定理.

(2) 由题设 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$ 推得 $F'(x)>0$,由此证明(1)中的 $x_0$ 是唯一的.

**【解】** (1) 由题意知,本题即证至少存在一点 $x_0\in(0,1)$,使得

$$x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1f(x)\mathrm{d}x=0.\qquad ⑦$$

据此记 $F(x)=xf(x)-\int_x^1f(t)\mathrm{d}t=\left(-x\int_x^1f(t)\mathrm{d}t\right)'$. 由于 $\varphi(t)=-x\int_x^1f(t)\mathrm{d}t$ 在$[0,1]$上满足罗尔定理条件,所以至少存在一点 $x_0\in(0,1)$,使得

$$\varphi'(x_0)=0,即\ F(x_0)=0.$$

从而至少存在一点 $x_0\in(0,1)$,使得⑦式成立.

(2) 由于对于 $x\in(0,1)$ 有

$$F'(x)=\left(xf(x)-\int_x^1f(t)\mathrm{d}t\right)'=2f(x)+xf'(x)$$

$$=x\left(\frac{2f(x)}{x}+f'(x)\right)>0\quad\left(利用条件\ f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}\right),$$

所以 $F(x)$ 在$(0,1)$内单调增加. 从而(1)中求得的 $x_0$ 是方程 $F(x)=0$ 在$(0,1)$内的唯一的根,即存在唯一的 $x_0\in(0,1)$,使得

$$x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1f(x)\mathrm{d}x=0.$$

## 习　题　五

**1.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,$C_i(i=1,2,3,\cdots,n)$为任意正数,则在$(a,b)$内至少存在一个$\xi$,使 $f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$.

**2.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$，试证在$(a,b)$内至少存在一个 $\xi$，使 $f(\xi)=\xi$.

**3.** 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，证明：在$[0,1]$上，至少存在一个 $\xi$，使得 $f(\xi)=\xi$.

**4.** 设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，而且 $f(a)<g(a), f(b)>g(b)$，则在$(a,b)$内存在一个 $\xi$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

**5.** 证明方程 $x^5-3x-2=0$ 在$(1,2)$内至少有一个实根.

**6.** 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上可微，对于$[0,1]$上每一个 $x$，函数 $f(x)$ 的值都在开区间$(0,1)$内，且 $f'(x)\neq 1$，证明：在$(0,1)$内有且仅有一个 $x$，使 $f(x)=x$.

**7.** 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，证明：在$(0,1)$内存在一个 $\xi$，使 $f'(\xi)=0$.

**8.** 设函数 $f(x)$ 在$[1,2]$上有二阶导数，且 $f(1)=f(2)=0$，又 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，证明：在$(1,2)$内至少存在一个 $\xi$，使 $F''(\xi)=0$.

**9.** 设 $f(x)$ 在$[0,x](x>0)$上连续，在$(0,x)$内可导，且 $f(0)=0$，试证：在$(0,x)$内存在一个 $\xi$，使

$$f(x)=(1+\xi)\ln(1+x)f'(\xi).$$

**10.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，且 $ab>0$，试证：存在一个 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]\xi^{n-1}\quad(n\geqslant 1).$$

**11.** 设 $f(x), g(x), h(x)$ 在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，证明：存在一个 $\xi\in(a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0.$$

**12.** 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，试证：至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

**13.** 设 $f(x)$ 在$[x_1,x_2]$上可导，且 $0<x_1<x_2$，证明：在$(x_1,x_2)$内至少存在一个 $\xi$，使

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x_1} & \mathrm{e}^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-f'(\xi).$$

**14.** 若 $x_1x_2>0$，证明，存在一个 $\xi\in(x_1,x_2)$ 或 $(x_2,x_1)$，使

$$x_1\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_1}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}(x_1-x_2).$$

**15.** 函数 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且 $f(a)=f(b)=0, g(x)\neq 0$，试证：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)g(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$.

**16.** 设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，试证：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

**17.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内有二阶连续导数，试证：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

**18.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续$(0<a<b)$，在$(a,b)$内可导，证明：在$(a,b)$内，$\exists\,\xi,\eta$，使

$$f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}.$$

**19.** 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$

**20.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0$. 试证：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

## 参考答案

**1.** 提示：利用最值定理和介值定理证明.

**2.** 提示：作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，然后用零值定理证明.

**3.** 提示：作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，然后用零值定理证明.

**4.** 证明：假设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(a)=f(a)-g(a)<0$，$F(b)=f(b)-g(b)>0$，于是由介值定理在 $(a,b)$ 内至少存在一个 $\xi$，使 $f(\xi)=\xi$.

**5.** 提示：作辅助函数 $f(x)=x^5-3x-2$，然后用零值定理证明.

**6.** 提示：作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，然后用零值定理证明存在性. 唯一性利用函数的单调性证. 因为 $F'(x)=f'(x)-1\neq 0$，所以函数 $F(x)$ 要么单增要么单减.

**7.** 提示：利用积分中值定理和罗尔定理.

**8.** 提示：利用两次罗尔定理.

**9.** 提示：作辅助函数 $g(x)=\ln(1+x)$，对 $f(x)$，$g(x)$ 使用柯西中值定理.

**10.** 提示：作辅助函数 $F(x)=x^n f(x)$，对 $F(x)$ 使用拉格朗日中值定理.

**11.** 提示：作辅助函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f(x) & g(x) & h(x)\end{vmatrix}$，对 $F(x)$ 使用罗尔定理.

**12.** 提示：作辅助函数 $F(x)=(1-x)^2 f'(x)$，利用罗尔定理证明.

**13.** 提示：作辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，对 $F(x)$，$e^x$ 使用柯西中值定理.

**14.** 提示：作辅助函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，对 $f(x)$，$g(x)$ 使用柯西中值定理.

**15.** 提示：作辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，利用罗尔定理证明.

**16.** 提示：作辅助函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a)\\ f(x) & g(x)\end{vmatrix}$，利用拉格朗日中值定理证明.

**17.** 提示：利用泰勒定理、最值定理和介值定理证明.

**18.** 提示：对 $f(x)$ 使用一次拉格朗日中值定理，对 $f(x)$，$\dfrac{1}{x}$ 使用一次柯西中值定理.

**19.** 提示：作辅助函数 $F(x)=e^x f(x)$，对 $F(x)$ 使用一次拉格朗日中值定理；对 $e^x$ 使用一次拉格朗日中值定理.

**20.** 提示：对 $f(x)$ 用一次拉格朗日中值定理，对 $f(x)$，$e^x$ 使用一次柯西中值定理.

# 第六章　常微分方程

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、基本概念

**1. 微分方程**

微分方程 ≜ 含有自变量,未知函数及未知函数导数或微分的方程.

常微分方程 ≜ 未知函数是一元函数的微分方程.

其一般形式为　　$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$　　①

标准形式为　　$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$　　②

**2. 微分方程的阶**

方程的阶 ≜ 微分方程中未知函数的导数或微分的最高阶数.

**3. 微分方程的解**

如果函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程 ① 或方程 ② 后,使之成为恒等式,即

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0,$$

或者　　$\varphi^{(n)}(x)\equiv f[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x)],$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程 ① 或方程 ② 的显式解.

如果由方程 $G(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程 ① 或方程 ② 的解,则称 $G(x,y)=0$ 为方程 ① 或方程 ② 的隐式解.

方程 ① 或 ② 的通解 ≜ 含有 $n$ 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$.

方程 ① 或方程 ② 的特解 ≜ 不含任意常数或者通解中任意常数已被定解条件确定出来的解.

初始条件 ≜ 确定方程 ① 或方程 ② 通解中 $n$ 个任意常数的条件:

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

### 二、二阶线性微分方程解的结构

二阶线性方程的一般形式:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x).　　③$$

当 $f(x)=0$ 时,方程 ③$\Rightarrow y''+p(x)y'+q(x)y=0,$　　④

方程 ④ 称为方程 ③ 对应的齐次方程.

**定理 1**　设 $y_1(x),y_2(x)$ 是齐次方程 ④ 的两个线性无关的解$\left(即\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq k\right)$,则

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是齐次方程④的通解.其中,$C_1, C_2$ 是任意常数.

**定理 2** 设 $y_1^*(x)$ 是方程③的一个特解,$y_1(x), y_2(x)$ 是方程③对应的齐次方程④的两个线性无关的解,则方程③的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x).$$ 其中,$C_1, C_2$ 为任意常数.

**定理 3** 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为非齐次方程③的两个相异的特解,则 $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ 为方程③对应的齐次方程④的解.

**定理 4** 设 $y_1(x), y_2(x)$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的两个特解,则 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 为方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$ 的解.

$n$ 阶方程:$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + q(x)y = f(x)$, ③′

对应的齐次方程:$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + q(x)y = 0$. ④′

其解的结构与二阶方程类似.

**【例 6.1】** 设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均是二阶非齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的解,$C_1, C_2$ 是任意常数,则该非齐次方程的通解是

(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$.

(B) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$.

(C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$.

(D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$. 【 】

**【解】** (A) 因为 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 不是对应齐次方程的通解,

所以 $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$ 不是该非齐次方程的通解.

(B) $C_1 y_1 - C_2 y_2 - C_1 y_3 - C_2 y_3 = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3)$

是对应的齐次方程的通解,但没有特解,故给出的函数也不是所求的通解.

(C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3 = C_1(y_1 + y_3) + C_2(y_2 + y_3) - y_3$

也不是所求的通解.

(D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3 = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

由定理 2,3 可知就是所求的通解.

**【例 6.2】** 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为二阶常系数线性齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解,则由 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 能构成该方程的通解的充分条件为

(A) $y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x) = 0$.

(B) $y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x) \neq 0$.

(C) $y_1(x)y'_2(x) + y_2(x)y'_1(x) = 0$.

(D) $y_1(x)y'_2(x) + y_2(x)y'_1(x) \neq 0$. 【 】

**【解】** 由(B)可知 $\dfrac{y'_2(x)}{y_2(x)} \neq \dfrac{y'_1(x)}{y_1(x)}$,

即 $\ln y_2(x) \neq \ln y_1(x) + \ln C$,($C$ 为常数)$\Rightarrow \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq C$,

可知 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关，由定理 1 可知，(B) 入选．

## 三、二阶常系数线性微分方程

二阶常系数线性微分方程的方程类型及通解(特解)的形式及其求法见表 6-1.

表 6-1

| 方程类型 | 通解(特解)的形式及其求法 |
| --- | --- |
| 二阶常系数线性齐次方程<br>$y''+py'+qy=0$　　(1)<br>其中，$p$，$q$ 均为常数 | 特征方程：$\lambda^2+p\lambda+q=0$，<br>(i) 当 $\lambda_1$，$\lambda_2$ 为相异的特征根时，方程(1) 的通解为 $y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$<br>(ii) 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，通解为 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$<br>(iii) 当 $\lambda=\alpha\pm i\beta$(复根) 时，通解为 $y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |
| 二阶常系数线性非齐次方程<br>$y''+py'+qy=f(x)$　(2)<br>其中，$p$，$q$ 均为常数 | 通解的求解程序：<br>① 求对应齐次方程的通解 $Y(x)$<br>② 求出(2) 的特解 $y^*(x)$<br>③ 方程(2) 的通解 $y=Y(x)+y^*(x)$<br>方程(2) 特解 $y^*(x)$ 的求法有三种：<br>1°　微分算子法<br>2°　常数变易法<br>3°　待定系数法，见表 6-2 |

二阶常系数非齐次线性方程的非齐次项 $f(x)$ 与特解 $y^*$ 的关系见表 6-2.

表 6-2

| $y''+py'+qy=f(x)$ | 特解 $y^*$ 的形式 |
| --- | --- |
| $f(x)=p_n(x)$<br>其中，$p_n$ 为 $x$ 的 $n$ 次多项式 | 0 不是特征根，$y^*(x)=n$ 次多项式 $R_n(x)$<br>0 是特征方程的单根，$y^*(x)=xR_n(x)$<br>0 是特征方程的重根，$y^*(x)=x^2R_n(x)$ |
| $f(x)=Ae^{\alpha x}$<br>其中，$A$ 为常数 | $\alpha$ 不是特征根，$y^*(x)=Be^{\alpha x}$，$B$ 为常数<br>$\alpha$ 是特征方程的单根，$y^*(x)=Bxe^{\alpha x}$<br>$\alpha$ 是特征方程的重根，$y^*(x)=Bx^2e^{\alpha x}$ |
| $f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}$<br>其中，$p_n$ 为 $x$ 的 $n$ 次多项式 | $\alpha$ 不是特征根，$y^*(x)=R_n(x)e^{\alpha x}$，$R_n(x)$ 为 $n$ 次多项式<br>$\alpha$ 是特征方程的单根，$y^*(x)=xR_n(x)e^{\alpha x}$<br>$\alpha$ 是特征方程的重根，$y^*(x)=x^2R_n(x)e^{\alpha x}$ |
| $f(x)=A\sin wx$ 或 $A\cos wx$<br>其中，$A$，$w$ 均为常数 | $iw$ 不是特征根，$y^*=M\cos wx+N\sin wx$，$M$，$N$ 为常数<br>$iw$ 是特征根，$y^*=x(M\cos wx+N\sin wx)$ |
| $f(x)=Ae^{\alpha x}\sin\beta x$ 或 $Ae^{\alpha x}\cos\beta x$<br>其中 $A$，$\alpha$，$\beta$ 均为常数 | $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，$y^*=e^{\alpha x}(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$<br>$\alpha\pm i\beta$ 是特征根，$y^*=xe^{\alpha x}(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$，$M$，$N$ 为常数 |

## 四、$n$ 阶常系数线性微分方程

### 1. 齐次方程的一般形式

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0, \tag{5}$$

其中，$p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数，其特征方程

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \tag{⑥}$$

的特征根与通解的关系见表 6-3.

表 6-3

| 特征根 | 方程(1)中通解的形式或所含的项 |
|---|---|
| $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为⑥的 $n$ 个相异的实根 | 通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}$ |
| $\lambda=k$ 为⑥的 $m(m\leqslant n)$ 重实根 | 通解中含有的项为 $(C_1+C_2x+\cdots+C_mx^{m-1})e^{kx}$ |
| $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 为⑥的 $m(m<n)$ 重复数根 | 通解中含有的项为 $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_mx^{m-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_mx^{m-1})\sin\beta x]$，其中，$C_i,D_i(i=1,2,\cdots,m)$ 均为常数 |

**2. 非齐次方程的一般形式**

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x), \tag{⑦}$$

其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为常数.

求非齐次方程⑦的特解 $y^*(x)$ 也有三种方法：待定系数法，常数变易法，微分算子法. 这里着重介绍最简便的微分算子法. 为此引进记号：

$$\frac{d}{dx}=D,\quad \frac{d^2}{dx^2}=D^2,\cdots,\frac{d^n}{dx^n}=D^n,$$

于是 $$y'=\frac{dy}{dx}=Dy,y''=\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y,\cdots,y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny,$$

方程 ⑦$\Rightarrow(D^n+p_1D^{n-1}+p_2D^{n-2}+\cdots+p_{n-1}D+p_n)y=f(x)$.

令 $F(D)=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n$，

于是上式 $\Rightarrow F(D)y=f(x)\Rightarrow y^*=\frac{1}{F(D)}f(x)$. ⑧

非齐次方程⑦即⑧中非齐次项 $f(x)$ 与特解 $y^*(x)$ 的关系见表 6-4.

表 6-4

| $f(x)$ 形式 | $y^*(x)$ 表达式 | 附注 |
|---|---|---|
| $f(x)=e^{kx}$ | $y^*(x)=\frac{1}{F(D)}e^{kx}=\frac{1}{F(k)}e^{kx}$，其中 $F(k)\neq 0$，$F(k)$ 为 $F(D)$ 中的 D 用 $k$ 代替所得值 | 若 $F(k)=0$，不妨设 $k$ 为 $F(k)$ 的 $m$ 重根，则 $\frac{1}{F(D)}e^{kx}=x^m\frac{1}{F^{(m)}(D)}e^{kx}=x^m\frac{1}{F^{(m)}(k)}e^{kx}$，其中 $F^{(m)}(D)$ 表示 $F(D)$ 对 D 的 $m$ 阶导数 |
| $f(x)=\sin ax$ 或 $\cos ax$ | $y^*(x)=\frac{1}{F(D^2)}\sin ax=\frac{\sin ax}{F(-a^2)}$，或 $y^*(x)=\frac{1}{F(D^2)}\cos ax=\frac{\cos ax}{F(-a^2)}$，其中 $F(-a^2)\neq 0$ | 若 $F(-a^2)=0$，不妨设 $(-a^2)$ 为 $F(-a^2)$ 的 $m$ 重根，则 $\frac{1}{F(D^2)}\sin ax=x^m\cdot\frac{1}{F^{(m)}(D^2)}\sin ax$，$\frac{1}{F(D^2)}\cos ax=x^m\cdot\frac{1}{F^{(m)}(D^2)}\cos ax$ |

续表

| $f(x)$ 形式 | $y^*(x)$ 表达式 | 附注 |
| --- | --- | --- |
| $f(x)=e^{kx}v(x)$ | $y^*(x)=\frac{1}{F(D)}e^{kx}v(x)=$ $e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}v(x)$ | |
| $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ | (i) 若 $p_n\neq0$，则 $y^*(x)=\frac{1}{F(D)}(a_0x^m+\cdots+a_m)=Q(D)(a_0x^m+\cdots+a_m)$，其中，$Q(D)$ 为 1 除以按升幂排列的 $F(D)$ 的商式，其最高次数取到 $f(x)$ 的次数 $m$<br>(ii) 若 $p_n=0$，则 $y^*(x)=\frac{1}{F(D)}(a_0x^m+\cdots+a_m)'=\frac{1}{DF_1(D)}(a_0x^m+\cdots+a_m)=\frac{1}{D}Q_1(D)(a_0x^m+\cdots+a_m)$，其中，$Q_1(D)$ 为$\frac{1}{F_1(D)}$ 的商式，次数为 $m$ 次 | (i) 商：$\frac{1}{p_n}-\frac{p_{n-1}}{p_n^2}D+\cdots$<br>除式：$p_n+p_{n-1}D+\cdots+D^n$，被除式：$1$<br>$1+\frac{p_{n-1}D}{p_n}+\frac{p_{n-2}D^2}{p_n}+\cdots$<br>$-\frac{p_{n-1}}{p_n}D-\frac{p_{n-2}}{p_n}D^2-\cdots$<br>当商式中出现 D 的最高次数为 $m$ 时除法停止<br>$Q(D)=\frac{1}{p_n}-\frac{p_{n-1}}{p_n}D+\cdots$ 为 D 的 $m$ 次多项式<br>(ii) 商：$\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}^2}D$<br>除式：$p_{n-1}+p_{n-2}D+\cdots+D^{n-1}$，被除式：$1$<br>$1+\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}D+\cdots$<br>$-\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}D-\cdots$<br>$Q_1(D)=\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}^2}D+\cdots$ 为 D 的 $m$ 次多项式 |

注 ① D 表示微分，则 $\frac{1}{D}\cos x=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，积分常数 $C$ 不写！

② $\frac{1}{D^{2n+1}}\sin ax=\frac{1}{D^{2n}D}\sin ax=\frac{1}{(-a^2)^n}\frac{1}{D}\sin ax=(-1)^{n+1}\frac{\cos ax}{a^{2n+1}}$，

$\frac{1}{D^{2n+1}}\cos ax=\frac{1}{D^{2n}D}\cos ax=\frac{1}{(-a^2)^n}\frac{1}{D}\cos ax=(-1)^n\frac{\sin ax}{a^{2n+1}}$，

$\frac{1}{kD+b}\sin ax=\frac{(kD-b)}{k^2D^2-b^2}\sin ax=\frac{(kD-b)}{k^2(-a^2)-b^2}\sin ax=-\frac{1}{k^2a^2+b^2}(ka\cos ax-b\sin ax)$，

$\frac{1}{kD+b}\cos ax=\frac{(kD-b)}{(kD+b)(kD-b)}\cos ax=\frac{1}{k^2a^2+b^2}(ka\sin ax+b\cos ax)$.

**【例 6.3】**已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次常系数微分方程的三个解，求此微分方程及其通解.

**【解】**由线性微分方程的解的结构定理可得

$$y_1-y_3=e^{-x},y_1-y_2=e^{2x}-e^{-x},(y_1-y_3)+(y_1-y_2)=e^{2x}$$

是该方程对应的齐次方程的解，由解 $e^{-x}$ 与 $e^{2x}$ 的形式，可得齐次方程的特征方程的特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$，则特征方程为 $\lambda^2-\lambda-2=0$，即齐次方程为 $y''-y'-2y=0$.

设该方程为 $y''-y'-2y=f(x)$，代入 $y_1=xe^x+e^{2x}$，得 $f(x)=(1-2x)e^x$. 所以该方程为

$$y''-y'-2y=(1-2x)e^x,$$

其通解为 $$C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x+e^{2x}.$$

## 第2节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　一阶微分方程的计算

提示　一阶微分方程的解题程序：

(1) 审视方程，判断方程类型；

(2) 根据不同类型，确定解题方案；

(3) 若方程的求解最终化为分离变量型的，则作适当变换；若最终化为全微分型的，则找出适当的积分因子；

(4) 做变量替换后得出的解，最后一定要还原为原变量.

方程类型与其通解结构见表6-5.

表6-5

| 方程类型 | 通解(或求通解的方法) |
|---|---|
| (1) 可分离变量方程：<br>$f_1(x)g_1(y)\mathrm{d}x+f_2(x)g_2(y)\mathrm{d}y=0$ | 两边同除 $g_1(y)f_2(x)\neq 0$，得 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\mathrm{d}y=0$，<br>$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\mathrm{d}y=C$ |
| (2) 齐次方程：<br>$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ | 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux,y'=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，<br>于是，原方程 $\Rightarrow u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)$<br>$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\ln x+C$ |
| (3) 可以化为齐次型的方程：<br>$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ | 1° 当 $c_1=c_2=0$ 时，<br>$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$，属于(2)<br>2° $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0$，即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$，则<br>$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=g(a_2x+b_2y)$<br>令 $a_2x+b_2y=u$，则<br>$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2g(u)$，属于(1)<br>3° $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$，$c_1,c_2$ 不全为0，<br>解方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$，求交点 $(\alpha,\beta)$，<br>令 $x=X+\alpha,y=Y+\beta$，则原方程 $\Rightarrow$<br>$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\varphi(\frac{Y}{X})$，属于(2) |

续表

| 方程类型 | 通解(或求通解的方法) |
| --- | --- |
| (4) 一阶线性方程：<br>$y'+p(x)y=q(x)$ | 用常数变易法求<br>1° 求对应齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的通解<br>$y=Ce^{-\int p(x)dx}$<br>2° 令原方程的解为 $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$<br>3° 代入原方程整理得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$<br>$\Rightarrow C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$<br>4° 原方程通解 $y=\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]e^{-\int p(x)dx}$ |
| (5) 伯努利方程*：<br>$y'+p(x)y=q(x)y^n$，<br>其中 $n\neq 0,1$ | 令 $z=y^{1-n}$，则方程 $\Rightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$，<br>$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$，属于(4) |
| (6) 全微分方程*：<br>$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$<br>为全微分方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ | 通解为 $\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=C$ |

**【例 6.4】**求解下列微分方程：

(1) $f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$；　　(2) $xy'-y[\ln(xy)-1]=0$；

(3) $2yy'=e^{\frac{x^2+y^2}{x}}+\frac{x^2+y^2}{x}-2x$.

**提示** 方程中出现 $f(xy),f(x\pm y),f(x^2\pm y^2),f\left(\frac{y}{x}\right)$ 等形式的项时，通常要做相应的变量替换 $u=xy,x\pm y,x^2\pm y^2,\frac{y}{x},\cdots$.

**【解】**(1) 令 $u=xy$，求微分得 $du=xdy+ydx$，代入方程

$$\Rightarrow [f(u)-g(u)]\frac{u}{x}dx+g(u)du=0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=0$$

$$\Rightarrow \ln x+\int\frac{g(u)du}{u[f(u)-g(u)]}=C.$$

**注** $\int\frac{dx}{x}$ 可写成 $\ln|x|+C$，也可写成 $\ln x+C$，当初始条件为 $y(x)|_{x=k(k<0)}=l$ 时，必须写成 $\ln|x|+C$.

(2) 令 $u=xy,u'=y+xy'$，代入原方程得

$$u'-y-y[\ln u-1]=0$$

$$\Rightarrow u'=y\ln u\Rightarrow u'=\frac{u}{x}\ln u$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln\ln u=\ln x+\ln C\Rightarrow \ln u=Cx\Rightarrow \ln(xy)=Cx.$$

(3) 令 $x^2+y^2=u$,则 $2x+2yy'=u'$,

原方程 $\Rightarrow 2x+e^{\frac{u}{x}}+\frac{u}{x}-2x=u' \Rightarrow u'=\frac{u}{x}+e^{\frac{u}{x}}$, ①

再令 $v=\frac{u}{x}$,而 $u=xv, u'=v+xv'$,

代入 ①$\Rightarrow v+xv'=v+e^v \Rightarrow e^{-v}dv=\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow -e^{-v}=\ln x+C \Rightarrow -e^{\frac{x^2+y^2}{x}}=\ln x+C.$

**【例 6.5】**求解下列微分方程:

(1) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$; (2) $\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$;

(3) $y\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)dx=x\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)dy.$

**【解】**(1) 令 $\frac{y}{x}=u, y=ux, dy=udx+xdu$,代入原方程,经整理,得

$\cos u du=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \sin u=-\ln x+C \Rightarrow \sin\frac{y}{x}=-\ln x+C.$

(2) 原方程 $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$,

令 $u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=ux, y'=u+xu'$,代入原方程,得

$$u+xu'=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}\right]du=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(u-1)-\frac{3}{2}\ln(u-2)-\frac{1}{2}\ln u=\ln x+\ln C$$

$$\Rightarrow \frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx \Rightarrow (y-x)^2=Cy(y-2x)^3.$$

(3) 原方程 $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{y}{x}}$,

令 $u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u+xu'$,代入原方程,得

$$u+xu'=u\frac{\cos u+u\sin u}{u\sin u-\cos u}$$

$$\Rightarrow \frac{u\sin u-\cos u}{2u\cos u}du=\frac{dx}{x} \Rightarrow u\cos u=\frac{C}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2} \Rightarrow xy\cos\frac{y}{x}=C.$$

【例 6.6】求解下列微分方程：

(1) $y'=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$；　　(2) $y'=\dfrac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$；

(3) $(x-2\sin y+3)dx-(2x-4\sin y-3)\cos y dy=0$.

【解】(1) 解方程组 $\begin{cases}y-x+1=0\\ y+x+5=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(-2,-3)$，

令 $X=x+2, Y=y+3$ 代入原方程

$$\Rightarrow\frac{dY}{dX}=\frac{Y-X}{Y+X}=\frac{\frac{Y}{X}-1}{\frac{Y}{X}+1},$$

再令 $Y=uX,\dfrac{dY}{dX}=u+X\dfrac{du}{dX}$，

得 $u+X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{u-1}{u+1}\Rightarrow\dfrac{u+1}{u^2+1}du=-\dfrac{dX}{X}$

$\Rightarrow\arctan u+\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln X+C.$

变量还原，得

$$\arctan\left(\frac{y+3}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{y+3}{x+2}\right)^2\right]=-\ln(x+2)+C.$$

(2) 原方程 $\Rightarrow\dfrac{ydy}{xdx}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}\Rightarrow\dfrac{d(y^2)}{d(x^2)}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$，

令 $y^2=\eta, x^2=\xi$，则方程变为 $\dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{2\xi+3\eta-7}{3\xi+2\eta-8}$，　②

解方程组 $\begin{cases}2\xi+3\eta-7=0\\ 3\xi+2\eta-8=0\end{cases}\Rightarrow(\xi,\eta)=(2,1)$，

令 $X=\xi-2, Y=\eta-1$，

代入 ② 得 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{2X+3Y}{3X+2Y}=\dfrac{2+3\frac{Y}{X}}{3+2\frac{Y}{X}}$，　③

再令 $u=\dfrac{Y}{X}$，代入 ③$\Rightarrow\dfrac{3+2u}{2(1-u^2)}du=\dfrac{dX}{X}$.　④

$$\text{对 ④ 式两边积分}\Rightarrow\frac{1+u}{(1-u)^5}=CX^4,$$

变量还原，得　$x^2+y^2-3=C(x^2-y^2-1)^5$.

(3) 原方程 $\Rightarrow(x-2\sin y+3)dx-(2x-4\sin y-3)d(\sin y)=0$，

令 $\sin y=z$，则方程 $\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x-2x+3}{2x-4z-3}$，　⑤

再令 $x-2z=u, 1-2\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{du}{dx}$，

方程 ⑤ $\Rightarrow\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u+3}{2u-3}$

$\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=\dfrac{9}{3-2u}$

$\Rightarrow(3-2u)du=9dx$，

两边积分 $\Rightarrow 3u - u^2 = 9x + C$,

变量还原得 $3(x-2\sin y)-(x-2\sin y)^2 = 9x + C$.

**【例 6.7】** 求解下列微分方程:

(1) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, y(-1) = 0$;

(2) $(x^2 + 2xy - y^2)\mathrm{d}x - (y^2 + 2xy - x^2)\mathrm{d}y = 0, y(1) = 1$;

(3) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0, y(1) = 0$.

**【解】** (1) 令 $u = \dfrac{y}{x}, y = ux, y' = u + xu'$,原方程

$\Rightarrow u + xu' = \dfrac{1}{u} + u \Rightarrow u\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C$,

变量还原 $\Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C$,

将初始条件 $y(-1) = 0$ 代入上式,得 $C = 0$,

故方程的解为 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \ln|x|$.

(2) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{y^2 + 2xy - x^2} = \frac{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1},$$

令 $u = \dfrac{y}{x}$ 则上式 $\Rightarrow u + xu' = \dfrac{1 + 2u - u^2}{u^2 + 2u - 1}$

$\Rightarrow \dfrac{u^2 + 2u - 1}{-1 - 3u + 3u^2 + u^3}\mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ (初始条件变为 $u(1) = 1$)

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}\ln(u^3 + 3u^2 - 3u - 1) = -\ln x + \dfrac{1}{3}\ln C$

$\Rightarrow u^3 + 3u^2 - 3u - 1 = \dfrac{C}{x^3}$,代入初始条件 $u(1) = 1 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow y^3 + 3xy^2 - 3x^2y - x^3 = 0$.

(3) $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$,

令 $\dfrac{y}{x} = u, y = ux, y' = u + xu'$,

代入原方程 $\Rightarrow u + xu' = u + \sqrt{1 + u^2}$ (初始值为 $u(1) = 0$)

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + u^2}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln x + \ln C$

$\Rightarrow u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$,代入初始值 $u(1) = 0 \Rightarrow C = 1$,

故原方程的解为 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$.

**【例 6.8】** 求解下列微分方程:

(1) $(x + 1)y' - ny = (1 + x)^{n+1}e^x\sin x$; (2) $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$;

(3) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

【解】(1) 化为标准方程

$$y' - \frac{n}{x+1}y = (1+x)^n e^x \sin x, \quad ⑥$$

① $y' = \frac{n}{x+1}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{n}{x+1}dx \Rightarrow \ln y = n\ln(x+1) + \ln C$

$\Rightarrow y = C(x+1)^n$.

② 令 $y = C(x)(x+1)^n$ 为方程 ⑥ 的解,代入并整理得

$C'(x)(x+1)^n = (x+1)^n e^x \sin x \Rightarrow C'(x) = e^x \sin x$

$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \tilde{C}$.

③ 原方程的通解 $y = \left[\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \tilde{C}\right](x+1)^n$.

(2) 原方程 $\Rightarrow y' + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + 2\cos^2\frac{y}{2}\cdot x = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}y' + \tan\frac{y}{2} + x = 0 \Rightarrow \left(\tan\frac{y}{2}\right)' + \tan\frac{y}{2} + x = 0$,

令 $\tan\frac{y}{2} = u$,则上式 $\Rightarrow u' + u + x = 0$. ⑦

① $u' + u = 0 \Rightarrow u = Ce^{-x}$.

② 设 $u = C(x)e^{-x}$ 为 ⑦ 的解,代入并整理,得

$C'(x)e^{-x} = -x \Rightarrow C(x) = -xe^x + e^x + \tilde{C}$.

③ 方程 ⑦ 的解 $u = (-xe^x + e^x + \tilde{C})e^{-x}$,

原方程的解 $\tan\frac{y}{2} = \tilde{C}e^{-x} + (1-x)$.

(3) 将 $x$ 看做因变量,$y$ 看做自变量,则原方程

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y. \quad ⑧$$

① $\frac{dx}{dy} = x\cos y \Rightarrow \frac{dx}{x} = \cos y dy \Rightarrow \ln x = \sin y + \ln C \Rightarrow x = Ce^{\sin y}$.

② 令 $x = C(y)e^{\sin y}$ 为方程 ⑧ 的解,代入并整理,得

$C'(y)e^{\sin y} = \sin 2y \Rightarrow C'(y) = 2\sin y\cos y e^{-\sin y}$

$\Rightarrow C(y) = -2(\sin y + 1)e^{-\sin y} + \tilde{C}$.

③ 方程 ⑧ 也即原方程的通解为

$$x = \tilde{C}e^{\sin y} - 2(\sin y + 1).$$

【例 6.9】设 $a,b$ 为正整数,$\lambda$ 为非负数,微分方程 $\frac{dy}{dx} + ay = be^{-\lambda x}$.

(1) 求该方程的通解;

(2) 证明:当 $\lambda = 0$ 时,$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{b}{a}$;

当 $\lambda > 0$ 时,$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

【解】(1) 通解为 $y=e^{-\int a\mathrm{d}x}\left(\int be^{-\lambda x}e^{\int a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=e^{-ax}\left(b\int e^{(a-\lambda)x}\mathrm{d}x+c\right)$

$$=\begin{cases}ce^{-ax}+\dfrac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda x}, & \lambda\neq a,\\ (bx+c)e^{-ax}, & \lambda=a.\end{cases}$$

(2) 当 $\lambda=0$ 时,$y=ce^{-ax}+\dfrac{b}{a}$,所以,$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ce^{-ax}+\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{b}{a}$.

当 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq a$ 时,$y(x)=ce^{-ax}+\dfrac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda x}$,

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(ce^{-ax}+\frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda x}\right)=0,$$

当 $\lambda>0$ 且 $\lambda=a$ 时,$y(x)=(bx+c)e^{-ax}$,

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}(bx+c)e^{-ax}=0.$$

**【例 6.10】** 当 $0\leqslant x\leqslant b$ 时,函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=p(x)f(x)$,$f(0)=a$;函数 $g(x)$ 满足 $g'(x)\geqslant p(x)g(x)$,$g(0)=a$.

证明:$g(x)\geqslant f(x)$,$0\leqslant x\leqslant b$.

【证】令 $F(x)=g(x)-f(x)$,$F(0)=0$,

$$\begin{aligned}F'(x)&=g'(x)-f'(x)\geqslant p(x)g(x)-p(x)f(x)\\&=p(x)[g(x)-f(x)]=p(x)F(x),\end{aligned}$$

即 $F'(x)-p(x)F(x)\geqslant 0$,有

$$[F'(x)-p(x)F(x)]e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}\geqslant 0,$$

即 $[F(x)e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}]'\geqslant 0$. 所以 $G(x)=F(x)e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$ 单调增加.

当 $0\leqslant x\leqslant b$ 时,$G(x)\geqslant G(0)=0$,所以,$F(x)\geqslant 0$,即 $g(x)\geqslant f(x)$,$0\leqslant x\leqslant b$.

**【例 6.11】** 解下列微分方程:

(1) $y'-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$;　　(2) $xy'+2y=3x^3y^{\frac{4}{3}}$;

(3) $xy\mathrm{d}x=(2x^2-y^4)\mathrm{d}y$.

【解】(1) 原方程 $\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{y}}y'-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x$,

令 $\sqrt{y}=z$,于是方程 $\Rightarrow 2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}z=x\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{1}{2}x$. ⑨

① $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}z=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}z}{z}=2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln z=2\ln x+\ln C\Rightarrow z=Cx^2$,

② 令 $z=C(x)x^2$ 为方程 ⑨ 的解,代入并整理,得

$$C'(x)x^2=\frac{1}{2}x\Rightarrow C(x)=\frac{1}{2}\ln x+\tilde{C},$$

③ 原方程的通解为 $\sqrt{y}=\left(\dfrac{1}{2}\ln x+\tilde{C}\right)x^2$.

(2) 原方程 $\Rightarrow y'+\dfrac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}\Rightarrow y^{-\frac{4}{3}}y'+\dfrac{2}{x}y^{-\frac{1}{3}}=3x^2$,

令 $z=y^{-\frac{1}{3}}$,则方程 $\Rightarrow -3z'+\dfrac{2}{x}z=3x^2\Rightarrow z'-\dfrac{2}{3x}z=-x^2$. ⑩

①$z' = \frac{2}{3x}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2}{3x}dx \Rightarrow z = Cx^{\frac{2}{3}}$.

② 设 $z = C(x)x^{\frac{2}{3}}$ 为 ⑩ 的解，代入并整理，得

$$C'(x)x^{\frac{2}{3}} = -x^2 \Rightarrow C(x) = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + \widetilde{C}.$$

③ 原方程的通解为 $y^{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}x^3 + \widetilde{C}x^{\frac{2}{3}}$.

(3) 原方程 $\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -y^3x^{-1} \Rightarrow x\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x^2 = -y^3$, ⑪

令 $z = x^2$，则方程 ⑪$\Rightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{4}{y}z = -2y^3$. ⑫

① $\frac{dz}{dy} = \frac{4}{y}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = 4\frac{dy}{y}$

$\Rightarrow \ln z = 4\ln y + \ln C \Rightarrow z = Cy^4$,

令 $z = C(y)y^4$ 为方程 ⑫ 的解，代入并整理，得

$$C'(y)y^4 = -2y^3 \Rightarrow C(y) = -2\ln y + \widetilde{C},$$

方程 ⑫ 的解为 $z = (-2\ln y + \widetilde{C})y^4$,

原方程的通解为 $x^2 = (-2\ln y + \widetilde{C})y^4$.

**【例 6.12】**设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且 $f(0) > 0$，已知它在 $[0, x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，求 $f(x)$.

**【解】**由题意得

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \sqrt{f(0)f(x)}, \text{令 } a = \sqrt{f(0)},$$

有 $\int_0^x f(t)dt = ax\sqrt{f(x)}$，两边求导，得

$$f(x) = a\sqrt{f(x)} + ax \cdot \frac{1}{2}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}},$$

即 $f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = \frac{2}{ax}[f(x)]^{\frac{3}{2}}$. 令 $z = [f(x)]^{-\frac{1}{2}}$，得

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{ax},$$

可求得 $z = Cx + \frac{1}{a}$，即 $f(x) = \left(Cx + \frac{1}{a}\right)^{-2} = \frac{f(0)}{(1 + C\sqrt{f(0)}x)^2}$ $(C \geqslant 0)$.

**【例 6.13】*** 解下列微分方程：

(1) $(3x^2 + 2xe^{-y})dx + (3y^2 - x^2e^{-y})dy = 0$;

(2) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$;

(3) $2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$.

**【解】**(1) 因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = -2xe^{-y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

所以方程为全微分方程，于是有

$$\int_0^x (3x^2 + 2x)dx + \int_0^y (3y^2 - x^2e^{-y})dy = C,$$

即 $x^3+x^2+y^3+x^2e^{-y}-x^2=C$，亦即

原方程的通解为 $x^3+y^3+x^2e^{-y}=C$.

(2) 因为 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right)=-\frac{6x}{y^4}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}$ （当 $y\neq 0$ 时），

所以方程为全微分方程，于是有

$$\int_0^x \frac{2x}{1^3}dx+\int_1^y \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=C\Rightarrow x^2-\frac{1}{y}\Big|_1^y+\frac{x^2}{y^3}\Big|_1^y=C,$$

故原方程的解为
$$-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}=C.$$

(3) 因为 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)=6xy^2,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2-1)=2xy^2$，

所以方程不是全微分方程.

方程可改写成 $(2xy^3dx+x^2y^2dy)-dy=0$，

用简单的观察法看出积分因子为 $u=\frac{1}{y^2}$，

于是，原方程 $\Rightarrow \frac{2xy^3dx+x^2y^2dy}{y^2}-\frac{dy}{y^2}=0$

$$\Rightarrow d(x^2y)+d\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2y+\frac{1}{y}=C \text{ 为原方程的通解}.$$

**【例 6.14】*** 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(\pi)=1$，又

$$\frac{1}{x}y[\sin x-f(x)]dx+f(x)dy=0,x>0,$$

是全微分方程，求 $f(x)$，并求此全微分方程的通解.

**【解】** 根据已知，有 $\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{x}y[\sin x-f(x)]\right\}=\frac{\partial}{\partial x}f(x)$，即

$$f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{\sin x}{x},x>0,$$

可求得通解为 $f(x)=\frac{1}{x}(-\cos x+C),x>0$.

又 $f(\pi)=1$，得 $C=\pi-1$，所以，$f(x)=\frac{1}{x}(-\cos x+\pi-1),x>0$.

将 $f(x)$ 代入原方程，得

$$\frac{y}{x}\left(\sin x+\frac{\cos x+1-\pi}{x}\right)dx-\frac{\cos x+1-\pi}{x}dy=0,$$

对它进行分项组合得

$$\frac{1}{x^2}[(xy\sin x+y\cos x)dx-x\cos x dy]+\frac{1}{x^2}(1-\pi)(ydx-xdy)$$

$$=d\left(-\frac{y\cos x}{x}\right)+d\left[(\pi-1)\frac{y}{x}\right]=0,$$

所以，原方程的通解为 $-\frac{y\cos x}{x}+(\pi-1)\frac{y}{x}=C$，即

$$y = \frac{Cx}{\pi - 1 - \cos x}.$$

## 题型二　可降阶的高阶方程的求解

提示 可降阶的高阶方程的求解方法见表 6-6.

表 6-6

| 方程类型 | 解法及解的表达式 |
| --- | --- |
| $y^{(n)} = f(x)$ | 通解为 $y = \underbrace{\int\cdots\int}_{n次} f(x)(\mathrm{d}x)^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n$ |
| 不显含 $y$ 的二阶方程 $y'' = f(x, y')$ | 令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，原方程 $\Rightarrow p' = f(x,p)$——一阶方程，设其解为 $p = \varphi(x, C_1)$，即 $y' = \varphi(x, C_1)$，则原方程的通解为 $y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$ |
| 不显含 $x$ 的二阶方程 $y'' = f(y, y')$ | 令 $y' = p$，把 $p$ 看做 $y$ 的函数，则<br>$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，把 $y'$，$y''$ 的表达式代入原方程，<br>得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{p}f(y,p)$——一阶方程，<br>设其解为 $p = \varphi(y, C_1)$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(y, C_1)$，则原方程的通解为<br>$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$. |

【例 6.15】求解下列方程.

(1) $y'' = \frac{1}{x}y' + xe^x\sin x$；　　(2) $y'' = \frac{1 + y'^2}{2y}$；

(3) $y'' = \frac{3x^2y'}{1 + x^3}$，满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 4$；　　(4) $yy'' - y'^2 = y^2\ln y$.

【解】(1) 这是不显含 $y$ 的二阶方程，

令 $y' = p$，则 $y'' = p'$ 代入原方程，得

$$p' = \frac{1}{x}p + xe^x\sin x, \tag{13}$$

① $p' = \frac{1}{x}p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow p = Cx$，

② 令 $p = C(x)x$ 为 ⑬ 的解，代入并整理，得

$C'(x)x = xe^x\sin x \Rightarrow C'(x) = e^x\sin x$

$$\Rightarrow C(x) = \int e^x\sin x\mathrm{d}x + \widetilde{C}_1 = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \widetilde{C}_1,$$

③ 方程 ⑬ 的解为 $p = \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \widetilde{C}_1x$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \widetilde{C}_1x,$$

原方程的解为 $y = \int\left[\frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + \widetilde{C}_1x\right]\mathrm{d}x + \widetilde{C}_2$

$$= \frac{1}{2}\left[-xe^x\cos x + \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)\right] + \frac{1}{2}\tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2.$$

(2) 这是不显含 $x$ 的方程，令 $y' = p, y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，代入方程，得

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1+p^2}{2y} \Rightarrow \frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(1+p^2) = \ln y + \ln C_1$$

$$\Rightarrow 1 + p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 y - 1},$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx \Rightarrow \dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2.$

(3) 这是不显含 $y$ 的方程，令 $y' = p, y'' = p'$，代入原方程，得

$$p' = \frac{3x^2 p}{1+x^3} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$\Rightarrow \ln p = \ln(1+x^3) + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1(1+x^3),$$

将 $p|_{x=0} = 4$ 代入上式，得 $C_1 = 4$，于是

$$\frac{dy}{dx} = 4(1+x^3) \Rightarrow dy = 4(1+x^3)dx \Rightarrow y = x^4 + 4x + C_2,$$

将 $y|_{x=0} = 1$ 代入上式，得 $C_2 = 1$，故所求解为

$$y = x^4 + 4x + 1.$$

(4) 这是不显含 $x$ 的方程，且 $y \neq 0$，

原方程 $\Rightarrow \left(\dfrac{y'}{y}\right)' = \ln y$，即 $(\ln y)'' = \ln y$， ⑭

令 $\ln y = z$，则 ⑭ $\Rightarrow z'' = z$，这是二阶常系数线性齐次方程．

特征方程为 $\lambda^2 = 1$，解得 $\lambda = \pm 1$，则其通解为 $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$，即

$$\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

## 题型三　计算二阶线性微分方程

**【例 6.16】**解下列微分方程：

(1) $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$，其中，$a$ 为实数；

(2) $y'' + a^2 y = \sin x$，其中，$a > 0$，为常数；

(3) $y'' - 4y' + 4y = (1 + x + \cdots + x^{23})e^{2x}$.

**【解】**(1)① 对应的特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$，特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$，对应的齐次方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

② 非齐次方程的一个特解 $y^*$ 为

$$y^* = \frac{1}{D^2 + 4D + 4}e^{ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a \neq -2 \text{ 时} \\ \dfrac{1}{2}x^2 e^{ax}, & a = -2 \text{ 时} \end{cases}.$$

故非齐次方程的通解为

$$y = \begin{cases} (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \dfrac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a \neq -2 \text{ 时} \\ (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^2 e^{-2x}, & a = -2 \text{ 时} \end{cases}.$$

(2)① 特征方程为 $\lambda^2+a^2=0$，特征值 $\lambda=\pm ai$，对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

② 非齐次方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{D^2+a^2}\sin x=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2-1}\sin x, & a\neq 1\\ -\dfrac{1}{2}x\cos x, & a=1\end{cases}.$$

故非齐次方程的通解为

$$y=\begin{cases}C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{1}{a^2-1}\sin x, & a\neq 1\\ C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x, & a=1\end{cases}.$$

(3) 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0\Rightarrow(\lambda-2)^2=0\Rightarrow\lambda=2$(重根)，

对应齐次方程通解为 $y(x)=e^{2x}(C_1+C_2x)$.

非齐次方程特解 $y^*(x)=\dfrac{1}{D^2-4D+4}e^{2x}(1+x+\cdots+x^{23})$

$$=e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-4(D+2)+4}(1+x+\cdots+x^{23})$$

$$=e^{2x}\frac{1}{D^2}(1+x+\cdots+x^{23})$$

$$=e^{2x}\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{25}}{24\cdot 25}\right),$$

故原方程的通解为 $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+e^{2x}\left(\dfrac{x^2}{1\cdot 2}+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{x^{25}}{24\cdot 25}\right)$

**【例 6.17】**解下列微分方程：

(1) $y'''-y=\sin x$；　(2) $y'''+y''+y'+y=\cos 3x$；

(3) $y'''-2y''-3y'=x^2+2x-1$；　(4) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$；

(5) $y''-2y'+2y=xe^x\cos x$.

**【解】**(1) 特征方程 $\lambda^3-1=0$，即 $(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$

$$\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},$$

对应齐次方程的通解为 $y(x)=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

非齐次方程特解为 $y^*(x)=\dfrac{1}{D^3-1}\sin x=\dfrac{1}{D^2\cdot D-1}\sin x$

$$=-\frac{1}{D+1}\sin x=-\frac{D-1}{D^2-1}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x),$$

故原方程通解为 $y(x)=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{1}{2}(\cos x-\sin x)$.

(2) 特征方程为 $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$

$$\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=\pm i,$$

对应齐次方程的通解为 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

非齐次方程的特解为 $y^*(x)=\dfrac{1}{D^3-D^2+D+1}\cos 3x$

$$=\frac{1}{-9D-9+D+1}\cos 3x=-\frac{1}{8}\frac{1}{D+1}\cos 3x$$

$$=-\frac{1}{8}\frac{D-1}{D^2-1}\cos 3x=\frac{1}{80}(-3\sin 3x-\cos 3x),$$

故原方程的通解为 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x-\dfrac{1}{80}(3\sin 3x+\cos 3x)$.

(3) 特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=0\Rightarrow\lambda(\lambda^2-2\lambda-3)=0$

$$\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=3,$$

对应齐次方程通解为 $y(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}$.

非齐次方程特解为 $y^*(x)=\dfrac{1}{D^3-2D^2-3D}(x^2+2x-1)$

$$=\frac{1}{D}\frac{1}{D^2-2D-3}(x^2+2x-1)$$

$$=\frac{1}{D}\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}D-\frac{7}{27}D^2\right)(x^2+2x-1)$$

$$=\left(-\frac{1}{3D}+\frac{2}{9}-\frac{7}{27}D\right)(x^2+2x-1)$$

$$=-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2+\frac{7}{27}x-\frac{20}{27}.$$

故原方程的通解为 $y(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}-\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{7}{27}x-\dfrac{20}{27}$.

(4) 特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0\Rightarrow(\lambda-3)^2=0\Rightarrow\lambda=3$ (重根),

对应齐次方程的通解为 $y(x)=e^{3x}(C_1+C_2x)$.

非齐次方程特解为 $y^*(x)=\dfrac{1}{D^2-6D+9}(x+1)e^{3x}$

$$=e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2-6(D+3)+9}(x+1)$$

$$=e^{3x}\frac{1}{D^2}(x+1)=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x},$$

故原方程的通解为 $y(x)=e^{3x}(C_1+C_2x)+\left(\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$.

(5) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1\pm i$.

对应齐次方程的通解为 $y(x)=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

非齐次方程的特解为 $y^*(x)=\dfrac{1}{D^2-2D+2}e^x x\cos x$

$$=e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+2}x\cos x$$

$$=e^x\frac{1}{D^2+1}x\cos x,$$

因为 $\cos x$ 是 $e^{ix}$ 的实部,所以先求$\dfrac{1}{D^2+1}xe^{ix}$ 再取实部,即得$\dfrac{1}{D^2+1}x\cos x$.

$$\frac{1}{D^2+1}e^{ix}x = e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}x = e^{ix}\frac{1}{D^2+2Di}x$$
$$= e^{ix}\frac{1}{D(D+2i)}x = e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2i}+\frac{D}{4}\right)x$$
$$= e^{ix}\left(\frac{1}{2i}\frac{1}{D}+\frac{1}{4}\right)x = e^{ix}\left(\frac{1}{2i}\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x\right)$$
$$= e^{ix}\left(-\frac{i}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right),$$

$$Re\left(\frac{1}{D^2+1}e^{ix}x\right) = Re\left[e^{ix}\left(-\frac{i}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right)\right] = \frac{x}{4}(x\sin x+\cos x),$$

$$y^*(x) = \frac{1}{4}x(x\sin x+\cos x)e^x,$$

故原方程的通解为 $y(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{4}xe^x(x\sin x+\cos x)$.

**【例 6.18】** 求初值问题 $y''+y=3\mid\sin 2x\mid, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0, y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

**【解】** 易求得齐次方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,方程为 $y''+y=3\sin 3x$,可求得其特解为 $y_1^*=-\sin 2x$,于是它的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sin 2x,$$

代入 $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0, y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$,得 $C_1=0, C_2=\sqrt{2}$,所以,当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,特解为

$$y = \sqrt{2}\sin x - \sin 2x.$$

由该特解可得 $y(0)=0, y'(0)=\sqrt{2}-2$,可将它作为当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$ 时,方程 $y''+y=-3\sin 2x$ 的初始条件,易求得当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$ 时,该方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin 2x.$$

代入 $y(0)=0, y'(0)=\sqrt{2}-2$,得 $C_1=0, C_2=\sqrt{2}-4$,所以当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$ 时,该方程的特解为

$$y = (\sqrt{2}-4)\sin x + \sin 2x.$$

于是原方程在初始条件下的特解为

$$y=\begin{cases}(\sqrt{2}-4)\sin x+\sin 2x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{2}\sin x-\sin 2x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

注 当方程的任意项为分段函数时,注意非齐次方程初值问题的初始条件的确定.

## 题型四　欧拉方程的计算

提示 欧拉方程具有这种特点:各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同的方程,即形如

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{(n-1)}xy'+a_ny=f(x)$$

的方程，称为欧拉方程．其中，$a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为常数．

解法：作自变量 $x$ 的变量替换，化为常系数方程．

令 $x = e^t$，即 $t = \ln x$，把 $y$ 看做 $t$ 的函数，则

$$xy' = \frac{dy}{dt} = Dy;$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = D(D-1)y;$$

$$\cdots$$

$$x^n y^{(n)} = D(D-1)\cdot\cdots\cdot(D-n+1)y,$$

于是，欧拉方程化为 $P_n(D)y = f(e^t)$．

解出 $y = y(t)$，则 $y = y(\ln x)$ 就是欧拉方程的解．

**【例 6.19】**解下列微分方程：

(1)$x^2 y'' + 3xy' - 3y = x^3$；

(2)$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x\sin(\ln x)$；

(3)$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x\ln x$.

**【解】**(1) 令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$，用算子法，

原方程$\Rightarrow[D(D-1) + 3D - 3]y = e^{3t}$

$$\Rightarrow(D^2 + 2D - 3)y = e^{3t}, \quad ⑮$$

特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$，

对应的关于 $t$ 的齐次方程通解为 $y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t$，

非齐次方程 ⑮ 的特解为 $y^*(t) = \dfrac{1}{D^2 + 2D - 3}e^{3t} = \dfrac{1}{12}e^{3t}$，

故方程 ⑮ 的通解为 $y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t + \dfrac{1}{12}e^{3t}$，

于是原方程的通解为 $y(x) = C_1 \dfrac{1}{x^3} + C_2 x + \dfrac{1}{12}x^3$.

(2) 令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$，原方程 $\Rightarrow$

$$[D(D-1)(D-2) - D(D-1) + 2D - 2]y = e^t\sin t$$

$$\Rightarrow(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = e^t\sin t. \quad ⑯$$

⑯ 的特征方程为 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$，

⑯ 对应的齐次方程通解为 $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$，

⑯ 的一个特解为 $y^*(t) = \dfrac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2}e^t\sin t$

$$= e^t \frac{1}{D^3 - D^2}\sin t$$

$$= e^t\left(\frac{1}{1-D}\sin t\right) = \frac{1}{2}e^t[\sin t + \cos t],$$

⑯ 的通解为 $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^t[\sin t + \cos t]$，

原方程的通解为 $y(x) = (C_1 + C_2\ln x)x + C_3 x^2 + \dfrac{1}{2}x[\sin\ln x + \cos\ln x]$.

(3) 令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$，原方程 $\Rightarrow$

$$[D(D-1)(D-2)+3D(D-1)+D-1]y=te^t,$$

即 $$(D^3-1)y=te^t, \tag{17}$$

其特征方程为 $\lambda^3-1=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

⑰ 对应的齐次方程的通解为 $y(t)=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$,

⑰ 的特解为 $$y^*(t)=\frac{1}{D^3-1}te^t=e^t\frac{1}{(D+1)^3-1}t=e^t\frac{1}{D(D^2+3D+3)}t$$
$$=e^t\frac{1}{D}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}D\right)t=e^t\left(\frac{1}{3}\frac{1}{D}-\frac{1}{3}\right)t=\frac{1}{6}t(t-2)e^t,$$

⑰ 的通解为 $y(t)=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\dfrac{1}{6}t(t-2)e^t$,

原方程的通解为 $y(x)=C_1x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[C_2\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]+\left[C_3\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]+\dfrac{x}{6}\ln x(\ln x-2)$.

## 题型五　微分方程的应用

微分方程的应用很广泛，我们只讲在几何和力学中的应用．

### (一) 在几何中的应用

**解题程序**

(1) 根据所给的某几何特性画一草图；

(2) 利用 $y'$ 表示曲线 $y=f(x)$ 上 $(x,y)$ 点处的切线斜率，或 $-\dfrac{dx}{dy}$ 表示曲线 $y=f(x)$ 上 $(x,y)$ 点的法线斜率，以及 $\int_a^x f(t)dt$ 表示由曲线 $y=f(x)$，$f(x)\geqslant 0$，直线 $x=x$，$x=a$，$x$ 轴所围图形的面积等方面的意义，列方程；

(3) 解方程．

**【例 6.20】** 在上半平面求一条凹的曲线，其任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 $PQ$ 长度的倒数($Q$ 是法线与 $x$ 轴的交点)，且曲线在点(1,1)处的切线与 $x$ 轴平行．

**【解】** 草图见图 6-1，所求曲线为 $y=f(x)$．于是其在 $P(x,y)$ 点处的曲率为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$(因为曲线为凹的，所以 $y''>0$)，

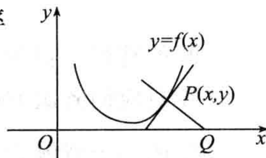


图 6-1

曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x,y)$ 点处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)(y'\neq 0),$$

它与 $x$ 轴的交点 $Q$ 的坐标为 $Q(x+yy',0)$，于是

$$|PQ|=\sqrt{(yy')^2+y^2}=y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

由题设 $K=\dfrac{1}{|PQ|}$，即 $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow yy''=1+y'^2$—— 这是不显含 $x$ 的方程，

初始条件为 $y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$.

令 $y' = p, y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，于是方程变为

$$yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \Rightarrow \frac{p}{1+p^2}dp = \frac{dy}{y}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\ln(1+p^2) = \ln y + C_1$，代入 $y'|_{x=1} = 0$，得 $C_1 = 0$.

$\Rightarrow \quad p^2 = y^2 - 1 \Rightarrow p = \pm\sqrt{y^2-1}$. 积分得

$\ln(y+\sqrt{y^2-1}) = \pm(x-1) - C_2$，代入 $\quad y|_{x=1} = 1$，得 $C_2 = 0$，

故所求曲线为 $\quad y + \sqrt{y^2-1} = e^{\pm(x-1)}$，即 $y = \dfrac{1}{2}(e^{x-1} + e^{-(x-1)})$.

**【例 6.21】** 已知曲线过(1,1)点，如果把曲线上任一点 $P$ 处的切线与 $y$ 轴的交点记作 $Q$，则以 $PQ$ 为直径所做的圆都经过点 $F(1,0)$，求此曲线方程.

**【解】** 作草图(见图 6-2)，所求曲线设为 $y = f(x)$，于是切线方程为 $Y - y = y'(X-x)$，切线 $PQ$ 与 $y$ 轴的交点 $Q$ 的坐标为 $Q(0, y-xy')$，

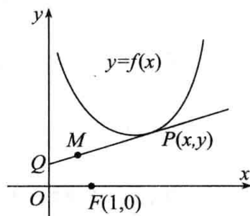


图 6-2

设 $M$ 点为切线段 $PQ$ 的中点，坐标为 $\left(\dfrac{x}{2}, y - \dfrac{xy'}{2}\right)$，

因为圆经过点 $F(1,0)$，所以 $|MQ| = |MF|$，于是得方程

$$\begin{cases} yy' = \dfrac{1}{x}y^2 - 1 + \dfrac{1}{x}. \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$$

上式中令 $y^2 = Z$，则上式 $\Rightarrow \dfrac{1}{2}(y^2)' = \dfrac{1}{x}y^2 - 1 + \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow Z' = \frac{2}{x}Z - 2 + \frac{2}{x}, \tag{18}$$

① $Z' = \dfrac{2}{x}Z \Rightarrow \dfrac{dZ}{Z} = \dfrac{2}{x}dx \Rightarrow \ln Z = 2\ln x + \ln C, Z = Cx^2$.

② 令 $Z = C(x)x^2$ 为 ⑱ 的解，代入并整理，得

$C'(x)x^2 = -2 + \dfrac{2}{x} \Rightarrow C'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow C(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \tilde{C}$，

故 ⑱ 的通解为 $Z = \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \tilde{C}\right)x^2 = 2x - 1 + \tilde{C}x^2$，

即方程的通解为 $y^2 = 2x - 1 + \tilde{C}x^2$，代入初值 $y|_{x=1} = 1$，得 $\tilde{C} = 0$.

于是所求曲线为 $y^2 = 2x - 1$.

## (二) 在力学中的应用

**解题程序：**

1° 建立坐标系，对所研究物体进行受力分析；

2° 根据牛顿第二定律 $F = ma$，列方程；

3° 解方程.

**【例 6.22】** 一质量为 $m$ 的船以速度 $v_0$ 行驶，在 $t = 0$ 时，动力关闭，假设水的阻力正比于 $v^n$，其中 $n$ 为一常数，$v$ 为瞬时速度，求速度与滑行距离的函数关系.

**【解】** 船所受的净力 = 水向前的推力 − 水的阻力 $= 0 - kv^n$.

加速度 = 速度对时间的导数，即 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，

于是，由题设有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=kv^n \\ v|_{t=0}=v_0 \end{cases}.$$

现在要求的不是速度与时间的关系，而是速度与距离的关系.

设距离为 $x$，于是，上述方程可化为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^n$$

$$\Rightarrow mv^{1-n}\mathrm{d}v=-k\mathrm{d}x, \tag{19}$$

当 $n\neq 2$ 时，两边积分，得$\dfrac{mv^{2-n}}{2-n}=-kx+C$，

把 $v|_{t=0}=v_0, x|_{t=0}=0$ 代入上式，得 $C=\dfrac{mv_0^{2-n}}{2-n}$，

故 $$v^{2-n}=-\frac{k(2-n)}{m}x+v_0^{2-n}.$$

当 $n=2$ 时，⑲$\Rightarrow mv^{-1}\mathrm{d}v=-k\mathrm{d}x$，积分得 $v=C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x}$，将初值代入，得 $C=v_0$，

故 $v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x}$.

**【例 6.23】** 两个质量相同的重物挂于弹簧的下端，其中一个坠落，求另一个重物的运动规律，已知弹簧挂一个重物时伸长为 $a$.

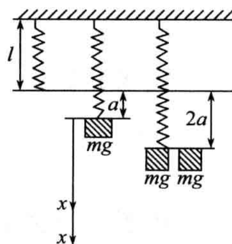


图 6-3

**【解】** 如图 6-3 所示，建立坐标系，设弹簧自由状态时长度为 $l$，取 $l+a$ 处（即挂一重物时弹簧的长度）为坐标原点，取 $x$ 轴铅直向下，设在 $t$ 时刻，重物在 $x$ 处，由胡克定律知，此时弹性恢复为 $-kx$，$k$ 为弹性系数，负号"$-$"是因为弹性恢复力与位移反向，由牛顿第二定律有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx, \\ x(0)=a, \\ x'(0)=0. \end{cases}$$

因为挂两重物时，弹簧伸长 $2a$，由胡克定律有

$$2mg=k\cdot 2a\Rightarrow k=\frac{mg}{a},$$

所以方程 $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{g}{a}x$，

其特征方程：$\lambda^2=-\dfrac{g}{a}\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{\dfrac{g}{a}}\mathrm{i}$，

于是方程的通解为 $\quad x=C_1\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t+C_2\sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}t.$

$$\Rightarrow x'=-C_1\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t-C_2\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t,$$

把初始条件 $x(0)=a, x'(0)=0$ 代入以上两式，得 $C_1=a, C_2=0$.

所以,所求的重物的运动规律为 $x = a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$.

## 第3节 思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势** 已知常系数齐次或非齐次微分方程的解,反求微分方程时,要想到齐次微分方程的解与其特征根的关系.

**【例 6.24】** 在下列微分方程中,以 $y = C_1e^x + C_2\cos2x + C_3\sin2x$($C_1,C_2,C_3$ 是任意常数)为通解的是

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$.　　(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$.　　(D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.　　【　】

**【分析】** 本题已知微分方程的通解,反求微分方程的形式,一般根据通解的形式分析出特征值,然后从特征方程入手.

**【解】** 因为 $y = C_1e^x + C_2\cos2x + C_3\sin2x$($C_1,C_2,C_3$ 是任意常数)为通解,

所以微分方程的特征值为 $1,\pm 2i$. 于是特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$,即

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

于是所求的微分方程为 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$. 故选(D).

**【例 6.25】** 函数 $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + xe^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$.　　(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.　　(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.　　【　】

**【分析】** 先根据所给解分析出对应齐次微分方程的特征方程的根,然后由特解形式判定非齐次项形式.

**【解】** 由所给解的形式,可知原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0, \text{即 } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

故对应的齐次微分方程为

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

又 $y^* = xe^x$ 为原微分方程的一个特解,而 $\lambda = 1$ 为特征单根,故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式 $f(x) = Ce^x$($C$ 为常数). 所以综合比较四个选项,应选(D).

### 二、综合题解析

**【例 6.26】** 设函数 $f(x)$ 可导,且对任何实数 $x,h$ 满足 $f(x) \neq 0$,

$$f(x + h) = \int_x^{x+h} \frac{t(t^2 + 1)}{f(t)}dt + f(x),$$

此外,$f(1) = \sqrt{2}$,求 $f(x)$ 的表达式.

**【分析】** 先将所给等式转化为

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t,$$

然后令 $h\to 0$，对上式两边取极限得到微分方程，解此微分方程求得 $f(x)$.

**【解】**由所给等式得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t, \qquad ①$$

由于
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x), \qquad ②$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\xi(\xi^2+1)}{f(\xi)}\cdot h \quad (\xi\text{ 为介于 }x\text{ 与 }x+h\text{ 之间的实数})$$

$$=\lim_{\xi\to x}\frac{\xi(\xi^2+1)}{f(\xi)}=\frac{x(x^2+1)}{f(x)}, \qquad ③$$

所以令 $h\to 0$，对 ① 式的两边取极限，且将 ②③ 代入得微分方程

$$f'(x)=\frac{x(x^2+1)}{f(x)}，\text{即 } f(x)\mathrm{d}f(x)=x(x^2+1)\mathrm{d}x.$$

两边积分得
$$\frac{1}{2}f^2(x)=\frac{1}{4}(x^2+1)^2+C. \qquad ④$$

将 $f(1)=\sqrt{2}$ 代入 ④ 得

$$\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{4}(1+1)^2+C，\text{即 } C=0.$$

代入 ④ 得
$$f(x)=\pm\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}.$$

由于 $f(1)=\sqrt{2}$，所以上式的根号前应取"+"号，从而所求的 $f(x)$ 表达式为

$$f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}.$$

注 极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t$ 也可用洛必达法则计算：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t}{h}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)[(x+h)^2+1]}{f(x+h)}=\frac{x(x^2+1)}{f(x)}.$$

**【例 6.27】**设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，且

$\psi(1)=\frac{5}{2}，\psi'(1)=6，\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.

**【解】**由 $\begin{cases}x'=2+2t\\ y'=\psi'(t)\end{cases}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

又 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，所以

$$\frac{3}{4(1+t)}=\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

即$\frac{\psi''(t)(1+t)-\psi'(t)}{(1+t)^2}=3$,即$\left[\frac{\psi'(t)}{1+t}\right]'=3$,两边积分得

$$\frac{\psi'(t)}{1+t}=3t+C_1\Rightarrow\psi'(t)=3t(1+t)+C_1(1+t),$$

两边再次积分得 $\psi(t)=t^3+\frac{1}{2}(3+C_1)t^2+C_1t+C_2$.

将 $\psi(1)=\frac{5}{2}$,$\psi'(1)=6$ 代入上两式得 $C_1=0$,$C_2=0$,于是

$$\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2.$$

## 习　题　六

**1.** 求解下列微分方程:

(1)$y'-e^{x-y}+e^x=0$;　　(2) $\frac{dy}{dx}=(1-y^2)\tan x$,$y(0)=2$.

**2.** 求解下列微分方程:

(1)$(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$;

(2)$y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$,$y(1)=-1$.

**3.** 求解下列微分方程:

(1) $\sqrt{1+x^2}\,y'\sin 2y=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$;

(2)$(x-2xy-y^2)dy+y^2dx=0$;

(3)$xy'\sin y\ln x+\cos y(1-x\cos y)=0$.

**4.** 求解下列微分方程:

(1)$e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$;

(2)$\left(x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)dy=0$;

(3)$(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$.

**5.** 求解下列微分方程:

(1)$y'=\frac{y^2-x}{2y(x-1)}$;　　(2)$xy'+y=x^3y^6$.

**6.** 设函数 $\varphi(x)$ 在实轴上连续,$\varphi'(0)$ 存在,且具有性质 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$,试求出 $\varphi(x)$.

**7.** 证明:$y=e^{\int_{x_0}^{x}-p(x)dx}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}Q(s)e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}ds\right)$是一阶线性方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解.

**8.** 求解下列方程:

(1)$ydx+(y-x)dy=0$,$y(0)=1$;

(2)$x(y'+1)+\sin(x+y)=0$,$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

**9.** 求解下列方程:

(1)$(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$;

(2)$xy''+x(y')^2-y'=0, y(2)=2, y'(2)=1$;

(3)$2y''+(y')^2=y, y(0)=2, y'(0)=1$.

**10.** 求解下列微分方程:

(1)$y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$;

(2)$y^{(4)}-5y''+10y'-6y=0, y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=6, y'''(0)=-14$.

**11.** 求解下列微分方程:

(1)$y''+y=x+3\sin 2x+2\cos x$;

(2)$y''+y=2xe^x+4\sin x, y(0)=y'(0)=0$;

(3)$y''+4y'+4y=e^{ax}$.

**12.** 求解下列微分方程:

(1)$x^2y''+xy'+y=2\sin(\ln x)$;

(2)$(x+1)^2y''-(x+1)y'+y=6(x+1)\ln(x+1)$.

**13.** 求 $xOy$ 平面上一曲线,使其过每点的切线同该点的向径及 $Oy$ 轴构成一个等腰三角形.

**14.** 一质量为 $m$ 的物体,在黏性液体中静止自由下落,假如液体阻力与运动速度成正比,试求物体运动的规律.

**15.** 有一盛满了水的圆锥形漏斗,高 10 cm,顶角 $\alpha=60°$,漏斗尖处有面积为 0.5 $\text{cm}^2$ 的小孔,求水流出时漏斗内水深的变化规律,并求出水全部流出所需的时间(提示:水从深处为 $h$ 的孔流出的速度 $v=0.6\sqrt{2gh}$ cm/s).

**16.** 设经过原点的曲线簇上任一点 $P$ 处的切线交 $x$ 轴于点 $T$,从点 $P$ 向 $x$ 轴作垂线,其垂足为 $Q$,已知 $PT$,$PQ$ 与 $x$ 轴所围成的三角形的面积与曲边三角形 $OPQ$ 的面积之比等于常数 $k$,$k>\frac{1}{2}$,试求该曲线簇.

**17.** 有一房间容积为 100 $\text{m}^3$,开始时房间空气中含有二氧化碳 0.12%,为了改善房间的空气质量,用一台风量为 10 $\text{m}^3/\text{min}$ 的排风扇通入含 0.04% 的二氧化碳的新鲜空气,同时以相同的风量将混合均匀的空气排出,求排出 10 min 后,房间中二氧化碳的含量的百分比.

## 参 考 答 案

**1.** (1)$y=\ln[1+c\exp(-e^x)]$; (2)$y=\dfrac{3+\cos^2 x}{3-\cos^2 x}$.

**2.** (1)$x+ye^{\frac{x}{y}}=C$; (2)$y=-x$.

**3.** (1)$\sin^2 y=e^{2\sqrt{1+x^2}}(C+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|)$;

(2)$x=y^2+Cy^2e^{\frac{1}{y}}$; (3)$(x+C)\cos y=\ln x$.

**4.** (1)$xe^y-y^2=C$; (2)$\frac{1}{2}x^2+y+\arcsin\frac{x}{y}=C$; (3)$x+\ln(x^2+y^2)=C$.

**5.** (1)$y^2=C(x-1)-(x-1)\ln(x-1)+x$; (2)$y^{-5}=\frac{5}{2}x^3+Cx^5$.

**6.** $\varphi(x)=e^{\varphi'(0)x}$.

**7.** 略.

**8.** (1)$x=-y\ln y$; (2)$\dfrac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\dfrac{\pi}{2x}$.

**9.** (1) $y = \frac{1+C_1^2}{C_1^2}\ln|1+C_1x| - \frac{x}{C_1} + C_2$； (2) $y = 2 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)^2$；

(3) $\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}x + 1$.

**10.** (1) $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\sin x + (C_4 + C_5 x)\cos x$；

(2) $y = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t} + e^t(\cos t + \sin t)$.

**11.** (1) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x - \sin 2x + x\sin x$；

(2) $y = xe^x - e^x + \cos x + 2\sin x - 2x\cos x$；

(3) $y = \begin{cases} (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a \neq 2, \\ (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^{-2x}, & a = 2. \end{cases}$

**12.** (1) $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) - \ln x\cos(\ln x)$；

(2) $y = C_1(x+1) + C_2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)\ln^3(x+1)$，提示：令 $x+1 = e^t$.

**13.** 可分三种情况，其解分别为

①$xy = C$. ②$y + \sqrt{x^2+y^2} = C$ 或 $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$. ③$x^2 + y^2 = Cx$.

**14.** $x = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1)$.

**15.** 方程为 $\begin{cases} -\frac{\pi h^2}{3}dh = 0.3\sqrt{2gh}\,dt, \\ h(0) = 10, \end{cases}$ 时间 $\approx 10(s)$.

**16.** $y^{2k-1} = Cx$.

**17.** 0.07%. 提示：设在 $t$ 时刻时，二氧化碳的含量为 $x\%$，

则 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{10}(x - 0.04)$，$x(0) = 0.12$.

# 第七章　一元微积分的应用

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、函数的单调增减性定理

**定理**　设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 区间内可导，如果对 $\forall x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内是单调增加的（或单调减少）.

注　在 $(a,b)$ 内有有限个数 $x$ 使 $f'(x)=0$，不影响单调性.

【例7.1】设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

【　】

【解】因为 $f''(x)>0$，所以在 $[0,1]$ 上，$f'(x)$ 单调递增.

又因为 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$，$(0<\xi<1)$，所以 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$.

考查(A)－(D)后可知(B)入选.

【例7.2】设在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$，$f(0)\leqslant 0$，则函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 为

(A) 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少"↘"，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加"↗".

(B) 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内单调递减.

(C) 在 $(-\infty,0)$ 内单调递增，在 $(0,+\infty)$ 内单调递减.

(D) 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内单调增加"↗".　　【　】

【解】$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,

令 $F(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $F'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$,

因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$，所以当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$；当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$.

又 $F(0)=0\cdot f'(0)-f(0)\geqslant 0$，[因为 $f(0)\leqslant 0$].

故可知在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内均有 $F(x)>0$.

于是 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'>0$. 因此选择(D).

【例7.3】设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f'(x)$ 单调增加，试证：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内也单调增加.

提示　知道 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导，又知 $f(a)=0$（或 $f(b)=0$）的命题，通常要利用拉格朗日中值定理将 $f(x)$ 写成 $f(x)=f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi)$[或 $f(x)=f(x)-f(b)=(x-b)f'(\xi)$]，$\xi$ 在 $x$ 与 $a$（或 $x$ 与 $b$）之间.

【证】因为 $f(x)=f(x)-f(0)=xf'(\xi), 0<\xi<x$（当 $x>0$ 时），

又由于 $f'(x)$ 单调增加，有 $f'(x)>f'(\xi)$（当 $x>\xi$ 时），

所以 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}$

$$=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0（当 x\in(0,a) 时），$$

故 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内单调增加.

## 二、函数的极值与最值

**定义 1** 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一邻域内有定义，$x$ 为该邻域内异于 $x_0$ 的任一点，若恒有

$$f(x)>f(x_0)（或 f(x)<f(x_0)），$$

则称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的极小值（或极大值）. 极大值与极小值统称为极值，使函数取极值的点 $x_0$ 称为极值点.

**定义 2** 方程 $f'(x)=0$ 的解（或者使一阶导数 $f'(x)$ 等于"0"的点），称为函数 $f(x)$ 的驻点.

**定理 1**（取极值的必要条件） 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，且在 $x_0$ 处取极值，则

$$f'(x_0)=0.$$

**定理 2**（取极值的第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 邻域内可微，且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续，但 $f'(x_0)$ 不存在）.

(1) 若当 $x$ 经过 $x_0$ 时，$f'(x)$ 由"+"变"−"，则 $f(x_0)$ 为极大值；

(2) 若当 $x$ 经过 $x_0$ 时，$f'(x)$ 由"−"变"+"，则 $f(x_0)$ 为极小值；

(3) 若当 $f'(x)$ 经过 $x=x_0$ 的两侧不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值.

**定理 3**（取极值的第二充分条件） 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有 $f''(x_0)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

**【例 7.4】** 已知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 导数存在且 $f'(a)\neq 0$.　　(B) $f(x)$ 取极大值.

(C) $f(x)$ 取极小值.　　(D) $f(x)$ 导数不存在.　　【　】

**【解】** 因为没有告知 $f(x)$ 可导，所以要判别其极值只好用定义. 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，根据极值定理，存在一个 $a$ 的 $\sigma$ 邻域，使得 $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，

于是 $f(x)<f(a)$，故 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值，即 (B) 入选.

**【例 7.5】** 设三次函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$ 有极值点 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$，若用 $a,b,c$ 表示 $f(\alpha)+f(\beta)$，则 $f(\alpha)+f(\beta)$ 为

(A) $2(10a^3+3ab+c)$.　　(B) $2(2a^3-3ab+c)$.

(C) $-2(54a^3-9ab+c)$.　　(D) 以上都不对.　　【　】

**【解】** $f'(x)=3x^2+6ax+3b=3(x^2+2ax+b)$.

因为 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 为三次函数的极值点，又因为它们一定是 $f(x)$ 的驻点，即 $\alpha$ 和 $\beta$ 是 $f'(x)$ 的解，由韦达定理知　$\alpha+\beta=-2a$，　$\alpha\beta=b$.

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=\alpha^3+\beta^3+3a(\alpha^2+\beta^2)+3b(\alpha+\beta)+2c\\&=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]+3a[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+3b(\alpha+\beta)+2c\\&=(-2a)(4a^2-3b)+3a(4a^2-2b)+3b(-2a)+2c\\&=2(2a^3-3ab+c),\end{aligned}$$

故可知(B)入选.

**【例 7.6】** 设 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 3,最小值为 $-29$,又知 $a>0$,则

(A) $a=2,b=-29$. (B) $a=3,b=2$.

(C) $a=2,b=3$. (D) 以上都不对. 【 】

**【解】** $f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$,

令 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=0,x_2=4$(舍去),

$f(0)=b,f(-1)=-7a+b,f(2)=-16a+b$,

因为 $a>0$,所以 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 2}f(x)=f(0)=b=3$,

$\min\limits_{-1\leqslant x\leqslant 2}f(x)=f(2)=-16a+b=-29$,

$\Rightarrow a=2$,可知(C)入选.

**【例 7.7】** 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处,取得极大值,则

(A) $f'(x_0)=0$. (B) $f''(x_0)<0$.

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$. (D) $f'(x_0)=0$ 或不存在. 【 】

**【解】** 因为没有言明 $f(x)$ 可导,又极值也可以在导数不存在处取得,因此(A),(B),(C)皆不一定成立,故(D)入选.

## 三、函数凹凸性的判别与函数的拐点

### 1. 图形凹凸性的判别

**定义 1** 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义,若对于 $I$ 中任意两点 $x_1,x_2$,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\left(\text{或 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right),$$

则称 $f(x)$ 在 $I$ 上是凸的(或凹的).

**定理 1**(凹凸性的判别定理) 若在 $I$ 上 $f''(x)<0$(或 $f''(x)>0$),则 $f(x)$ 在 $I$ 上是凸的(或凹的).

### 2. 曲线 $y=f(x)$ 的拐点求法

**定义 2** 函数 $y=f(x)$ 的图形的凹凸分界点称为图形的拐点.

**定理 2**(拐点的判别定理 1) 若在 $x_0$ 处 $f''(x_0)=0$(或 $f''(x_0)$ 不存在),当 $x$ 变动经过 $x_0$ 时,$f''(x)$ 变号,则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

**定理 3**(拐点的判别定理 2) 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的某邻域内有三阶导数,且 $f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$,则 $[x_0,f(x_0)]$ 为拐点.

**【例 7.8】** 设三次曲线 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在 $x=-1$ 处取极大值,点 $(0,3)$ 是拐点,则________.

(A) $a=-1,b=0,c=3$. (B) $a=0,b=-1,c=3$.

(C) $a=3,b=-1,c=0$. (D) 以上均错. 【 】

【解】$y' = 3x^2 + 6ax + 3b, y'' = 6x + 6a$,

$y = y(x)$ 在 $x = -1$ 处取极大值,由可微函数取极值的必要条件,有

$$y'(-1) = (3x^2 + 6ax + 3b)\Big|_{x=-1} = 3 - 6a + 3b = 0, \quad ①$$

又由于(0,3)为 $y = y(x)$ 的拐点可知

$$y''(0) = (6x + 6a)\Big|_{x=0} = 6a = 0, \quad ②$$

$$y(0) = 3 = (x^3 + 3ax^2 + 3bx + c)\Big|_{x=0} = c, \quad ③$$

由 ①,②,③ 可得:$a = 0, b = -1, c = 3$. 可知该题选(B).

【例 7.9】证明曲线 $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

【证】$y' = \dfrac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2}, y'' = \dfrac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$,

令 $y'' = 0$,得 $x_1 = 1, x_2 = -2-\sqrt{3}, x_3 = -2+\sqrt{3}$,列表见表 7-1

表 7-1

| $x$ | $(-\infty, -2-\sqrt{3})$ | $-2-\sqrt{3}$ | $(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$ | $-2+\sqrt{3}$ | $(-2+\sqrt{3}, 1)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $y$ | $\frown$ | $A(-2-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4})$ 拐点 | $\smile$ | $B(-2+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{4})$ 拐点 | $\frown$ | $C(1,1)$ 拐点 | $\smile$ |

因为 $k_{AC} = k_{BC} = \dfrac{1}{4}$,($k$ 为直线的斜率)

所以 $A,B,C$ 三点在同一直线上.

【例 7.10】函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上称为凹的(凸的),如果对此区间中任意两点 $x_1, x_2$ 以及任意数 $\lambda_1, \lambda_2$($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$)有不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad [\text{或} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)],$$

试证:(1) 若 $a < x < b$ 时,$f''(x) > 0$,则函数于 $(a,b)$ 内为凹的;

(2) 若 $a < x < b$ 时,$f''(x) < 0$,则函数于 $(a,b)$ 内为凸的.

【证】设 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$;又 $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$,

因为 $x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x_2 + \lambda_1(x_1 - x_2)$,

所以 $x_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < x_2$.

由拉格朗日中值定理可知

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1) = \lambda_2(x_2 - x_1) f'(\xi_1) \, (x_1 < \xi_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \quad ④$$

$$f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(x_2 - x_1) f'(\xi_2) \, (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \xi_2 < x_2), \quad ⑤$$

④ $\times \lambda_1$ − ⑤ $\times \lambda_2$ 得

$$(\lambda_1 + \lambda_2) f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 \lambda_2 (x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]$$

$\Rightarrow \quad f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)+\lambda_1\lambda_2(x_2-x_1)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$.

又因为 $f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=(\xi_2-\xi_1)f''(\xi_3)$，$\xi_1<\xi_3<\xi_2$ 及 $f''(\xi_3)>0$（因为 $f''(x)>0$），

所以 $\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)>f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$，

故 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内为凹的.

同理可证明，当 $f''(x)<0$ 时，$f(x)$ 在 $(a,b)$ 内为凸的.

## 四、微元法及其应用

若所求量 $M$ 满足条件：

(1) 其值与变量 $u$ 和其变化区间 $[a,b]$ 以及定义在该区间上的某一函数 $f(u)$ 有关；

(2) 其值在 $[a,b]$ 上具有可加性，则 $M$ 的值可通过定积分的计算来完成.

在 $[a,b]$ 的任一子区间 $[u,u+\mathrm{d}u]$ 上建立所求量的微分 $\mathrm{d}M$ 与某一函数 $f(u)$ 及自变量 $u$ 的微分 $\mathrm{d}u$ 之间的关系式为

$$\mathrm{d}M=f(u)\mathrm{d}u, \qquad ⑥$$

其中，$\mathrm{d}M$ 表示 $M$ 的微元；$f(u)\mathrm{d}u$ 是所求量的局部表达式. 通常称这种通过微元使问题解决的方法为微元法.

**注** 前面的表达式 ⑥ 实际上是由 $\Delta M\approx f(u)\Delta u$ 演变来的，后者能表示成前者的条件是：$\Delta M-\mathrm{d}M=o(\Delta u)$，即 $\Delta M$ 与 $\mathrm{d}M$ 之差是 $\Delta u$ 的高阶无穷小，忽视此情况，可能造成失误.

**用微元法解题的程序：**

(1) 选择坐标系，确定积分变量，选积分变量的原则：所求量 $M$ 与积分变量能够建立起联系；尽量使得在 $[a,b]$ 上构造的关系式 ⑥ 简单，个数少；

(2) 依据微观世界在一定条件下，可以"去弯取直，以不变代变"的思想获得微元关系式 ⑥；

(3) 写出积分式并解之.

**【例 7.11】** 证明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 $y$ 轴旋转所成的旋转体体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,$$

其中，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

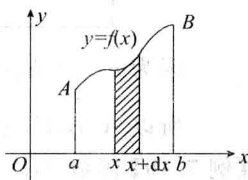


图 7-1

**【解】** 如图 7-1 所示，选择 $x$ 为积分变量，且 $a\leqslant x\leqslant b$，图中阴影部分的面积 $\mathrm{d}s=f(x)\mathrm{d}x$. 它绕 $y$ 轴旋转所成的形体，是以 $f(x)$ 为高，半径为 $x$，壁厚为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱筒，其体积为 $\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$，

在 $[a,b]$ 上，积分之，得

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

**【例 7.12】** 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

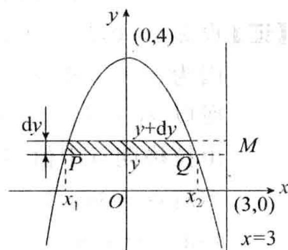


图 7-2

**【解】** 如图 7-2 所示，选择 $y$ 为积分变量，且 $0\leqslant y\leqslant 4$，图中阴影部分绕直线 $x=3$ 旋转所成图形的体积为

$$\mathrm{d}V=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]\mathrm{d}y,$$

注意到 $x_1=-\sqrt{4-y}$，$x_2=\sqrt{4-y}$，则

$$\mathrm{d}V=\pi[(3+\sqrt{4-y})^2-(3-\sqrt{4-y})^2]\mathrm{d}y=12\pi\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y,$$

故 $$V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y=64\pi.$$

**【例 7.13】** 设半径为 $R$ 的球体体密度 $\mu=r^2$，求球体的质量.

(1) $r$ 是球内任一点到球心的距离；

(2) $r$ 是球内任一点到直径的距离；

(3) $r$ 是球内任一点到过球心的平面的距离.

**【解】** (1) 如图 7-3(a) 所示，选极坐标系，积分变量选择 $r$，以极点 $O$ 为中心，$r$ 为内径，厚度为 $\mathrm{d}r$ 的球壳体积为

$$\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r,$$

由于 $\mathrm{d}r$ 很小，球壳密度可看做均匀的，为 $\mu=r^2$，于是其质量

$$\mathrm{d}M=4\pi r^2\mathrm{d}r\cdot r^2=4\pi r^4\mathrm{d}r,$$

故 $$M=\int_0^R4\pi r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi r^5\Big|_0^R=\frac{4\pi}{5}R^5.$$

(2) 如图 7-3(b) 所示，设 $x$ 为积分变量，$y$ 为中心轴，以 $x$ 为内径厚为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱筒可看做图中阴影部分绕 $y$ 轴旋转所得的形体，其体积为

$$\mathrm{d}V=2\pi x\cdot2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=4\pi x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

故质量为 $$\mathrm{d}M=4\pi x^3\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$M=4\pi\int_0^Rx^3\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x=R\sin t}4\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\cos^2t\,\mathrm{d}t$$

$$=-4\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2t)\cos^2t\,\mathrm{d}(\cos t)=-4\pi R^5\left[\frac{1}{3}\cos^3t-\frac{1}{5}\cos^5t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{15}\pi R^5.$$

(3) 如图 7-3(c) 所示，选直角坐标系，以 $z$ 为积分变量，图中所示为所论问题在 $yOz$ 平面上的投影，球中从 $z$ 到 $z+\mathrm{d}z$ 这部分球台的体积为 $\mathrm{d}V=\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z$，由于 $\mathrm{d}z$ 很小，故该部分的密度可看做均匀的，为 $\mu=z^2$. 于是其质量为 $\mathrm{d}M=\pi z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z$，故质量

$$M=2\pi\int_0^Rz^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z=2\pi\left[\frac{1}{3}R^2z^3-\frac{1}{5}z^5\right]_0^R=\frac{4\pi}{15}R^5.$$

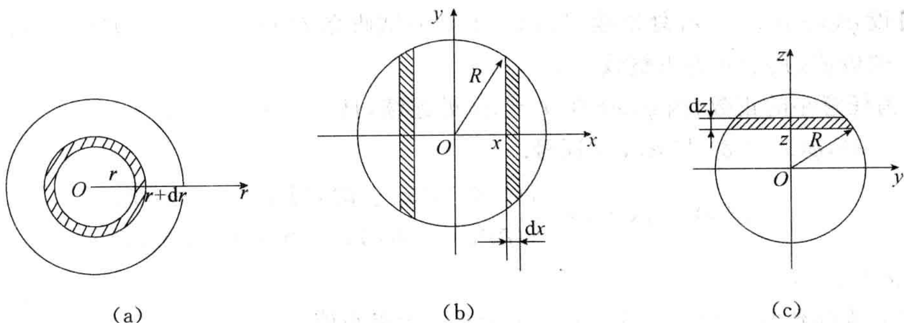



图 7-3

## 第2节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求函数的极值

提示 求极值的程序：

(1) 求出 $f'(x)$，求出在 $(a,b)$ 内使 $f'(x)=0$ 和使 $f'(x)$ 不存在的点，设为 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$；

(2) 用定理2或3验证所求点 $x_i$ 是否为极值点；

(3) 若 $x_m$ 为极值点，则 $f(x_m)$ 为极值.

**【例7.14】** 已知 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的邻域内有定义，且有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k,$$

其中，$n$ 为正整数；$k\neq 0$，讨论 $f(x)$ 在 $x_0$ 处是否有极值.

**【解】** 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k$，依据极限与无穷小的关系定理有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$$

于是 $$f(x)-f(x_0)=(k+\alpha(x))(x-x_0)^n.$$

可知当 $x$ 在 $x_0$ 的充分小邻域内时，$(k+\alpha(x))$ 与 $k$ 同符号，

因此

① 当 $x$ 在 $x_0$ 的充分小邻域内时，若 $n$ 为偶数，则 $f(x)-f(x_0)$ 与 $k$ 同号；

当 $k>0$ 时，$f(x)-f(x_0)>0$，可知 $f(x_0)$ 为极小值；

当 $k<0$ 时，$f(x)-f(x_0)<0$，可知 $f(x_0)$ 为极大值.

② 当 $x$ 在 $x_0$ 的充分小邻域内时，若 $n$ 为奇数，则

$$f(x)-f(x_0)=(k+\alpha(x))(x-x_0)^n.$$

在 $x=x_0$ 的两侧异号，即不恒正(或恒负)，可知 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

**【例7.15】** 设 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)\neq 0$，试研究 $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极值，其中 $n$ 为正整数.

**【解】** 设 $\delta$ 为任意小的正数，因 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)\neq 0$，故

$\varphi(x_0-\delta)$，$\varphi(x_0+\delta)$ 与 $\varphi(x_0)$ 同号.

$$f(x)-f(x_0)=\begin{cases}(-\delta)^n\varphi(x_0-\delta),\text{当 } x=x_0-\delta \text{ 时}\\(\delta)^n\varphi(x_0+\delta),\quad \text{当 } x=x_0+\delta \text{ 时}\end{cases}.$$

①$\varphi(x_0)>0$，

ⓐ 当 $n$ 为偶数时，$f(x)-f(x_0)>0$，$f(x_0)$ 为极小值；

ⓑ 当 $n$ 为奇数时，$f(x)-f(x_0)\begin{cases}<0,x=x_0-\delta\\>0,x=x_0+\delta\end{cases}.$

故可知 $f(x_0)$ 不是极值.

②$\varphi(x_0)<0$，

ⓐ 当 $n$ 为偶数时，则 $f(x)-f(x_0)<0$，$f(x_0)$ 为极大值；

ⓑ 当 $n$ 为奇数时，$f(x)-f(x_0)\begin{cases}>0, x=x_0-\delta \\ <0, x=x_0+\delta\end{cases}$.

故可知 $f(x_0)$ 不是极值.

## 题型二　求函数的最值

**提示 最大值与最小值的求法**

若 $f(x)$ 为定义在$[a,b]$上的连续函数，则最值的求法程序为：

(1) 求 $f'(x)$，求出驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点；

(2) 计算出(1) 中所得到的各点的函数值及 $f(a)$，$f(b)$；

(3) 比较以上各函数值的大小，最大者为最大值，最小者为最小值.

若 $y=f(x)$ 为依据实际问题的大小，最大者为最大值，最小者为最小值.

在$(a,b)$ 内只有一个驻点，则 $f(x_0)$ 即为所求的最大(或最小) 值.

**【例 7.16】** 由直线 $y=0$，$x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形面积最大.

**【解】** 如图 7-4 所示，设所求切点为 $P(x_0,y_0)$，切线 $PT$ 交 $x$ 轴于 $A$，交直线 $x=8$ 于 $B$，切线 $PT$ 的方程为

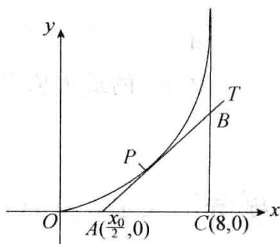


图 7-4

$$y-y_0=2x_0(x-x_0),$$

又 $P$ 点在 $y=x^2$ 上，因此，$y_0=x_0^2$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{2}x_0$，$A$ 点的坐标为 $A(\frac{1}{2}x_0,0)$，

令 $x=8$，得 $y=16x_0-x_0^2$，$B$ 点的坐标为 $B(8,16x_0-x_0^2)$，

于是 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left(8-\frac{1}{2}x_0\right)(16x_0-x_0^2), 0\leqslant x_0\leqslant 8.$$

令 $$S'=\frac{1}{4}(3x_0^2-64x_0+16\times 16)=0\Rightarrow x_0=\frac{16}{3}, x_0=16(\text{舍去}).$$

因为 $S''\left(\frac{16}{3}\right)=-8<0$，所以 $S\left(\frac{16}{3}\right)=\frac{4096}{27}$ 为极大值.

故 $S\left(\frac{16}{3}\right)=\frac{4096}{27}$ 为所有三角形中面积最大者.

**【例 7.17】** 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内嵌入一内接矩形，使其边平行于椭圆的轴，且面积最大.

**【解】** 设 $x,y$ 为矩形的半长，则矩形面积为 $S=4xy$，由题设可知$(x,y)$ 为椭圆上的点.

因为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\begin{cases}x=a\cos t \\ y=b\sin t\end{cases}$， $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，

所以 $S=4ab\sin t\cos t=2ab\sin 2t$.

$$S'=4ab\cos 2t, \text{令 } S'=0, \text{得 } t_1=\frac{\pi}{4}, t_2=\frac{3\pi}{4},$$

$$S''\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-8ab\sin 2t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-8ab<0,$$

$$S''\Big|_{t=\frac{3}{4}\pi}=-8ab\sin 2t\Big|_{t=\frac{3\pi}{4}}=8ab>0,$$

故 $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=2ab$ 为内接矩形的最大值，此时矩形的边长分别为 $2x=\sqrt{2}a,2y=\sqrt{2}b$.

**【例 7.18】** 曲线 $y=4-x^2$ 与 $y=1+2x$ 相交于 $A,B$ 两点，在抛物线上 $AB$ 两点间求一点 $C$，使 $\triangle ABC$ 的面积最大，并求最大面积.

**【解】** 先求 $A,B$ 两点的坐标.

解方程组 $\begin{cases}y=1+2x\\y=4-x^2\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=-3\end{cases}$，$\begin{cases}y_1=3\\y_2=-5\end{cases}$.

所以 $A(1,3)$，$B(-3,-5)$，抛物线上 $C$ 点的坐标为 $(x,4-x^2)$，

于是，$\triangle ABC$ 的面积 $S$ 为

$$S=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x&4-x^2&1\\-3&-5&1\\1&3&1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}(12-8x-4x^2)\right|=|6-4x-2x^2|,$$

先求 $S_*=6-4x-2x^2$ 的驻点，

$$\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}x}=-4-4x=0\Rightarrow x=-1,\ \frac{\mathrm{d}^2S_*}{\mathrm{d}x^2}=-4<0,$$

故 $S_*$ 的最大值点为 $x=-1$，因而也是 $S$ 的最大值点，$S(-1)=8$.

## 题型三　关于方程根的讨论

**提示** 1. 关于方程 $f(x)=0$ 的根[或 $f(x)$ 的零点]的存在性的证明思路

(1) 只知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而没有说明 $f(x)$ 是否可导，则一般用闭区间上连续函数的零值定理证明.

(2) 作出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，证明 $F(x)$ 满足罗尔定理条件，从而得出 $f(x)$ 的零点的证明.

2. 方程 $f(x)=0$ 的根的个数的讨论

**解题步骤**

(1) 求出 $f(x)$ 的驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点，划分 $f(x)$ 的单调增减性区间；

(2) 求出各单调区间的极值(或最值)；

(3) 分析极值(或最值)与 $x$ 轴的相对位置.

3. 方程 $f(x)=0$ 的根的唯一性的研究

**解题思路**

(1) 利用零值定理(或罗尔定理)证明 $f(x)=0$ 至少存在一个根；

(2) 利用函数的单调性证明 $f(x)=0$ 最多只有一个根.

**【例 7.19】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，证明：在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=0$.

**【分析】** 本题仅知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因而只能用零值定理证明.

**【证】** 由假设 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 同号，不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$，由导数定义有

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由极限定理,存在一个 $\delta_1 > 0$,当 $a < x < a + \delta_1$ 时,$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$,又 $f(a) = 0$,必定 $f(x) > 0$.

同理,由 $f'_-(b) > 0, f(b) = 0$,存在一个 $\delta_2 > 0$,当 $b - \delta_2 < x < b$ 时 $f(x) < 0$.

令 $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$,则当 $x_1 \in (a, a+\delta)$ 时,$f(x_1) > 0$;当 $x_2 \in (b-\delta, b)$ 时,$f(x_2) < 0$.

又显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续,由零值定理,在 $(x_1, x_2)$ 内至少存在一个 $\xi$,使 $f(\xi) = 0$,从而在 $(a,b)$ 内至少存在一个 $\xi$,使 $f(\xi) = 0$.

**【例 7.20】** 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为满足

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

的实数,证明方程 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

**【分析】** 函数 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 虽然在 $[0,1]$ 上连续,但却难以验证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的某个子区间的端点处的函数值是否异号. 但是经分析发现 $f(x)$ 的原函数

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

在 $x = 1$ 处的函数值 $F(1)$ 恰好满足题设已知条件,$F(1) = 0$,为此该命题可利用罗尔定理来证.

**【证】** 作辅助函数

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,又因为

$$F(0) = 0, F(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

由罗尔定理,存在一个 $\xi \in (0,1)$,使得 $F'(\xi) = 0$,

即 $a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots + a_n \xi^n = 0$. 命题得证.

**【例 7.21】** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可微,证明:在 $f(x)$ 的任何两个零点之间必有 $f(x) + f'(x)$ 的一个零点.

**【分析】** 设 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 为 $f(x)$ 的任意两个零点,要证的是存在一个 $\xi \in (\alpha, \beta)$,使得

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

因为 $f(x)$ 可微,故可用罗尔定理证明,其辅助函数可用积分法构造.

$$f(x) + f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d} f(x)}{f(x)} = -\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -x + \ln C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{C}{\mathrm{e}^x} \Rightarrow f(x)\mathrm{e}^x = C,$$

令 $F(x) = f(x)\mathrm{e}^x$ 即可.

**【证】** 作辅助函数 $F(x) = f(x)\mathrm{e}^x$,

显然 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,且在 $(\alpha, \beta)$ 内可微,其中 $\alpha, \beta$ 为 $f(x)$ 的任意两个零点,即 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ 且 $\alpha < \beta$,

$$F(\alpha)=f(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha}=0=f(\beta)\mathrm{e}^{\beta}=F(\beta),$$

可知 $F(x)$ 在$[\alpha,\beta]$上满足罗尔定理条件，于是存在一个 $\xi\in(\alpha,\beta)$ 使

$$F'(\xi)=0,$$

即 $\mathrm{e}^{\xi}f(\xi)+\mathrm{e}^{\xi}f'(\xi)=0$，亦即 $f(\xi)+f'(\xi)=0$. 命题得证.

**【例 7.22】** 设 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，且

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0,$$

证明：存在一个 $\xi\in(0,\pi)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

**【证明】** 因为在$(0,\pi)$内 $\sin x>0$，由 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$ 可知 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内不能恒为正或负，由于 $f(x)$ 的连续性可推知 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内必有零点. 证明零点有两个以上，可用罗尔定理命题证.

用反证法证：若 $x_0\in(0,\pi)$ 是 $f(x)$ 的唯一零点，则当 $x\neq x_0$ 时，$\sin(x-x_0)\cdot f(x)$ 就恒为正的（或负的），于是 $\int_0^{\pi}\sin(x-x_0)\cdot f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，而

$$\int_0^{\pi}\sin(x-x_0)\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\sin x\cos x_0-\cos x\sin x_0)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\cos x_0\int_0^{\pi}\sin xf(x)\mathrm{d}x-\sin x_0\int_0^{\pi}\cos xf(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\left(\text{由题设条件}\int_0^{\pi}\sin xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos xf(x)\mathrm{d}x=0\right)$$

两者矛盾，故 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内至少有两个零点，由罗尔定理命题得证.

**【例 7.23】** 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同实根.

**【证】** $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\sqrt{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2},$$

令 $F(x)=\ln x+2\sqrt{2}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}$,

$F'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，令 $F'(x)=0\Rightarrow x=\mathrm{e}$，列表见 7-2.

表 7-2

| $x$ | $(0,\mathrm{e})$ | $\mathrm{e}$ | $(\mathrm{e},+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | + | $F(\mathrm{e})=2\sqrt{2}$ 极大值 | |
| $F(x)$ | ↗ | | ↘ |

由表 7-2 可知 $F(x)$ 在$(0,\mathrm{e})$与$(\mathrm{e},+\infty)$分别至多有一个零点.

又因为 $x=\mathrm{e}$ 是 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$上唯一的驻点，$F(\mathrm{e})=2\sqrt{2}$ 是 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$内的极大值，因此它是 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$内的最大值，由于 $F(\mathrm{e})>0$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+2\sqrt{2}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$ 可知 $F(x)$ 在$(0,\mathrm{e})$和$(\mathrm{e},+\infty)$内分别至少有一个零点，故 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有两个实根，即方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-$

$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同实根.

**【例 7.24】**设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上可微,对于$[0,1]$上每一个 $x$,函数 $f(x)$ 的值都在开区间$(0,1)$内,且 $f'(x)\neq 1$,证明:在$(0,1)$内有且仅有一个 $x$,使 $f(x)=x$.

**【证】**令 $F(x)=f(x)-x$,由题设可知 $F(x)$ 在$[0,1]$上连续,又由于 $0<f(x)<1$,所以

$$F(0)=f(0)-0>0,\quad F(1)=f(1)-1<0,$$

由闭区间上连续函数的零值定理可知,在$(0,1)$内至少有一点 $x$,使 $F(x)=0$,即 $f(x)=x$. 用反证法证 $F(x)$ 在$(0,1)$内至多有一个零点.

若不然,$\exists x_1,x_2\in(0,1)$,$x_1<x_2$,使得

$$f(x_1)=x_1,\quad f(x_2)=x_2,$$

由拉格朗日中值定理,至少存在一个 $x\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$ 使得

$$f'(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1,$$

与题设矛盾.

综上所述,命题得证.

**【例 7.25】**设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续,当 $x>a$ 时,$f'(x)>k>0$,其中 $k$ 为常数,又 $f(a)<0$,证明:方程 $f(x)=0$ 在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内有唯一实根.

**【证】**由题设,在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内,$f'(x)>k>0$ 可知在该区间内 $f(x)$"↗",因此 $f(x)$ 在该区间内至多有一个实根.

再证 $f(x)$ 在该区间内至少有一个实根.

由题设知,$f(x)$ 在$\left[a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right]$上满足拉格朗日定理条件,故至少存在一个 $\xi\in\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$,使 $f\left(a+\frac{|f(a)|}{k}\right)-f(a)=\frac{|f(a)|}{k}f'(\xi)$,

再由题设当 $\xi>a$ 时,$f'(\xi)>k>0$,于是有

$$f\left(a+\frac{|f(a)|}{k}\right)>f(a)+\frac{|f(a)|}{k}\cdot k=f(a)+|f(a)|=0,$$

又 $f(a)<0$,由零值定值,$f(x)$ 在$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{k}\right)$内至少有一个零点.

综上所述,命题得证.

**【例 7.26】**试讨论方程 $xe^{-x}=a(a>0)$ 的实根.

**【解】**令 $F(x)=xe^{-x}-a$,则方程 $xe^{x}=a$ 的实根的个数相当于 $F(x)$ 的零点的个数. 为此研究 $F(x)$ 的单调性及极值(或最值).

令 $F'(x)=(1-x)e^{-x}=0\Rightarrow x=1$,见表 7-3.

表 7-3

| $x$ | $(-\infty,1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $F'(x)$ | + | | − |
| $F(x)$ | ↗ | $(e^{-1}-a)$ 极大值 | ↘ |

因为 $x=1$ 是 $F(x)$ 唯一的驻点,$F(1)=e^{-1}-a$ 为$(-\infty,+\infty)$上的极大值,因此也是最大值,以下就 $F(1)=e^{-1}-a$ 与 $x$ 轴的相对位置讨论 $F(x)$ 的零点.

① 若 $F(1)=e^{-1}-a<0$，即 $(1,e^{-1}-a)$ 位于 $x$ 轴下方，由表所示，$F(x)$ 与 $x$ 轴不会有交点，因此 $F(x)$ 没有零点.

② 若 $F(1)=e^{-1}-a=0$，即 $(1,e^{-1}-a)$ 位于 $x$ 轴上，由表所示 $F(x)$ 与 $x$ 轴除 $(1,e^{-1}-a)$ 点外再不会相交，因此 $f(x)$ 只有唯一的零点.

③ 若 $F(1)=e^{-1}-a>0$，即 $(1,e^{-1}-a)$ 位于 $x$ 轴的上方，由表可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内"↗"，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{-x}-a)=-\infty$，可知 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内有且仅有唯一的零点；而 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内"↘"，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-a<0$，可知 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内也有且仅有唯一的零点.

总之，在这种情况下，$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有二个零点.

综上所述，当 $e^{-1}-a<0$，即 $a>e^{-1}$ 时，方程没有实根；当 $a=e^{-1}$ 时，方程有唯一实根；当 $a<e^{-1}$ 时，方程有两个实根.

**【例 7.27】**设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 中二阶可导，并满足 $f(a)=A>0$，$f'(a)<0$，当 $x>a$ 时，$f''(x)<0$，证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

**【证】**因为 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$"↘"，因而当 $x>a$ 时，$f'(x)<f'(a)<0$，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内严格单调下降，因此 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内至多有一个实根.

以下证明 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 至少有一个实根.

由题设可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 的右侧可展成泰勒公式：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)^2,$$

因为 $f''(x)<0$，所以 $f''(\xi)<0$，于是 $f(x)<f(a)+f'(a)(x-a)$，

当 $x$ 充分大时，不妨设 $x_0=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$，则

$$f(x_0)<f(a)+f'(a)\left[\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)-a\right]=0.$$

又 $f(a)>0$，由零值定理可知，至少存在一个 $\xi\in(a,x_0)$，使 $f(\xi)=0$.

综上所述命题得证.

**【例 7.28】**证明：当 $a^2-3b<0$ 时，实系数方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 只有唯一的实根.

**【证】**令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

先证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个零点，将 $f(x)$ 改写成

$$f(x)=x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}\right),$$

当 $x$ 充分大时，可知 $f(x)$ 的符号与 $x^3$ 相同，设 $x_0>0$ 为足够大的 $x$ 值，于是

$$f(x_0)>0,f(-x_0)<0,$$

由零值定理，至少存在一个 $\xi\in(-x_0,x_0)\subset(-\infty,+\infty)$，使 $f(\xi)=0$.

再证 $f(x)$ 至多有一个零点.

由 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，可知该二次三项式的判别式为

$$B^2-4AC=(2a)^2-12b=4(a^2-3b)<0(\text{由题设}),$$

又 $A=3>0$，故 $f'(x)>0$，可知 $f(x)$ 单调上升，因此 $f(x)$ 至多只有一个零点.

综上所述，命题得证.

## 题型四　函数渐近线的求解

提示 1°　水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$,则 $y=b$ 称为函数 $y=f(x)$ 在右侧或左侧的水平渐近线.

2°　铅直渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$,则 $x=x_0$ 称为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

3°　斜渐近线.

若 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$,则 $y=ax+b$ 称为 $y=f(x)$ 的右侧斜渐近线.

若 $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,$b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$,则 $y=ax+b$ 称为 $y=f(x)$ 的左侧斜渐近线.

4°　在同一侧,水平渐近线和斜渐近线不能同时存在.

**【例 7.29】**设曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$,则该曲线

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平又有铅直渐近线.　　【　】

**【解】** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$,$y=1$ 为水平渐近线,

$$\lim_{x\to0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty,\ x=0 \text{ 为铅直渐近线},$$

由此可知该选(D).

**【例 7.30】**曲线 $y=x+\sqrt{x^2-x+1}$

(A) 没有渐近线.　　(B) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线.

(C) 有一条铅直渐近线.　　(D) 有两条水平渐近线.　　【　】

**【解】** $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=2.$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

所以 $y=2x-\dfrac{1}{2}$ 为右侧斜渐近线.

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{1}{2}.$$

所以 $y=\dfrac{1}{2}$ 为左侧水平渐近线,故选择(B).

## 题型五 函数作图

提示 作图程序：

① 求出 $y=f(x)$ 的定义域；

② 判别 $y=f(x)$ 的奇偶性、周期性；

③ 求出 $y=f(x)$ 与坐标轴的交点(尽量求，不强求)；

④ 求出 $f'(x)$，求出驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点，求 $f''(x)=0$ 的点及使 $f''(x)$ 不存在的点；

⑤ 求出渐近线；

⑥ 将所求结果按特殊点由小到大排列，列表；

⑦ 绘制曲线(在坐标系中先画出渐近线，特殊点).

**【例 7.31】** 描绘函数 $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的图形.

**【解】** ① 定义域为 $x\neq 1$，即 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

② 与坐标轴的交点为 $(-1,0)$.

③ $y'=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$，令 $y'=0\Rightarrow x=-1, x=5$，使 $y'$ 不存在的点为 $x=1$(因为在该点处原来的函数没有定义，所以也可不写出)，$y''=\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$，令 $y''=0\Rightarrow x=-1$，使 $y''$ 不存在的点为 $x=1$.

④ 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty$，所以 $x=1$ 为 $y$ 的铅直渐近线，

因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=5,$$

所以 $y=x+5$ 为函数的斜渐近线.

⑤ 列表 7-4.

表 7-4

| $x$ | $(\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,5)$ | $5$ | $(5,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | | + | | − | | + |
| $y''$ | − | | + | | + | | + |
| $y$ | ↗ | $(-1,0)$ 拐点 | ↗ | $x=1$ (铅直渐近线) | ↘ | $f(5)=\dfrac{27}{2}$ (极小值) | ↗ |

⑥ 作图(如图 7-5 所示).

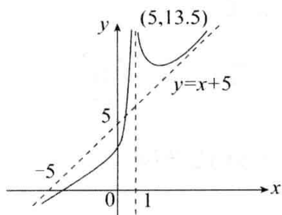
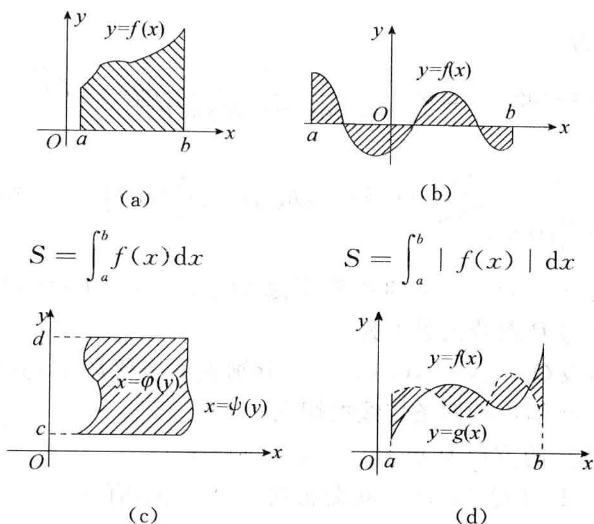



图 7-5

## 题型六　求平面图形的面积

**提示** 1. 直角坐标系中图形的面积(如图 7-6 所示)




$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

图 7-6

$$S=\int_c^d(\psi(y)-\varphi(y))\mathrm{d}y \qquad S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

2. 边界直线为参数方程的图形的面积

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},t_1\leqslant t\leqslant t_2,S=\int_?^?\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

**注** 设一个上下限，若$\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 为“正”的，则它就是图形的面积；若为“负”的，则只要更换一下积分上下限便得所求面积.

3. 极坐标下平面图形的面积(如图 7-7 所示)

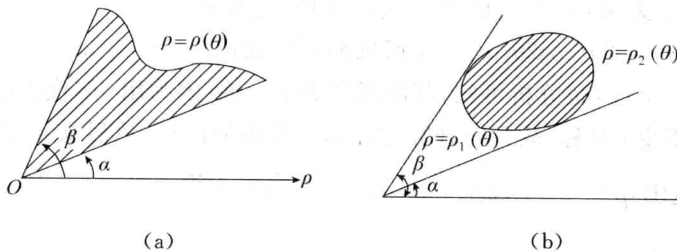



图 7-7

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

**【例 7.32】** 求界于两椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$之间的图形面积.

**【解】** 由于图形的对称性，两椭圆的交点在直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 上，因此所求面积 $S$ 为在第一象限中由直线 $y=x$，$x$ 轴及椭圆$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$所围成图形的面积的 8 倍，为方便起见，将$\frac{x^2}{b^2}+$

$\frac{y^2}{a^2}=1$ 化为极坐标方程.

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 中,得 $\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$.

于是所求面积为

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta=4a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=4b^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta(1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta)}$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta}\mathrm{d}\left(\frac{b}{a}\tan\theta\right)=4ab\arctan\left(\frac{b}{a}\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4ab\arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

**【例 7.33】** 从抛物线 $y=x^2-1$ 上的点 $P$ 引抛物线 $y=x^2$ 的切线,证明该切线与 $y=x^2$ 所围成的面积与 $P$ 点的位置无关.

**【证】** 如图 7-8 所示,设 $Q_1(x_1,y_1)$,$Q_2(x_2,y_2)$ 分别表示从点 $P(x_0,y_0)$ 向抛物线 $y=x^2$ 引出的两条切线的切点.

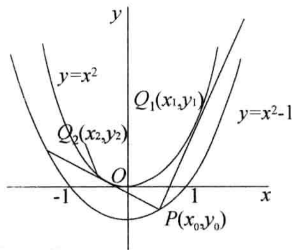


图 7-8

$K_{PQ_1}=2x_1$,$PQ_1$ 的方程为 $y-y_0=2x_1(x-x_0)$.

因为 $y_0=x_0^2-1$,又 $Q_1(x_1,y_1)$ 在抛物线 $y=x^2$ 上,有 $y_1=x_1^2$,

所以 $x_1^2-(x_0^2-1)=2x_1(x_1-x_0)\Rightarrow(x_1-x_0)^2=1$

$\Rightarrow x_1-x_0=\pm1,x_1=x_0+1,x_1=x_0-1$,

于是切线 $PQ_1$,$PQ_2$ 的方程分别为

$$y=2(x_0+1)x-(x_0+1)^2,$$

$$y=2(x_0-1)x-(x_0-1)^2,$$

由 $y=x^2$,$PQ_1$ 及 $PQ_2$ 所围图形面积为

$$S=\int_{x_2}^{x_0}[x^2-2(x_0-1)x+(x_0-1)^2]\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_1}[x^2-2(x_0+1)x+(x_0+1)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_0-1}^{x_0}[x^2-2(x_0-1)x+(x_0-1)^2]\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_0+1}[x^2-2(x_0+1)x+(x_0+1)^2]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

由此可见 $S$ 与 $x_0$ 无关,故 $S$ 与点 $P(x_0,y_0)$ 的位置无关.

**【例 7.34】** 求双纽线 $\rho^2=2a^2\cos2\theta(a>0)$ 所围图形的面积.

**【解】** 通过对方程 $\rho^2=a^2\cos2\theta$ 分析可知,其图形是关于 $x$ 轴(因为用 $-\theta$ 代 $\theta$ 方程不变),$y$ 轴(用 $\pi-\theta$ 代 $\theta$ 方程不变)对称,故只需计算它在第一象限的面积,然后乘 4 即得.现确定第一象限中 $\theta$ 的变化范围:$\rho=0\Rightarrow\cos2\theta=0\Rightarrow2\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$,

于是,$S=4(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\mathrm{d}\theta)=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos2\theta\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}(2\theta)=2a^2\cdot\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2$.

**【例 7.35】** 求摆线的一拱与 $x$ 轴所围图形的面积.

**【解】** 摆线的方程为 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $0\leqslant t\leqslant2\pi$.

$$S=\int_0^{2\pi}y(t)x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2t)\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

【例 7.36】求两曲线 $\rho=\sqrt{2}\cos\theta$ 及 $\rho^2=\sqrt{3}\sin2\theta$ 所围图形公共部分的面积(如图 7-9 所示).

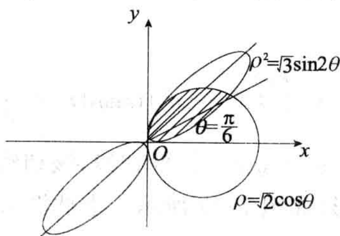



图 7-9

【解】求两曲线的交点.

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{2}\cos\theta\\ \rho^2=\sqrt{3}\sin2\theta\end{cases}\Rightarrow\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6},S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\sin2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}.$$

## 题型七　求立体的体积

提示 (1) 已知平行截面面积的立体体积.

$V=\int_a^b s(x)\mathrm{d}x$(如图 7-10 所示).

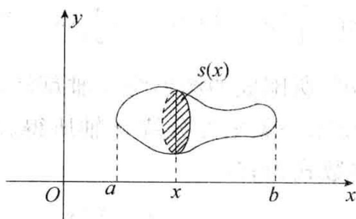
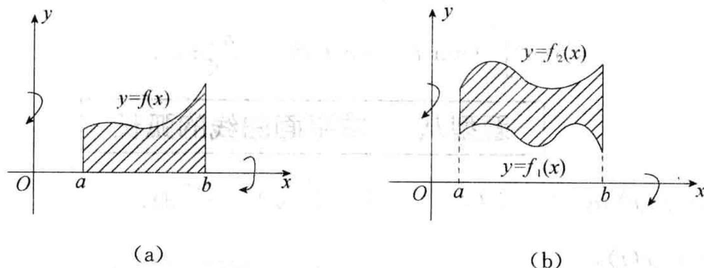



图 7-10

(2) 旋转体体积(如图 7-11 所示)




(a)　　(b)

图 7-11

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \qquad V_x=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]\mathrm{d}x$$

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \qquad V_y=2\pi\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$

【例 7.37】一平面经过半径为 $R$ 的圆柱体的底圆中心并与底面交成角 $\alpha$,计算圆柱体被该平面截割下的那部分体积.

【解】如图 7-12 所示,底圆方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 $x$ 处用垂直于 $x$ 轴的平面截割形体所得截面为一直角三角形 $ABC$,其面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha,$$

故所求形体体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\int_0^R(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

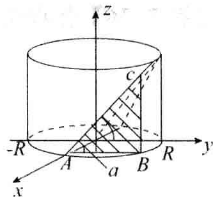


图 7-12

**【例 7.38】** 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 $x$ 轴围成一平面图形(如图 7-13 所示)，求此图形绕 $x$ 轴旋转一周所成的旋转体体积.

**【解】** 设所作切线与抛物线相切于点 $Q(x_0,y_0)$，

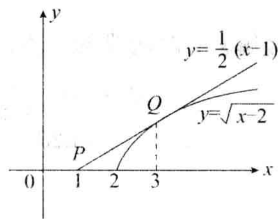


图 7-13

切线 $PQ$ 的斜率 $k=y'|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$，

切线 $PQ$ 的方程 $y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$，

因为 $P$ 点在 $PQ$ 上，所以 $-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0)\Rightarrow x_0=3$，

于是切线方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$，

故所求旋转体体积 $V=\pi\int_1^3\frac{1}{4}(x-1)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$.

**【例 7.39】** 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的图形绕 $x$ 轴旋转所得旋转体体积.

**【解】** 由于图形的对称性，只要算出第一象限部分绕 $x$ 轴所得旋转体的体积，2 倍之即得所求体积. 从本例看，将方程化为参数式为宜：

$$\begin{cases}x=a\cos^3t,\\y=a\sin^3t.\end{cases}$$

故

$$V_x=2\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6t\cdot(-3a\cos^2t\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7t-\sin^9t)\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

## 题型八　求平面曲线的弧长

提示 1. $L:y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$，　$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

2. $L:\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\end{cases}\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，　$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$.

3. $L:\rho=\rho(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，　$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$.

**【例 7.40】** 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的一段弧.

**【解】** $l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x-\frac{1}{2}$$

$$= \ln \frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

**【例 7.41】** 求摆线 $\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 上相应于 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的一拱.

**【解】** $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1-\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 8.$$

## 题型九　求旋转体的侧面积

**提示** 1°　$y = f(x) \geqslant 0, a \leqslant x \leqslant b$,如图 7-14 所示.

$$S_{侧} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

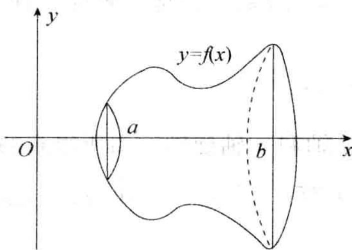



图 7-14

2°　$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$

$$则\ S_{侧} = \int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3°　$r = r(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,$

则 $S_{侧} = \int_\alpha^\beta 2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$

**【例 7.42】** 过原点作曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 的切线,求由此曲线、切线及 $x$ 轴围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

**【解】** 作草图如图 7-15 所示.

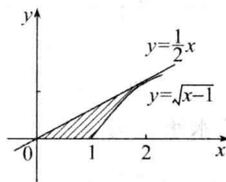



图 7-15

设切点为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$,则过原点的切线方程为

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x.$$

再将点 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$ 代入上式,解得

$$x_0 = 2, y_0 = \sqrt{x_0 - 1} = 1,$$

所以切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$.

由曲线 $y = \sqrt{x-1}(1 \leqslant x \leqslant 2)$绕 $x$ 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_1 = \int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \pi\int_1^2 \sqrt{4x-3}\,dx = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

由直线段 $y = \frac{1}{2}x(0 \leqslant x \leqslant 2)$绕 $x$ 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_2 = \int_0^2 2\pi\,\frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\,dx = \sqrt{5}\,\pi.$$

因此,所求旋转体的表面积为 $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

**【例 7.43】** 求曲线 $\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t - \sin t \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$绕 $x$ 轴和 $y$ 轴旋转一周所得到的旋转面的面积.

**【解】** $\begin{cases} x' = \sin t \\ y' = 1-\cos t \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$,

设 $S_x$ 与 $S_y$ 分别是曲线绕 $x$ 轴和 $y$ 轴旋转一周所得到的旋转面的面积,则

$$S_x = 2\pi\int_0^{2\pi} y \cdot \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt = 16\pi^2,$$

$$S_y = 2\pi\int_0^{2\pi} x \cdot \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{64}{3}\pi.$$

## 题型十　变力做功、引力、液体的静压力

**【例 7.44】** 由抛物线 $y = x^2$ 及 $y = 4x^2$ 绕 y 轴旋转一周构成一旋转抛物面的容器(剖面如图 7-16 所示),高为 $H$. 现于其中盛水,水高 $\frac{H}{2}$,问要将水全部抽出,外力需做多少功?

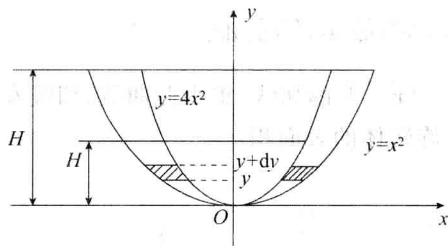



图 7-16

**【解】** 设水的比重为 $\mu$,图中阴影部分的水重量为

$$\pi\left(y - \frac{y}{4}\right)dy \cdot \mu = \frac{3}{4}\pi\mu y\,dy,$$

抽出这部分水外力需做的功为

$$dW = \frac{3}{4}\pi\mu y(H-y)dy,$$

故抽出全部水外力需做的功

$$W = \frac{3}{4}\pi\mu\int_0^{\frac{H}{2}} y(H-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\pi\mu H^3.$$

**【例 7.45】** 半径为 $R$，比重为 $\sigma$(大于 1) 的球沉入深为 $H$(大于 $2R$) 的水池底，现将其从水中取出，需做多少功？

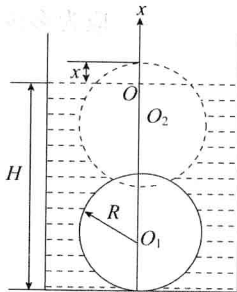


图 7-17

**【解】** 建立坐标系如图 7-17 所示，将球从底捞出所需做的功分为两部分：

(1) 将球从池底提升到球面与水平面相切时所需做的功 $W_1$；

(2) 将球进一步提离水平面所做的功为 $W_2$.

先求 $W_1$，在水中所用外力：

$$F'_{外} = 球重 - 浮力 = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma - \frac{4}{3}\pi R^3，于是$$

$$W_1 = F'_{外}\cdot(H-2R) = \frac{4}{3}\pi R^3(\sigma-1)(H-2R).$$

再求 $W_2$，将球从水平面提出高度为 $x$ 单位时所用外力

$$F''_{外} = 球重 - 浮力 = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma - 水下部分球缺的浮力$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3\sigma - \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma - \pi(2R-x)^2\left[R-\frac{1}{3}(2R-x)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}[4R^3(\sigma-1) - x^3 + 3Rx^2],$$

其中，$h$ 为球缺的高.

故　所需做的功 $W_2 = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}[4R^3(\sigma-1)-x^3+3Rx^2]\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\sigma-1)x - \frac{x^4}{4} + Rx^3\right]_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^4(2\sigma-1),$$

于是将球从池底捞出的外力需做的功为

$$W = W_1 + W_2 = \frac{4}{3}\pi R^3(\sigma-1)(H-2R) + \frac{4}{3}\pi R^4(2\sigma-1)$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3[R+(\sigma-1)H].$$

**【例 7.46】** 边长为 $a$ 和 $b$ 的矩形薄板($a>b$)，放置于与液面成 $\alpha$ 角的液体内，长边平行于液面，位于深 $h$ 处，设液体的比重为 $\sigma$，求薄板所受的压力 $P$.

**提示** 求液体的静压力一定要用帕斯卡定律：静压力 = 液体比重 × 液体深度 × 受力面积.

**【解】** 建立坐标，如图 7-18 所示，当 $x$ 取增量 $\mathrm{d}x$ 时，薄板对应的宽度为 $\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$，于是图中阴影部分的面积为 $a\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$，这小条所受液体的静压力为

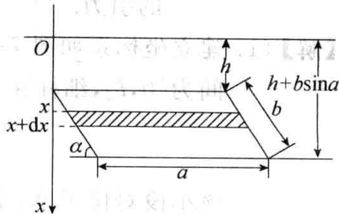


图 7-18

$$\mathrm{d}P = \sigma\cdot x\cdot a\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sin\alpha} = \frac{a\sigma x}{\sin\alpha}\mathrm{d}x,$$

整块薄板所受压力为

$$P = \int_h^{h+b\sin\alpha}\frac{a\sigma x}{\sin\alpha}\mathrm{d}x = \frac{a\sigma}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_h^{h+b\sin\alpha} = ab\sigma\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right).$$

**【例 7.47】** 某闸门的形状与大小如图 7-19(a) 所示，其中直线 $l$ 为对称轴，闸门的上部为矩形

$ABCD$，下部由二次抛物线与线段 $AB$ 所围成．当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5：4，闸门矩形部分的高 $h$ 应为多少 m？

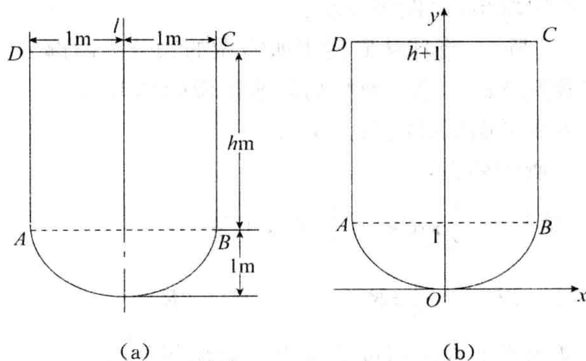



图 7-19

【解】如图 7-19(b) 所示，建立坐标系，则抛物线的方程为 $y=x^2$．闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y$$

$$=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1}=\rho g h^2,$$

其中，$\rho$ 为水的密度，$g$ 为重力加速度．闸门下部承受的水压力

$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

由题意知，$\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{5}{4}$，即 $\dfrac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\dfrac{5}{4}$，得 $h=2$，$h=-\dfrac{1}{3}$（舍去），故 $h=2$．即闸门矩形部分的高应为 2m．

【例 7.48】设有一质量均匀的细直杆 $AB$，其长为 $l$，质量为 $M$．

(1) 在 $AB$ 的延长线上与端点 $B$ 的距离 $a$ 处有一质量为 $m$ 的质点 $N_1$，试求细杆对点 $N_1$ 的引力；

(2) 在 $AB$ 的中垂线上到杆的距离为 $a$ 处有一质量为 $m$ 的质点 $N_2$，试求细杆对点 $N_2$ 的引力．

【解】(1) 建立坐标系如图 7-20(a) 所示，积分变量为 $x$，积分区间为 $[0,l]$，细杆在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 这一段的质量为

$$\mathrm{d}M=\frac{M}{l}\mathrm{d}x,$$

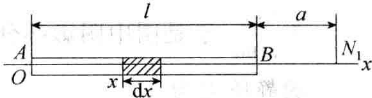



图 7-20(a)

该小段对位于 $N_1$ 处的质点的引力为

$$\mathrm{d}F=k\frac{\frac{M}{l}\mathrm{d}x\cdot m}{(l+a-x)^2},$$

其中 $k$ 为引力系数，于是细杆 $AB$ 对质点 $N_1$ 的引力为

$$F=\int_0^l k\frac{Mm}{l(l+a-x)^2}\mathrm{d}x=\frac{kMm}{l}\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{(l+a-x)^2}=\frac{kMm}{a(l+a)}.$$

(2) 建立坐标系如图 7-20(b) 所示，积分变量为 $x$，变化区间为 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$，细杆在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 这一段的质量为 $\mathrm{d}M=\frac{M}{l}\mathrm{d}x$.

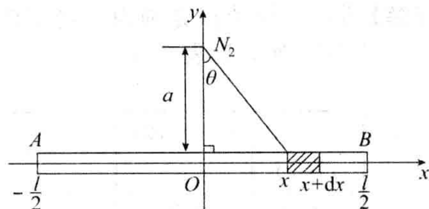


图 7-20(b)

由于对称性，在 $x$ 轴正方向与负方向的一小段 $\mathrm{d}x$ 对 $N_2$ 的引力在 $x$ 轴上的投影为 0，

则 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 这段上的 $\mathrm{d}x$ 对 $N_2$ 点在 $y$ 轴的分力为

$$\mathrm{d}F_y=k\frac{Mm\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)l}\cos\theta=\frac{kMma}{l}\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

令 $x=a\tan t,\mathrm{d}x=a\sec^2\mathrm{d}t$，则

$$F_y=\frac{kMma}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2kMma}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2kMm}{al}\int_0^{\arctan\frac{l}{2a}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{2kMm}{a\sqrt{4a^2+l^2}}.$$

## 第 3 节　思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　已知函数的图形判断导函数的图形或已知导函数的图形判断函数的图形时，则要想到先用列表法处理.

**【例 7.49】** 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$f(x)$ 的图形如图 7-21 所示.

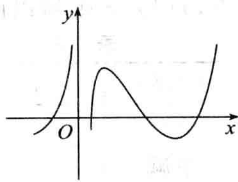


图 7-21

则其导函数的图形（如图 7-22 所示）为

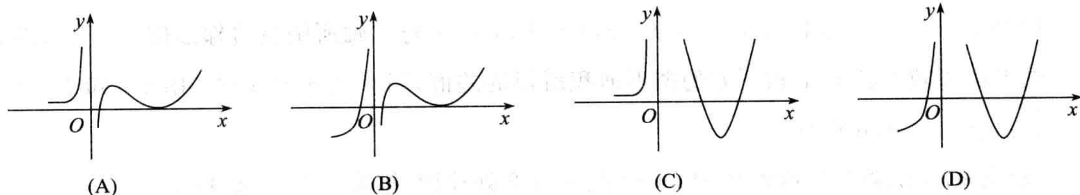


图 7-22

【　】

【分析】对于根据函数图形判断导函数图形或根据导函数图形判断函数图形的命题，一般找出特殊点（极值点，拐点，不可导点等）作为分界点，然后列表进行判断.

【解】设两个极值点分别为 $\xi_1,\xi_2$，则 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，则将点 $x=0,x=\xi_1,x=\xi_2$ 作为分界点，列表见表 7-5.

表 7-5

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,\xi_1)$ | $\xi_1$ | $(\xi_1,\xi_2)$ | $\xi_2$ | $(\xi_2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | + | | − | | + |
| $f(x)$ | 单增 | | 单增 | | 单减 | | 单增 |

由表 7-5 可知，应选(C).

【例 7.50】设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形（如图 7-23 所示）为

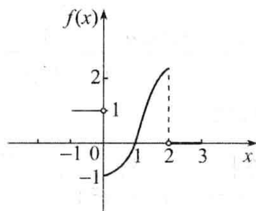


图 7-23

则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形（如图 7-24 所示）为

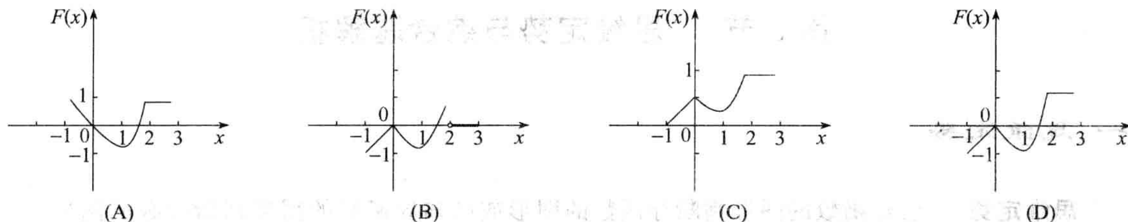


图 7-24

【　】

【解】由图可知，$x=0,x=2$ 为间断点，$f(1)=0$，所以以 $x=0,1,2$ 为分隔点列表见表 7-6.

表 7-6

| $x$ | $(-1,0)$ | 0 | $(0,1)$ | 1 | $(1,2)$ | 2 | $(2,3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | | − | | + | | 0 |
| $F(x)$ | 单增 | | 单减 | | 单增 | | 常数 |

于是

(1) 在区间 $(-1,0)$ 内，$f(x)\geqslant 0$，则 $F(x)$ 在此区间单调递增，排除(A).

(2) $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 表示 $y=f(x),x=0,x=x$ 与 $x$ 轴所围曲边梯形位于 $x$ 轴上方的图形面积减去位于 $x$ 轴下方的图形面积所得的差值，当 $0<x<1$ 时，由图可知 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<0$，排除(C).

(3) 根据原函数的连续性可知 $F(x)$ 在 $x=2$ 处连续，排除(B)，故选(D).

## 二、综合题解析

【例 7.51】函数 $f(x)$ 对于一切实数 $x$ 满足微分方程

$$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}, \quad ①$$

(1) 若 $f(x)$ 在点 $x=c(c\neq 0)$ 有极值，试证它是极小值；

(2) 若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 有极值，则它是极大值还是极小值？

**【解】**(1) 由 $f(x)$ 可导，且它在 $x=c$ 处有极值，故 $f'(c)=0,(c\neq 0)$，将 $x=c$ 代入 ① 式，得

$$cf''(c)+3c[f'(c)]^2=1-e^{-c}.$$

$$\Rightarrow f''(c)=\frac{1-e^{-c}}{c}>0,$$

故 $f(c)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

(2) 因为 $f(x)$ 对一切实数 $x$ 二阶可导，又 $f(0)$ 为极值，所以 $f'(0)=0$，且

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0,$$

又 $$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f''(x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)^2]\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^{-x}=1,$$

故 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

**【例 7.52】** 设 $f(x)=-2a+\int_0^x(t^2-a^2)\mathrm{d}t$，试求

(1) 将 $f(x)$ 的极大值 $M$ 用 $a$ 表示出来；

(2) 将(1) 中的 $M$ 看做 $a$ 的函数，求 $M$ 为极小值时 $a$ 的值.

**【解】**(1) $f'(x)=x^2-a^2,f''(x)=2x$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=a,x_2=-a$，于是

$$f''(a)=2a,f''(-a)=-2a.$$

① 当 $a>0$ 时，$f''(-a)=-2a<0$，则

$$M=f(-a)=-2a+\int_0^{-a}(t^2-a^2)\mathrm{d}t=-2a+\frac{2}{3}a^3 \quad (\text{极大值}).$$

② 当 $a<0$ 时，$f''(a)=2a<0$，

$$M=f(a)=-2a+\int_0^{a}(t^2-a^2)\mathrm{d}t=-2a-\frac{2}{3}a^3 \quad (\text{极大值}).$$

(2) 当 $a>0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}a}=-2+2a^2=2(a^2-1),\text{令}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}a}=0\Rightarrow a=1,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=1}=4a\Big|_{a=1}=4>0,$$

故 $a=1$ 时，$M$ 为极小值.

当 $a<0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}a}=-2-2a^2=-2(a^2+1)<0,$$

所以 $M$“↘”，故 $M$ 没有极值.

**【例 7.53】** 对一切实数 $t$，函数 $f(t)$ 是连续的正函数，又 $f(-t)=f(t)$，函数

$$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t,-a\leqslant x\leqslant a \quad (a\geqslant 0),$$

(1) 证明 $g'(x)$ 是单调增大的；

(2) 求出使函数 $g(x)$ 取最小值的 $x$ 值；

(3) 将函数 $g(x)$ 的最小值作为 $a$ 的函数，它等于 $f(a)-a^2-1$ 时，求 $f(t)$.

**【解】**(1) $g(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)\mathrm{d}t$

$$=x\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-a}^{x}tf(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{a}tf(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}xf(t)\mathrm{d}t,$$

$$g'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t+xf(x)$$

$$=\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t,$$

$g''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)>0$(因为 $f(x)>0$)，

故 $g'(x)$ 单调递增.

(2) 令 $g'(x)=0$，即$\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t$.

因为$\int_{-a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令}t=-u}\int_{a}^{-x}f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-x}^{a}f(-u)\mathrm{d}u$

$$=\int_{-x}^{a}f(t)\mathrm{d}t(\text{因为 }f(-t)=f(t)),$$

所以$\int_{-x}^{a}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x}^{a}f(t)\mathrm{d}t\xRightarrow{\text{因为}f(t)>0}-x=x\Rightarrow x=0$，

$g(0)=2\int_{0}^{a}tf(t)\mathrm{d}t, g(a)=g(-a)=2a\int_{0}^{a}f(t)\mathrm{d}t.$

因为 $0<t<a, f(t)>0$.

所以 $g(0)<g(a)=g(-a)$.

所以 $x=0$.

(3)$g(0)=\int_{-a}^{a}|t|f(t)\mathrm{d}t=f(a)-a^2-1$，即

$$\int_{-a}^{0}(-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{a}tf(t)\mathrm{d}t=f(a)-a^2-1 \qquad ②$$

$$\Rightarrow -[af(-a)\cdot(-1)]+af(a)=f'(a)-2a$$

$$\Rightarrow 2af(a)=f'(a)-2a \quad (\text{因为 }f(-a)=f(a))$$

$$\Rightarrow f'(a)=2af(a)+2a=2a(f(a)+1)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(a)}{f(a)+1}=2a$$

$$\Rightarrow \ln[f(a)+1]=a^2+C,$$

由 ② 可知，当 $a=0$ 时，$f(0)=1$，代入上式，得 $C=\ln2$，

故 $$f(a)+1=\mathrm{e}^{a^2+\ln2}=2\mathrm{e}^{a^2},$$

即 $$f(t)=2\mathrm{e}^{t^2}-1.$$

**【例 7.54】**证明：当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\int_{0}^{x}(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$($n$ 为正整数) 的最大值不超过

$$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

**【证】**$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x$，显然 $f'(x)$ 与 $x-x^2=x(1-x)$ 同号，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$“↗”；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$“↘”，又 $x=1$

时，$\sin^{2n}x \neq 0$，所以 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值，故也是 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的最大值. 又因为 $0 \leqslant t < 1 < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin^{2n}t \leqslant t^{2n}$.

所以
$$f(1) = \int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

故
$$\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

## 习　题　七

**1. 选择题.**

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 $x_1, x_2$，当 $x_1 > x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，则

A. 对任意 $x$，$f'(x) > 0$.　　B. 对任意 $x$，$f'(-x) \leqslant 0$.

C. 函数 $f(-x)$ 单调增加.　　D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加.　　【　】

(2) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，当 $a$ 为何值时，$F(a) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - a\cos nx]^2 \mathrm{d}x$ 取极小值

A. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.　　B. $\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.

C. $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.　　D. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.　　【　】

(3) 函数 $y = f(x)$ 具有下列特征：

$f(0) = 1$；$f'(0) = 0$，当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) > 0$；$f''(x)\begin{cases} < 0, x < 0, \\ > 0, x > 0, \end{cases}$ 则其图形（如图 7-25 所示）是

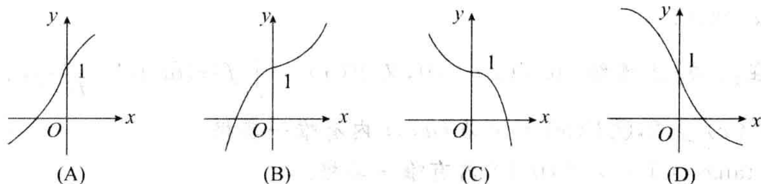



图 7-25

【　】

(4) 设三次函数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，若两个极值点及其对应的两个极值均为相反数，则这个函数的图形是

A. 关于 $y$ 轴对称.　　B. 关于原点对称.

C. 关于直线 $y = x$ 对称.　　D. 以上均错.　　【　】

(5) 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 $x$ 轴所围图形面积可表示为

A. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x - \int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

C. $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.　　【　】

**2. 填空题.**

(1) 函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})\mathrm{d}t(x>0)$ 的单调减少区间为________.

(2) 曲线 $y=x^3-x$ 与其在 $x=\frac{1}{3}$ 处的切线所围成的部分被 $y$ 轴分成两部分，这两部分面积之比是________.

(3) 二椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad(a>b>0)$ 之间的图形的面积为________.

(4) $x^2+y^2=a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体体积为________.

(5) 求心脏线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 和直线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成的图形绕极轴旋转所成旋转体体积为________.

(6) $y=\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 绕 $x$ 轴旋转所成旋转面的面积为________.

(7) $r=a(1+\cos\theta)\quad(a>0)$ 绕极轴旋转所成旋转面的面积为________.

**3. 证明题.**

(1) 设 $f(x)$ 为连续正值函数，证明当 $x\geqslant 0$ 时函数 $\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 单调增加.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内 $f''(x)>0$，证明：$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 $(a,b)$ 内单调增加.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$，求证：$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(a,b)$ 内 $F'(x)\leqslant 0$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，又 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

证明：① $F'(x)\geqslant 2$，② $F(x)=0$ 在 $(a,b)$ 内有唯一实根.

(5) 证明方程 $\tan x=1-x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根.

(6) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n$ 个实数，并满足 $a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$.

证明：方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一实根.

**4. 计算题.**

(1) 在直线 $x-y+1=0$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 的交点上引抛物线的法线，试求由两法线及连接两交点的弦所围成的三角形的面积.

(2) 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 $P(a,a^2)$ 作切线，问 $a$ 为何值时所作切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围图形面积最小？

(3) 求通过点 $(1,1)$ 的直线 $y=f(x)$ 中，使得 $\int_0^2[x^2-f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为最小的直线方程.

(4) 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值与最小值.

(5) 求曲线 $y=x^3-2x$ 与 $y=x^2$ 所围阴影部分面积 $S$，并将此面积绕 $y$ 轴旋转，求此旋转体

体积，如图 7-26 所示.

(6) 已知圆 $(x-b)^2+y^2=a^2$，其中 $b>a>0$，求此圆绕 $y$ 轴旋转所构成的旋转体体积和表面积.

(7) 设有一薄板其边缘为一抛物线，如图 7-27 所示，铅直沉入水中，

① 若顶点恰好在水平面上，试求薄板所受的静压力，将薄板下沉多深，压力加位？

② 若将薄板倒置使弦恰在水平面上，水薄板所受静压力，将薄板下沉多深时，压力加倍？

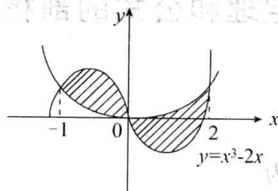



图 7-26

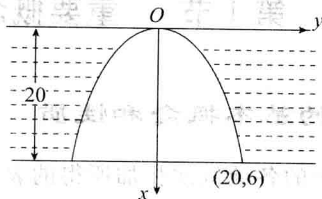



图 7-27

**5. 作图.**

(1) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$；　　(2) $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

## 参　考　答　案

**1.** (1)D　(2)B　(3)B　(4)B　(5)C

**2.** (1) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　(2)8 : 1　(3) $S=4ab\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$　(4) $2ba^2\pi^2$　(5) $160\pi$

(6) $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$　(7) $\dfrac{32}{5}\pi a^2$

**3.** 略.

**4.** (1) $\dfrac{15}{4}$　(2) $a=1, S_{\min}=\dfrac{4}{3}$　(3) $y=2x-1$.

(4) $f(\pm\sqrt{2})=1+e^{-2}$ 为最大值，$f(0)=0$ 为最小值.

(5) $S=\dfrac{37}{12}, V_y=\dfrac{63}{10}\pi$.

(6) $S=4\pi^2ab, V_y=2a^2b\pi^2$.

(7) ① $P=1920, h=12$，② $P=1280, h=8$.

**5.** 略.

# 第八章　无穷级数

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、无穷级数的基本概念和性质

**定义1**　数列$\{u_n\}$的各项依次相加所得的表达式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数(简称级数).

**定义2**　令

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i,$$

若$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$(有限数),则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,$s$为其和,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

基本性质:

(1) 设常数$c \neq 0$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$有相同的敛散性;

(2) 设有两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$,

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$;

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$发散;

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$均发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$敛散性不确定.

(3) 添加或去掉有限项不影响一个级数的敛散性.

(4) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则对其各项任意加括号后所得新级数仍收敛于原级数的和.

注 ① 一个级数加括号后所得新级数发散,则原级数发散.

② 一个级数加括号后收敛,原级数敛散性不确定.

(5) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要条件:$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

注 ① 级数收敛的必要条件常被用来判别级数发散. ② 也可用它求或验证极限值为"0"的极限.

**【例8.1】**判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2n+5}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(1+n)^n}$.

**【解】**(1) 因为$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n+5}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{8} \neq 0$,所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(2) 因为$\lim_{n\to\infty} u_n = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} \neq 0$,所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**【例 8.2】**求下列极限.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$; (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdot\cdots\cdot(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdot\cdots\cdot(nb+1)}$ $(b>a>0)$.

**【解】**(1) 先考虑$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ 的敛散性.

因为
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛.

故
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

(2) 考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdot\cdots\cdot(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdot\cdots\cdot(nb+1)}$.

因为
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdot\cdots\cdot(na+1)[(n+1)a+1]}{(b+1)(2b+1)\cdot\cdots\cdot(nb+1)[(n+1)b+1]} \cdot \frac{(b+1)(2b+1)\cdot\cdots\cdot(nb+1)}{(a+1)(2a+1)\cdot\cdots\cdot(na+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1} = \frac{a}{b} < 1,$$

所以级数收敛.

故
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdot\cdots\cdot(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdot\cdots\cdot(nb+1)} = 0(\text{当 } b>a>0 \text{ 时}).$$

## 二、数项级数判敛法

### (一) 正项级数敛散性的判敛法

#### 1. 比较判别法

若 $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$,则
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}.$$

比较法的极限形式:

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数,且$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A(v_n \neq 0)$,

(1) 若 $0 \leqslant A < +\infty$,且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若 $0 < A \leqslant +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注 由比较判别法可推出如下快速的判别法

① 若分母，分子关于 $n$ 的最高次数分别为 $p$ 和 $q$，

当 $p-q>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geqslant 0)$ 收敛；

当 $p-q \leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

② 若当 $n \to \infty$ 时，$u_n \sim v_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性.

例如：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3n+1}{\sqrt{3n^7+n^2+2}}$ 收敛(因为 $p-q=\frac{7}{2}-2=\frac{3}{2}>1$)；

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \tan\frac{\pi}{2^n}$ 发散 $\left(因 n \to \infty, 3^n \tan\frac{\pi}{2^n} \sim \pi(\frac{3}{2})^n, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n 发散\right)$.

常用的比较级数：

(1) 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r|<1 \\ 发散, & |r| \geqslant 1 \end{cases}$；

(2) $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 收敛, p>1 时 \\ 发散, p \leqslant 1 时 \end{cases}$；

(3) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$，发散.

**2. 比值判别法(适用于 $u_n$ 中含有 $n!$ 或关于 $n$ 的若干连乘积的形式)**

$$设 \sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geqslant 0), \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho>1, \sum u_n 发散 \\ \rho=1, 方法失效 \\ \rho<1, \sum u_n 收敛 \end{cases}.$$

**3. 根值判别法(适用于 $u_n$ 中含有以 $n$ 为指数幂的因子)**

$$设 \sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geqslant 0), \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} \rho>1, \sum u_n 发散 \\ \rho=1, 方法失效 \\ \rho<1, \sum u_n 收敛 \end{cases}.$$

注 (1) 比值与根值法条件是充分但非必要的.

$$由 \sum u_n (u_n \geqslant 0) 收敛 \nRightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1,$$

$$\nRightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho < 1.$$

(2) 凡涉及证明的命题一般不用比值法与极值法，而用比较判别法，见例 8.3 和例 8.4.

**【例 8.3】** 设 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, (n=1,2,\cdots,a_n>0,b_n>0)$，求证：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

【错误证明】(1) 因为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\rho<1$，

又由题设$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\rho<1$，

故有$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2) 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$，

又因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\geqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$，

故有$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散.

【错因分析】出错的原因是将正项级数的比值判别法当做收敛与发散的充要条件！

【正确证法】由$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，$(a_n>0,b_n>0)$，显然有

$$\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{b_2}{b_1}\quad\Rightarrow\quad a_2\leqslant\frac{a_1}{b_1}b_2$$

$$\frac{a_3}{a_2}\leqslant\frac{b_3}{b_2}\quad\Rightarrow\quad a_3\leqslant\frac{a_2}{b_2}b_3\leqslant\frac{a_1}{b_1}b_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\quad\Rightarrow\quad a_{n+1}\leqslant\frac{a_n}{b_n}b_{n+1}\leqslant\frac{a_1}{b_1}b_{n+1},$$

由正项级数的比较判别法可知：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散.

【例 8.4】若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant0)$收敛，则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$收敛，

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$收敛，(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{m^2+n^2}\right)$收敛.

【证】(1) 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant0)$收敛，所以$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，

由极限定义，取$\varepsilon=1$，于是存在正整数$N$，当$n>N$时，恒有$a_n<1$，

因此$a_n^2=a_n\cdot a_n<1\cdot a_n$，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，由正项级数的比较判别法，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

(2) $\frac{\sqrt{a_n}}{n}=\sqrt{\frac{a_n}{n^2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+a_n\right)$，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}+a_n)$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$收敛.

(3) 因为 $a_n \geqslant 0$，$\dfrac{a_n}{1+a_n} \leqslant a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 收敛.

(4) 令 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{m^2+n^2} = u_n$，

因为 $\dfrac{u_n}{a_n} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2+n^2} < \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+n^2} = \dfrac{1}{n}\arctan \dfrac{x}{n}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2n}$，

所以 $u_n < \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{a_n}{n} < \dfrac{\pi}{2} a_n$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{m^2+n^2}\right)$ 收敛.

### (二) 交错级数的判敛法

**莱布尼茨判敛准则**

若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$ 满足如下条件：

$$(1) u_n \geqslant u_{n+1}, (n=1,2,\cdots), \qquad (2) \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

则交错级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$，其 $n$ 项余和的绝对值 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

用莱布尼茨准则判别交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$ 是否收敛时，要考查 $u_n$ 与 $u_{n+1}$ 的大小，比较 $u_n$ 与 $u_{n+1}$ 的大小的方法有三种：

(1) 比值法，即考查 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否小于 1；

(2) 差值法，即考查 $u_n - u_{n+1}$ 是否大于 0；

(3) 由 $u_n$ 找出一个连续可导函数 $f(x)$，使 $u_n = f(n)(n=1,2,\cdots)$，考查 $f'(x)$ 是否小于 0.

**【例 8.5】** 判别下列级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n};(2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n};(3)\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}).$$

**【解】** (1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0$，可知莱布尼茨判别的条件(2) 满足，但条件(1) 不满足，

故用莱氏判别法是无法判别的，但是因为

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1},$$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n-1}$ 发散，

故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 发散.

(2) 由 $u_n = \dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 想到函数 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$，

因为 $f'(x) = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} < 0$ （当 $x$ 取足够大的正数），

所以 $f(x)$“↘”，于是

①$u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}=0$,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 收敛.

(3) 因为 $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+a^2}-n)\pi]=(-1)^n\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$.

因为当 $n$ 充分大时,$0<\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\dfrac{\pi}{2}$,而正弦函数 $\sin x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 是单调增大的.

所以 ① $u_n=\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}>u_{n+1}=\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{(n+1)^2+a^2}+(n+1)}$,

又 ② $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=0$,

故由莱氏准则可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 收敛.

### (三) 任意项级数的判敛法

**定义** 设有一任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$(即 $u_n$ 可正,可负,可0),若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛级数.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛级数.

**定理 1** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

**定理 2** 条件收敛级数的所有正项(或负项)所构成的级数一定发散.

**【例 8.6】** 设常数 $k>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$

(A) 发散. (B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛. (D) 收敛或发散与 $k$ 的取值有关. 【 】

**【解】** 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$,前一级数绝对收敛,后一级数条件收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ 条件收敛,故(C)入选.

**【例 8.7】** 设 $\alpha$ 为常数且 $\alpha>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$

(A) 发散. (B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛. (D) 收敛性与 $\alpha$ 有关. 【 】

**【解】** 因为 $\left|(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)\right|=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2n}\sim\dfrac{\alpha^2}{2n^2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\alpha^2}{2n^2}$ 绝对收敛,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$ 绝对收敛. 故选(C).

【例 8.8】已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} = 5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于

(A)3.　　(B)7.

(C)8.　　(D)9.　　【　】

【解】因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots$，

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots$，

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2\times 5 - 2 = 8$. 故选(C).

## 三、函数项级数的概念

**定义 1**　设 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ 为定义在 $(a,b)$ 内的函数序列，则式子

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为定义在 $(a,b)$ 内的函数项级数.

**定义 2**　设 $x_0 \in (a,b)$，若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛(或发散)，则称 $x_0$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点(或发散点). 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的所有收敛点(或发散点)称为其收敛域(或发散域).

**定义 3**　设 $\{s_n(x)\}$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 $n$ 项和序列，若极限 $\lim_{n\to\infty}s_n(x) = s(x)$，$x \in (a,b)$ 存在，则 $s(x)$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.

## 四、幂级数的概念和性质

### 1. 幂级数的概念

**定义 1**　如下形式的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

称为 $(x-x_0)$ 的幂级数，其中 $a_n$ 为常数.

当 $x_0 = 0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，称为 $x$ 的幂级数.

**定义 2**　设任一幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 $(a,b)$ 内收敛，在 $(a,b)$ 外发散($x=a$，$x=b$ 发散与否不考虑)，则称

$$R = \frac{b-a}{2}$$

为幂级数的收敛半径.

<u>收敛半径的类型</u>：

(1) $R = 0$，此时收敛域仅为一点；

(2) $R = +\infty$，此时收敛域为 $(-\infty, +\infty)$；

(3)$R=$ 某定常数,此时收敛域为一个有限区间.

**2. 幂级数的四则运算性质**

设有两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=g(x)$,其收敛半径分别为 $R_1,R_2,R=\min(R_1,R_2)$,则对于任意 $x\in(-R,R)$ 有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x)$,且在 $(-R,R)$ 内绝对收敛;

(2) $(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n=f(x)g(x)$;

(3) 设 $b_0\neq 0$,则在 $x=0$ 的足够小的邻域内

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots.$$

利用多项式的长除法可得:$C_0=\frac{a_0}{b_0},C_1=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2},\cdots$

**3. 幂级数的分析性质**

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R$,则在 $(-R,R)$ 内有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $f(x)$ 是连续的;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可逐项微分,且

$$f'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},x\in(-R,R);$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可逐项积分,且

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},x\in(-R,R).$$

**4. 函数的幂级数展开**

**泰勒级数**:设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某一邻域内具有任意阶导数,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数.

当 $x_0=0$ 时,级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots,$$

称此级数为麦克劳林级数.

**定理** 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 某一邻域内具有任意阶导数,则泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$,其中

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)^{n+1},0<\theta<1.$$

常用函数的展开式:

(1) $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n, u\in(-1,1)$

(2) $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots+(-1)^nu^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nu^n, u\in(-1,1)$

(3) $e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}, u\in(-\infty,+\infty)$

(4) $\sin u=u-\frac{1}{3!}u^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}u^{2n+1}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, u\in(-\infty,+\infty)$$

(5) $\cos u=1-\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{4!}u^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}u^{2n}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}, u\in(-\infty,+\infty)$$

(6) $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}, u\in(-1,1]$$

(7) $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+\cdots, u\in(-1,1)$,端点 $u=-1,u=1$ 处是否收敛随 $\alpha$ 而定,但(7)式在 $(-1,1)$ 内总有意义.

## 五、傅里叶级数的概念及定理

### 1.概念

三角函数族的正交性:

$\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 之中任两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,2\pi]$ 上积分为零,即

$$\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0,(m\neq n)\\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0,(m\neq n)\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi.\end{cases}$$

**定义 1** 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数,且在 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,2\pi]$ 上可积,则

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,(n=0,1,2,\cdots)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx,(n=1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}$$ 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

**定义 2**　以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的三角级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

称为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数,表示为

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

**定义 3**　设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数,且在 $[-l,l]$ 上可积,则以

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,(n=1,2,\cdots),$$

为系数的三角级数　$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级,表示为 $f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$.

**2. 收敛定理(狄里赫莱的充分条件)**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足条件:

1°　除有限个第一类间断点外都是连续的.

2°　只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛,且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases}f(x), & x\text{ 是 }f(x)\text{ 的连续点;}\\ \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)], & x_0\text{ 是 }f(x)\text{ 的第一类间断点;}\\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)], & x=\pm\pi,\end{cases}$$

其中,　$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x);f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x).$

**【例 8.9】**填空题.

(1) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数为 $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则系数 $b_3$ 的值为________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi<x\leqslant 0\\ 1+x^2,0<x<\pi\end{cases}$,则以 $2\pi$ 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于________.

(3) 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数,其表达式为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0\\ x^3,0<x\leqslant 1\end{cases}$,则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于________.

**【解】**(1) 傅里叶系数公式

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,dx$$

$$\xlongequal{\text{由奇偶积分性质}}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi x\sin 3x\,dx=2\left[-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi.$$

(2) 由狄里赫莱收敛定理,可知傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\lim\limits_{x\to\pi^-}(1+x^2)+\lim\limits_{x\to-\pi^+}(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

(3) 由狄里赫莱收敛定理,可知傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于

$$\frac{f(1-0)+f(-1+0)}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}.$$

周期与非周期函数傅里叶级数一览表见表 8-1

**表 8-1**

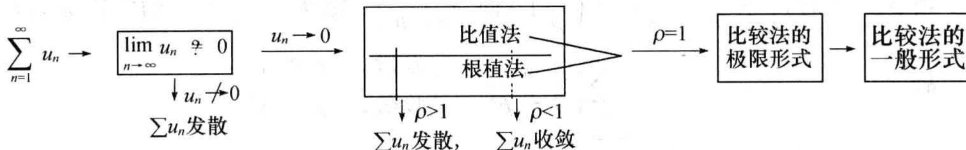
<table>
<tr><td rowspan="3">周期函数的傅里叶级数</td><td>一般函数</td><td>以 $2\pi$ 为周期的函数 $f(x)$<br>$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$<br>$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$<br>$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$</td><td>以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$<br>$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$<br>$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$<br>$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$</td></tr>
<tr><td>偶函数</td><td>以 $2\pi$ 为周期,且 $f(x)=f(-x)$<br>$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$(余弦级数)<br>$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$<br>$b_n=0(n=1,2,\cdots)$</td><td>以 $2l$ 为周期,且 $f(x)=f(-x)$<br>$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$(余弦级数)<br>$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$<br>$b_n=0(n=1,2,\cdots)$</td></tr>
<tr><td>奇函数</td><td>以 $2\pi$ 为周期,且 $f(x)=-f(-x)$<br>$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$(正弦级数)<br>$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$<br>$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$</td><td>以 $2l$ 为周期,且 $f(x)=-f(-x)$<br>$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$(正弦级数)<br>$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$<br>$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">非周期函数的傅里叶级数</td><td>偶开拓</td><td>$f(x)$ 为$[0,\pi]$上的非周期函数<br>令 $F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ f(-x), & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$<br>则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在$[-\pi,\pi]$上为偶函数<br>$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$(余弦级数)<br>$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$</td><td>$f(x)$ 为$[0,l]$上的非周期函数<br>令 $F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ f(-x), & -l\leqslant x<0,\end{cases}$<br>则 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$(余弦级数)<br>$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$</td></tr>
<tr><td>奇开拓</td><td>$f(x)$ 为$[0,\pi]$上的非周期函数<br>令 $F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -f(-x), & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$<br>则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在$[-\pi,\pi]$上为奇函数<br>$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$(正弦级数)<br>$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$</td><td>$f(x)$ 为$[0,l]$上的非周期函数<br>则令<br>$F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ -f(-x), & -l\leqslant x<0,\end{cases}$<br>则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在$[-\pi,\pi]$上为奇函数<br>$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$(正弦级数)<br>$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$</td></tr>
</table>

注 $\cos n\pi=(-1)^n,\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n.$

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　正项级数的判敛

提示 正项级数的判敛程序：




【例 8.10】判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n} (x>0)$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos \frac{\pi}{n})$；　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+p^n} (p>0)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}(3n-1)}$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$；　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an^2+bn+c)^a} (a>0,b>0)$.

【解】(1) 因为 $u_n$ 中含有 $n!$，所以用比值法.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 用比值法，根值法 $\rho=1$，改用比较法的极限形式判别，

因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e}$，

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(3) 因为当 $n\to\infty$ 时，$2^n \sin \frac{x}{3^n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n x$，$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n} (x>0)$ 收敛.

(4) 因为 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{2} < 1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(5) 因为当 $n\to\infty$ 时，$1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\sim 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(6) 当 $0<p<1$ 时，$u_n\to 1(n\to\infty)$；当 $p=1$ 时，$u_n=\frac{1}{2}(n\to\infty)$；

当 $p>1$ 时，$\frac{1}{1+p^n}\sim\frac{1}{p^n}=\left(\frac{1}{p}\right)^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^n$ 收敛(为 $\frac{1}{p}<1$ 的等比级数).

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+p^n}=\begin{cases}\text{发散}, & p\leqslant 1\\ \text{收敛}, & p>1\end{cases}.$$

(7) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\frac{1}{2}<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(8) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n-1}(3n-1)}}=\frac{1}{4}<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(9) 取 $v_n=\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}}=0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛.

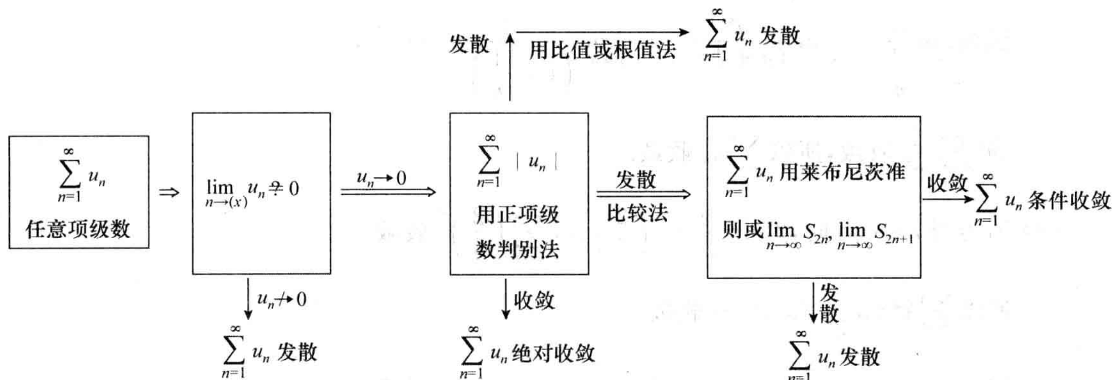
(10) 因为 $u_n=\frac{1}{(an^2+bn+c)^{\alpha}}\sim\frac{1}{a^{\alpha}n^{2\alpha}}$，

而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\alpha}n^{2\alpha}}=\frac{1}{a^{\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}\begin{cases}\text{收敛，当 }\alpha>\frac{1}{2}\text{ 时}\\ \text{发散，当 }\alpha\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时}\end{cases}.$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(an^2+bn+c)^{\alpha}}\begin{cases}\text{收敛，当 }\alpha>\frac{1}{2}\text{ 时}\\ \text{发散，当 }\alpha\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时}\end{cases}.$$

## 题型二　任意项级数的判敛

**提示** 任意项级数的判敛程序：




**【例 8.11】** 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$.

**【解】**(1) 因为 $0<u_n=\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx<\int_n^{n+1}e^{-x}dx=\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{e^n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ 收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ 绝对收敛.

(2) $u_n=\frac{1}{n^p}$，当 $p\leqslant 0$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\neq 0$，于是 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\not\to 0(n\to\infty)$，故级数发散；当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 绝对收敛. 当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，但由于该级数为交错级数且满足：

1° $u_n=\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}=u_{n+1}$；

2° $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$.

由莱布尼茨准则，可知

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 条件收敛.

**【例 8.12】**讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$ 的敛散性. 其中，$\alpha,\beta$ 为常数.

**【解】**$u_n=\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi=\sin\left[n\pi+\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi\right]=(-1)^n\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi$，

1° 当 $\alpha\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2° 当 $\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$u_n=(-1)^{n+\alpha}\sin\frac{\beta}{n}\pi$.

当 $\beta=0$ 时，$u_n=0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

当 $\beta\neq 0$ 时，不妨设 $\beta>0$（当 $\beta<0$ 时，$u_n=(-1)^{n+\alpha+1}\sin\frac{|\beta|}{n}\pi$），

由莱布尼茨准则可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha}\sin\frac{\beta}{n}\pi$ 条件收敛.

同理可证，当 $\beta<0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

**【例 8.13】**试讨论下列级数的敛散性：

(1) $1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}+\cdots$；

(2) 设 $a>0,b>0$，$a-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots$.

**【解】**(1) (i) 当 $x=1$ 时，级数为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$，

属于莱布尼茨型交错级数，级数收敛.

(ii) 当 $x>1$ 时，$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2^x}\left(1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}\right)$，

当 $n \to \infty$ 时，前一括号 $\to +\infty$，后一括号 $\to$ 定值(因为 $x > 1$)，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$，故级数发散.

(iii) 当 $x < 1$ 时，$S_{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4^x} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left[\frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{2n+1}\right]$，

由于 $x < 1$，所以 1 以后各项均为负的.

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{2n+1}\right]$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{2n+1}\right]\Big/\frac{1}{n^x} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-(2n)^x}{(2n+1)2^x} = \frac{1}{2^x}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}(x<1)$ 发散，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \infty$，故级数发散.

综上所述，当 $x = 1$ 时级数收敛，$x \neq 1$ 时，级数发散.

(2) 取级数的前 $2n$ 项与前$(2n+1)$ 项的和

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} \\
&= a\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + (a-b)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= a\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}(a-b)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = a\tau_{2n} + \frac{1}{2}(a-b)\sigma_n, \qquad ①
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2n+1} &= a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} + \frac{a}{2n+1} \\
&= a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) + (a-b)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= a\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}(a-b)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \\
&= a\tau_{2n+1} + \frac{1}{2}(a-b)\sigma_n, \qquad ②
\end{aligned}$$

由 ①，② 可知，当 $a = b$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = a\tau\left(\tau \text{ 为} \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} \text{ 的和}\right)$，所以级数收敛，当 $a \neq b$ 时，级数发散.

## 题型三　级数的证明或判敛

**提示** (1) 正项级数证明的思路：

1° 已知某级数收敛，欲证另一级数收敛，通常用比较判别法，已知收敛的某级数被用作比较级数；

2° 已知某数列有某种性质(有极限、有界性、单调性)，欲证一级数收敛，通常是利用极限、有界性、单调性对数列的通项作某种估值，再用比较判别法；

3° 若欲证级数的通项与已知敛散性级数的通项有某种四则运算关系，通常用级数敛散性定义(即考查欲证级数前 $n$ 项和的极限)进行分析.

(2) 交错级数的判敛可验证莱布尼茨准则的条件，或是验证 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$.

【例 8.14】证明如下命题成立：

(1) 设 $a_n > 0$，且 $\{na_n\}$ 有界，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = c(c>0)$，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

【证】(1) 因为 $a_n > 0$，$\{na_n\}$ 有界，所以 $\exists M > 0$，使 $0 \leqslant na_n \leqslant M$，即 $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{M}{n}$，于是

$$0 \leqslant a_n^2 \leqslant M^2 \cdot \frac{1}{n^2},$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M^2 \cdot \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

(2) 由题设可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = c(c>0)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由正项级数比较法的极限形式可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

【例 8.15】设 $f_0(x)$ 在区间 $[0,a](a>0)$ 上连续，而且 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x)\mathrm{d}x, x \in [0,a](n=1, 2,\cdots)$，试证：无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上是绝对收敛的.

【证】因为 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，所以 $|f_0(x)|$ 在 $[0,a]$ 上连续，因此 $|f_0(x)|$ 在 $[0,a]$ 上有最大值，设为 $M$，即 $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}\{|f_0(x)|\}$.

因为 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^x [\int_0^x f_{n-2}(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}x = \cdots = \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{n个} f_0(x)\mathrm{d}x \cdot \cdots \cdot \mathrm{d}x$，

所以 $|f_n(x)| \leqslant \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{n个} |f_0(x)|\mathrm{d}x \cdot \cdots \cdot \mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{n个} M\mathrm{d}x \cdot \cdots \cdot \mathrm{d}x = \dfrac{M}{n!}x^n$，

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{M}{n!}x^n, x \in [0,a]$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 绝对收敛.

【例 8.16】设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

【证】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有连续的二阶导数，可推出 $f(0)=0, f'(0)=0$.

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内展成一阶泰勒公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi \text{在} 0 \text{与} x \text{之间}),$$

又由题设 $f''(x)$ 在属于邻域内包含原点的一个小闭区间内连续，因此 $\exists M > 0$，使

$$|f''(x)| \leqslant M, \text{于是} |f(x)| = \frac{1}{2}|f''(\xi)x^2| \leqslant \frac{M}{2}x^2,$$

令 $x=\frac{1}{n}$,则 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

**【例 8.17】** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $a\leqslant f(x)\leqslant b$,$|f'(x)|\leqslant q<1$,令 $u_n=f(u_{n-1})$,

$n=1,2,3,\cdots,u_0\in[a,b]$,证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛.

**【证】** 因为

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-u_n|&=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=|f'(\xi_1)||u_n-u_{n-1}|\\&\leqslant q|u_n-u_{n-1}|=q|f(u_{n-1})-f(u_{n-2})|\\&=q|f'(\xi_2)||u_{n-1}-u_{n-2}|\\&\leqslant q^2|u_{n-1}-u_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant q^n|u_1-u_0|,\end{aligned}$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛.

**【例 8.18】** 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,$\{a_n\}$ 单调减,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

**【解】** 由题设有 $a_n>a_{n+1}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则由莱布尼茨判别准则,交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛,与假设矛盾,故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l(l>0)$.

由根值判别法,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\frac{1}{1+l}<1$,故级数收敛.

**【例 8.19】** 设 $u_1=1,u_2=2$,当 $n\geqslant 3$ 时,$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}$,判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 的敛散性.

**【解】** 显然 $u_n$ 递增,即 $u_{n-2}<u_{n-1}$,于是

$$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}<2u_{n-1}\Rightarrow u_{n-1}>\frac{1}{2}u_n,\text{亦有 }u_{n-2}>\frac{1}{2}u_{n-1},$$

$$u_n>\frac{1}{2}u_{n-1}+u_{n-1}=\frac{3}{2}u_{n-1}>\left(\frac{3}{2}\right)^2u_{n-2}>\cdots>\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

因此 $\frac{1}{u_n}<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 收敛.

## 题型四 计算函数项级数收敛域

**提示 解题程序**

(1) 用比值法(或根值法)求 $\rho(x)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\rho(x)(\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|})=\rho(x);$$

(2) 解不等式方程 $\rho(x)<1$,求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛区间 $(a,b)$;

(3) 考查 $x=a$(或 $x=b$) 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$(或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 的敛散性);

(4) 写出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域.

**【例 8.20】** 求下列函数项级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}(x^2+x+1)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$.

**【解】** (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|1+x^n|}{|1+x^{n+1}|}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{|x|} < 1, & |x| > 1, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 收敛}, \\ 1, & -1 < x \leqslant 1, \quad \text{方法失效}, \\ \text{不存在}, & x = -1, \quad \text{方法失效}. \end{cases}$$

当 $|x| < 1$ 时，$u_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \not\to 0 (n\to\infty)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散.

当 $x = 1$ 时，$u_n(x) = \frac{1}{2} \not\to 0 (n\to\infty)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散.

当 $x = -1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ 不存在，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ 的收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}(x^2+x+1)^n} = x^2+x+1$，

当 $x^2+x+1<1$ 时，$(x+1)x<0 \Rightarrow -1<x<0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，

令 $x=0$，原级数 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，

令 $x=-1$，原级数 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $[-1,0]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$，

当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，即 $|1-x|<|1+x|$，亦即 $x>0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛.

当 $x=0$ 时，原级数 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$ 收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $[0,+\infty)$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x} = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$，

当 $x>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$ 收敛；

当 $x\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 发散，只要 $x\neq 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$ 发散；

当 $x=0$ 时,原级数 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $x=0$ 及 $(1,+\infty)$.

## 题型五　求幂级数的收敛域、收敛半径

提示 1° 同函数项级数,若收敛区间为 $(a,b)$,则收敛半径 $R=\dfrac{b-a}{2}$.

2° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 中至多只有有限个 $a_n=0$,则收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 或 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

3° 代入 $x=\pm R$,考查 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n R^n$ 的收敛性.

**【例 8.21】** 求下列幂级数的收敛域和收敛半径:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n-3^{2n}};(2)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n n}x^{2n-3};(3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,(a>0,b>0).$$

**【解】** (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x-1|^{2n}}{|n-3^{2n}|}}=\dfrac{|x-1|^2}{3^2}$.

当 $\dfrac{|x-1|^2}{3^2}<1$,即 $|x-1|<3$,亦即, $-2<x<4$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛;

当 $x=-2$ 时,原级数 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^{2n}}{n-3^{2n}}$ 发散(因为 $u_n \not\to 0, n\to\infty$);

当 $x=4$ 时,原级数 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{2n}}{n-3^{2n}}$ 发散(因为 $u_n \not\to 0, n\to\infty$).

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $(-2,4)$,收敛半径 $R=\dfrac{4-(-2)}{2}=3$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x|^{2n-3}}{2^n n}}=\dfrac{|x|^2}{2}$.

当 $\dfrac{|x|^2}{2}<1$,即 $|x|<\sqrt{2}$,亦即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛;

当 $x=\sqrt{2}$ 时,原级数 $\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2\sqrt{2}n}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛;

当 $x=-\sqrt{2}$ 时,原级数 $\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ 收敛.

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,收敛半径 $R=\dfrac{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2}$.

(3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}}}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & a\geqslant b\\ \dfrac{1}{b}, & a<b\end{cases}$.

① 当 $a \geqslant b$ 时，收敛半径为 $R = \frac{1}{a}$.

当 $x = \frac{1}{a}$ 时，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\frac{1}{a^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

当 $x = -\frac{1}{a}$ 时，得 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\frac{1}{a^n}$ 为交错级数，

由莱布尼茨判别法知收敛，收敛区域为 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.

② 当 $a < b$ 时，收敛半径 $R = \frac{1}{b}$，

当 $x = \pm\frac{1}{b}$ 时，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\frac{1}{b^n}$ 收敛.

所以当 $x = \pm\frac{1}{b}$ 时级数都收敛，收敛区域为 $\left[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}\right]$.

由 ①② 知该级数的收敛半径为 $R = \min\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}$.

## 题型六　函数在某点的幂级数展开

**提示** 将给定函数在某点处展成泰勒级数有两种方法：直接法与间接法. 所谓间接法，就是利用已知的 7 个函数展式，通过适当的变量替换，四则运算，复合以及逐项微分，积分而将一个函数展成幂级数的方法. 通常采用的就是间接法.

**【例 8.22】** 把下列函数展成 $x$ 的幂级数：

(1) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$；

(2) $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$；

(3) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x - x$；

(4) $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

**【解】** (1) $$f(x) = \frac{1}{9}\frac{x}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \xlongequal{\text{由展开式(2)}} \frac{1}{9}x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2(n+1)}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{3^{2n}}, x \in (-3,3).$$

(2) $$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \arctan x,$$

$$f''(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

$$f'(x) = \int_0^x f''(x)\mathrm{d}x = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$f(x) = \int_0^x f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\quad(-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

(3) $f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}$,

且 $f(0)=0$　于是

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x+f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1).$$

(4) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)=\ln\frac{1-x^5}{1-x}\quad(x\neq 1)$

$$=\ln(1-x^5)-\ln(1-x),$$

因为 $\ln(1-x^5)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{5n}\quad(-1\leqslant x<1)$,

$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\quad(-1\leqslant x<1)$,

所以 $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{5n}-\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{4n})}{n}x^n\quad(-1\leqslant x<1)$.

**【例 8.23】**把下列函数在指定点展成幂级数：

(1)　$f(x)=\ln x$,在 $x=1$ 处；

(2)　$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$,在 $x=1$ 处；

(3)　$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x-1}\right)$,在 $x=1$ 处；

(4)　$f(x)=\sin x$,在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处.

**【解】**(1) $f(x)=\ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\quad(0<x\leqslant 2)$.

(2) $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$,

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}\quad(-1<x<3),$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}\quad(-2<x<4),$$

故 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n\quad(-1<x<3).$$

(3) $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}\mathrm{e}^{x-1}=\mathrm{e}\left[1+(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(x-1)^n+\cdots\right]$,

$$\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x-1}=\mathrm{e}\left[1+\frac{1}{2!}(x-1)+\frac{1}{3!}(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x-1)^{n-1}+\cdots\right],x\neq 1,$$

故$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-e}{x-1}\right)=e\left[\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}(x-1)+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2}+\cdots\right], x\neq 1.$

(4) $\sin x=\sin\left[\dfrac{\pi}{4}+\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

又由展开式(4)有

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$故\ \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\cdots\right]\quad(-\infty<x<+\infty).$$

**【例 8.24】**把级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}$的和函数展成$x-1$的幂级数.

**【解】**设级数的和函数为$s(x)$,即

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}=2\sin\frac{x}{2},$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

$$s(x)=2\sin\frac{1+(x-1)}{2}=2\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}\right)=2\left(\sin\frac{1}{2}\cos\frac{x-1}{2}+\cos\frac{1}{2}\sin\frac{x-1}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}+2\cos\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n-1},$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

## 题型七　幂级数求和

提示 解题程序

(1) 求出给定级数的收敛域;

(2) 通过逐项积分或微分将给定的幂级数化为常见函数展开式的形式(或易看出其假设和函数$s(x)$与其导数$s'(x)$的关系),从而得到新级数的和函数;

(3) 对于得到的和函数作相反的分析运算,便得原幂级数的和函数.

**【例 8.25】**求下列幂级数的和函数:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

**【解】**(1) 先求收敛域,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n}|x|^{n-1}}=\frac{|x|}{2}.$$

当$\frac{|x|}{2}<1$时,即$|x|<2$,亦即$-2<x<2$时,级数收敛;

令$x=2$,原级数$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散;

令$x=-2$,原级数$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$收敛;

故　级数的收敛域为$[-2,2)$.

设级数的和为$s(x)$,即

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n\Big)'\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n2^n}x^n\Big)'\Big]\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^n}x^{n-1}\Big)\Big]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\Big[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n\Big]\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{x}[\ln2-\ln(2-x)]\quad(x\neq0),$$

因为和函数$s(x)$在收敛域内是连续的,

所以$s(0)=\lim\limits_{x\to0}s(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln2-\ln(2-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$,

$$\text{故,级数的和函数 } s(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{\ln2-\ln(2-x)}{x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2)\end{cases}.$$

(2) 可求出收敛域为$[-1,1]$.

$$\text{设 } s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=\int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^n}{n(n+1)}\Big)'\Big]\mathrm{d}x=\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n-1}\Big)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\Big(\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big)\mathrm{d}x=\int_0^x\Big[\frac{1}{x^2}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big)'\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\Big(\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x=\int_0^x\Big(\frac{1}{x^2}(-x-\ln(1-x))\Big)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\Big[-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}\Big]\mathrm{d}x=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\Big|_0^x$$

$$=1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x},x\neq0,x\neq1.$$

由和函数$s(x)$在收敛域内的连续性,有

$$s(0)=\lim_{x\to0}s(x)=\lim_{x\to0}\Big(\frac{1+(1-x)\ln(1-x)}{x}\Big)=0,$$

当$x=1$时,原级数$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$,

(因为$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,$s_n=1-\frac{1}{n+1}\to1$,当$n\to\infty$时)

$$\text{故,} s(x)=\begin{cases}1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n-1}{2^n}|x|^{2n-2}}=\dfrac{|x|^2}{2}$,

当$\dfrac{|x|^2}{2}<1$,即$|x|<\sqrt{2}$,亦即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时,级数收敛.

当$x=\pm\sqrt{2}$时,原级数$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2}$发散.故级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$$\text{令}\quad s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\left(\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right)\mathrm{d}x\right)'$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\mathrm{d}x\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)'=\left(\frac{1}{x}\frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

(4) 可求出收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$\text{令}\quad s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{n+1}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}\mathrm{d}x\right)'=\left(\frac{x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x),x\in(-\infty,+\infty).$$

**【例 8.26】**求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$的和函数.

**【解】**易求出收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$\text{令 } s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, \quad ③$$

$$s'(x)=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots,$$

$$s(x)+s'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\frac{1}{(2n!)}x^{2n}+\cdots=\mathrm{e}^x,$$

即$s(x)+s'(x)=\mathrm{e}^x$,此一阶线性方程的通解为$s(x)=C\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

又由③可知$s(0)=1$,代入上式,得$C=\dfrac{1}{2}$.故幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{ch}x$.

**【例 8.27】**求下列级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^nn!}x^n$.

**提示** 系数为若干项代数和的幂级数,求和函数时应先将级数写成各个幂级数的代数和,然后分别求出它们的和函数,最后对和函数求代数和,即得所求级数的和函数.

**【解】**(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)|x|^n}=|x|$.

当 $|x|<1$,即 $-1<x<1$ 时,级数收敛.

令 $x=1$,原级数 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)$ 发散;$x=-1$,原级数 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)$ 发散,故级数收敛域为$(-1,1)$.

令
$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)'+\frac{1}{1-x}$$
$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$$

(2) 易知其收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

令
$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}x^{n-1}=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{n^2}{2^n n!}x^{n-1}\mathrm{d}x\right)\right]'$$
$$=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n n!}x^n\right]'=x\left[x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n n!}x^{n-1}\right]'$$
$$=x\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n n!}x^{n-1}\mathrm{d}x\right)'\right]'=x\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}\right)'\right]'$$
$$=x\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'\right]'=x[x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)']'=\frac{1}{4}x(x+2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},$$

故
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\frac{1}{4}x(x+2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

**【例 8.28】**设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a_2=1$,且 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$,$n=2,3,\cdots$,

证明:当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 收敛,并求其和函数.

**【解】**显然,$a_n>0$,$a_{n+1}>a_n$,所以$\{a_n\}$是单调增加正数列.

又 $a_3=2$,$a_4=a_3+a_2<2a_3=2^2$.设 $a_n<2^{n-2}$,则
$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}<2a_n<2^{n-1}.$$

所以,由归纳法得 $a_n<2^{n-2}$,$n=4,5,\cdots$.于是
$$|a_nx^{n-1}|<2^{n-2}|x^{n-1}|=\frac{1}{2}|(2x)^{n-1}|,$$

又当 $|2x|<1$,即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^{n-1}$ 收敛.

所以,由比较判别法,当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 绝对收敛.

由于
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}$$

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1} x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + a_{n-1}) x^n$$

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= 1 + x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= 1 + x + x\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - a_1 \right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

$$= 1 + (x + x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1},$$

得 $(1 - x - x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1 - x - x^2}$，$|x| < \frac{1}{2}$.

## 题型八　数项级数求和

**提示**（Ⅰ）利用级数和的定义求和

即，若 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则 $\sum_{n=1}^{n} u_n = s$，其中 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

根据 $s_n$ 的求法又可分为：直接法、拆项法和递推法.

**1. 直接法**（适用于 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 为等差或等比数列或通过简单变换易化为这两种数列的数列）

**【例 8.29】** 求下列级数的和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) q^{n-1}$　$(|q| < 1)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

**【解】** (1) $s_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n-1) q^{n-1}$，　④

④ 的两边同乘以 $q$，得

$$q s_n = q + 3q^2 + 5q^3 + \cdots + (2n-1) q^n, \quad ⑤$$

④ − ⑤ 得

$(1-q) s_n = 1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^{n-1} - (2n-1) q^n$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1}{1-q} + \frac{2(q + q^2 + \cdots + q^{n-1})}{1-q} - (2n-1) \frac{q^n}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1-q} + \frac{2q(1 - q^{n-1})}{(1-q)^2} - (2n-1) \frac{q^n}{1-q},$$

因为 $|q| < 1$，所以 $s_n \to \frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2}$　$(n \to \infty)$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) q^{n-1} (|q| < 1) = \frac{1+q}{(1-q)^2}$.

(2) 略，其和为 $s = 2$.

**2. 拆项法**（即把通项拆成两项差的形式，在求前 $n$ 项和时，除首尾两项外其余各项均对消掉）

**【例 8.30】** 求下列级数的和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$.

【解】(1) $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

$$s_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\to\frac{1}{4}\quad(n\to\infty).$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$.

(2) $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,

$$s_n=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 1\quad(n\to\infty),$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=1$.

**(Ⅱ)阿贝尔法(构造幂级数法)**

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

其中,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可通过逐项微分或积分求得和函数 $s(x)$. 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1^-}s(x).$$

**【例 8.31】**求下列级数的和.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

【解】(1) 令 $s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$,其收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

$$s(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\mathrm{d}x\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)'=\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2-x^2}\right)'=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2},$$

$$\lim_{x\to 1^-}s(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}=3.\text{ 故}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3.$$

(2) 令 $s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n x^{2n-1}$,收敛域为$\left[-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$,

$$s(x)=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n x^{2n-1}\right]\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}x^2\right)^n\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{3x^2}{4+3x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big|_0^x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\lim_{x\to 1^-}s(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}.$

(3) 令 $s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n-1}$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$，

$$\begin{aligned}s(x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}\mathrm{d}x\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2(2n+1)!}\right)'\\&=\left(\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x\right)'=\left[\frac{1}{2x}(\sin x-x)\right]'\\&=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2},\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^-}s(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1),$$

故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1).$

(4) 令 $s(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$，收敛域为$(-1,1]$，

$$\begin{aligned}s(x)&=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}\right)'\right]\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(1-x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}},\end{aligned}$$

故$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-}s(x)$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(1-x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

注 凡通项 $u_n$ 可拆成代数和形式的，在求和之前一定要拆开，然后分别求各级数的和，最后求它们的代数和.

**【例 8.32】**求下列级数的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+1}{2^n(n-1)!}$；　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$.

**【解】**(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+1}{2^n(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n-1)!}$，

令

$$\begin{aligned}s_1(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cdot x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}x^{n-1}\mathrm{d}x\right)'\\&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{2}{(2-x)^2},\end{aligned}$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{x\to 1^-}s_1(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{(2-x)^2}=2.$$

令 $s_2(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n-1)!}x^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n-1)!}=\lim_{x\to 1^-}s_2(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+1}{2^n(n-1)!}=2+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

令 $s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-2}=\left[\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-2}dx\right]'$

$$=\left[\sum_{n=2}^{\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1}\right]'=\left\{\left[\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x n\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1}dx\right]'\right\}'$$

$$=\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n\right]''=\left[\frac{x^2}{2(2+x)}\right]''=\frac{4}{(2+x)^3},$$

有 $$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{x\to 1^-}\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{4}{27},$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{2}{3}+\frac{4}{27}=\frac{22}{27}.$$

## 题型九　周期与非周期函数的傅里叶级数

**提示** 解题程序：

(1) 画出 $f(x)$ 的图形并验证是否满足狄氏条件(画图目的：验证狄氏条件，由图形写出收敛域，利用奇偶性可减少求系数的工作量)；

(2) 求出傅里叶系数；

(3) 写出傅里叶级数，并注明它在何处收敛于 $f(x)$.

**【例 8.33】** 填空.

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续，在 $(0,l)$ 内有 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，

则 $b_n$ 的计算公式为________.

(2) 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，且其傅里叶系数为 $a_n,b_n$，试求 $f(x+h)$($h$ 为实数)的傅里叶系数：$a'_n=$________，$b'_n=$________.

(3) 设 $f(x)$ 是可积函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上恒有 $f(x+\pi)=f(x)$，则 $a_{2n-1}=$________，$b_{2n-1}=$________.

**【解】** (1) 由题设条件可知是对 $f(x)$ 进行奇开拓，由相应的系数公式即可得出

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

(2) $a'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos[n(x+h)-nh]dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nh\cos n(x+h)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\sin nh\sin n(x+h)dx$$

$=a_n\cos nh+b_n\sin nh$.

类似可求出 $b'_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$.

(3) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$,

因为$\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\xlongequal{令x=t+\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t+\pi)\cos n(t+\pi)\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\pi}^{0}f(t+\pi)(-1)^n\cos nt\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{0}f(t)(-1)^n\cos nt\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\pi}^{0}f(x)(-1)^n\cos nx\mathrm{d}x,$$

所以 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[1+(-1)^n]f(x)\cos nx\mathrm{d}x$,

故 $a_{2n-1}=0$.

类似可求出 $b_{2n-1}=0$.

**【例 8.34】**将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

**【解】**$f(x)=2+|x|$ 为偶函数(如图 8-1 所示),只能展成余弦级数,即

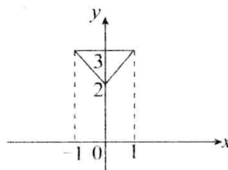



图 8-1

$$b_n=0,a_0=2\int_{0}^{1}(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_{0}^{1}(2+x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\ (n=1,2,\cdots),$$

因为所给函数在$[-1,1]$上满足狄氏收敛定理,故

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x),[-1,1]$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$$

当 $x=0$ 时,上式 $\Rightarrow 2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$,又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**【例 8.35】**将函数 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展成周期为 4 的余弦级数.

**【解】**既然是将 $f(x)$ 展成余弦函数,所以就必须对 $f(x)$ 进行偶开拓,如图 8-2 所示.

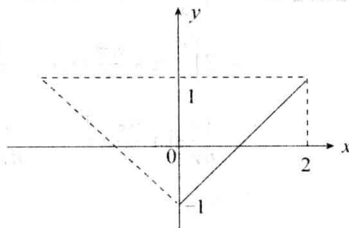



图 8-2

$b_n=0,\ (n=1,2,\cdots)$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_{0}^{2}(x-1)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_{0}^{2}(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x$$

$$=\left[(x-1)\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,(k=1,2,\cdots)\end{cases}$$

故 $f(x)=-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2}x,x\in[0,2]$.

**【例 8.36】** 把 $f(x)=|\sin x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 展成傅里叶级数.

**【解】** 由图 8-3 可看出 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上连续,且只有三个极值点.故狄氏条件满足.

因为 $f(x)$ 为偶函数.所以 $b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$,

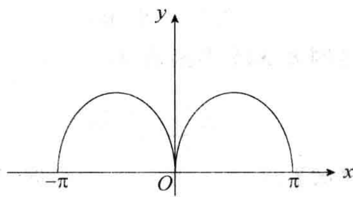



图 8-3

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}[(-1)^{n-1}-1]\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi(n^2-1)}[(-1)^{n-1}-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k-1\\ -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k\end{cases}.$$

因为在推演中当 $n=1$ 时,$a_n$ 没有意义,所以 $a_0,a_1$ 要重新求.(注:若在推演中 $n=3$ 没有意义,则 $a_0,a_1,a_2,a_3$ 都要重新求,其他情形类似处理.)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=0.$$

故 $|\sin x|=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

**【例 8.37】** 把 $f(x)=10-x,5\leqslant x\leqslant 15$ 展成以 10 为周期的傅里叶级数.(如图 8-4 所示)

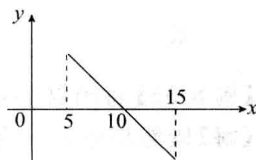



图 8-4

**【解】** $a_n=\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_5^{15}(10-x)\cos\dfrac{n\pi}{5}x\,dx$

$$=2\int_5^{15}\cos\frac{n\pi}{5}x\,dx-\frac{1}{5}\int_5^{15}x\cos\frac{n\pi}{5}x\,dx$$

$$=\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}x\Big|_5^{15}-\frac{5}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{5}x\Big|_5^{15}-\left(\frac{5}{n\pi}\right)^2\cdot\cos\frac{n\pi}{5}x\Big|_5^{15}$$

$$=0.$$

推演 $a_n$ 过程中 $n=0$ 没有意义,所以 $a_0$ 要重新求.

$$a_0=\frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)dx=0,$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi}{5}x\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{10}{n\pi} \quad (n=1,2,\cdots),$$

故 $f(x) = 10 - x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x \quad (5 < x < 15)$.

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　已知一级数收敛，判别另一相关级数的敛散性时，要想到级数的比较判别法和一些常用的不等式，如 $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 等.

**【例 8.38】**下列各选项正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n \geqslant v_n (n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.　【　】

**【解】**因为 $(u_n+v_n)^2 = u_n^2+v_n^2+2u_nv_n \leqslant u_n^2+v_n^2+(u_n^2+v_n^2) = 2(u_n^2+v_n^2)$，

所以若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛. 故选(A).

**【例 8.39】**设常数 $\lambda > 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散.　(B) 条件收敛.　(C) 绝对收敛.　(D) 敛散性与 $\lambda$ 有关.　【　】

**【解】**$|u_n| = \left|(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right| = \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}} < \frac{|a_n|}{n} < \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$，

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故选(C).

### 二、综合题解析

**【例 8.40】**设 $f(x) = \begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x \neq 0\\ 1, & x = 0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 $x$ 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和及 $f^{(n)}(0)$.

**【解】**因 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$，$x \in (-1,1)$，故

$$\arctan x = \int_0^x (\arctan x)' \mathrm{d}x = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

于是 $$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$$
$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1,1].$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

又 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$,根据函数的幂级数展开式的唯一性,当 $n = 2k-1, k = 1, 2, 3, \cdots$ 时,$f^{(2k-1)}(0) = 0$. 当 $n = 2k, k = 1,2,3,\cdots$ 时,$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{2(-1)^k}{1-4k^2}$,即

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \frac{2 \cdot (2k)!}{1-4k^2}.$$

**【例 8.41】**已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x) = f_n(x) + x^{n-1}\mathrm{e}^x$($n$ 为正整数),且 $f_n(1) = \frac{\mathrm{e}}{n}$,求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和.

**【解】**解方程 $f'_n(x) - f_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^x$,得通解为

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + c\right) = \mathrm{e}^x\left(\frac{x^n}{n} + c\right).$$

代入 $f_n(1) = \frac{\mathrm{e}}{n}$,得 $c = 0$,故 $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x x^n}{n}$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \mathrm{e}^x}{n} = \mathrm{e}^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$= \mathrm{e}^x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t$$
$$= -\mathrm{e}^x \ln(1-x), \quad x \in [-1,1).$$

**【例 8.42】**已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$,试证明

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad (x \in (0,1)).$$

**【分析】**记 $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$,则可由 $F'(x) = 0$ 得证 $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = C \quad [x \in (0,1)]$. 然后对上式令 $x \to 0^+$ 取极限得 $C = \frac{\pi^2}{6}$ 即可.

**【解】**由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ 在$[0,1]$上收敛,所以 $f(x)$,$f(1-x)$ 在$[0,1]$上都连续,且在$(0,1)$内可导. 记 $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$,则 $F(x)$ 在$(0,1)$内可导,且

$$F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln x. \quad ①$$

由于对 $x \in (0,1)$ 有

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = -\frac{1}{x}\ln(1-x). \quad ②$$

将上式中的 $x$ 换为 $1-x$ 得

$$f'(1-x) = -\frac{1}{1-x}\ln x. \quad ③$$

将式 ② 式 ③ 代入式 ① 得 $F'(x)=0$,从而 $F(x)\equiv C$,即

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\equiv C. \quad ④$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n\Big|_{x=0} = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(1-x) \xlongequal{令\, t=1-x} \lim_{t\to 1^-} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}t^n\Big|_{t=1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x\ln(1-x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(1-x)\ln^2(1-x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2(1-x)}{x} = 0,$$

所以,对 ④ 的两边令 $x\to 0^+$ 得 $C=\frac{\pi^2}{6}$,代入 ④ 得

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad [x\in(0,1)].$$

## 习 题 八

**1. 选择题.**

(1) 设 $\alpha$ 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

A. 绝对收敛. B. 发散.

C. 条件收敛. D. 敛散性与 $\alpha$ 取值有关. 【 】

(2) 设 $u_n = (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,则

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛. B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_n^2$ 发散. D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛. 【 】

(3) 设函数 $f(x)=x^2, 0\leqslant x<1$,而 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$,

其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx \quad (n=1,2\cdots)$, 则 $s\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于

A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$. 【 】

(4) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛,则

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛.　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 都收敛.　　【　】

(5) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则必收敛的级数为

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$.　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$.

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$.　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$　　【　】

(6) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛,则此级数在 $x=-1$ 处

A. 条件收敛.　　B. 绝对收敛.

C. 发散.　　D. 收敛性不确定.　　【　】

(7) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为

A. $(-2,4)$.　　B. $[-2,4]$.

C. $(-3,3)$.　　D. $(-4,2)$.　　【　】

**2. 判断下列级数的敛散性.**

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}\sin\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}(a\neq 0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sqrt{1+n}-\sqrt{n-1})$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

**3. 判断下列级数的敛散性.**

(1) $a-a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{4}}+\cdots(a>0)$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)$.

**4. 证明题.**

(1) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调下降,且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-a_{n+1}}{a_n}\right)$ 收敛.

(2) 设正项数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geqslant\delta(\delta>0$常数),证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

**5.** 求下列级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^n+\sqrt[3]{n})(x-1)^{2n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\dfrac{1}{2^nx^n}\right)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

**6.** 求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+m)}$($m$为自然数);

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$ 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}$.

**7.** 把下列级数展成 $x$ 的幂级数.

(1) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\dfrac{1}{2}\arctan x$;

(3) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\dfrac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$;

(5) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

**8.** 把下列级数在指定点展成幂级数.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$,在 $x_0=-4$ 处;(2) $f(x)=\lg x$,在 $x_0=1$ 处.

**9.** 把下列函数分别展成正弦函数和余弦函数.

(1) $f(x)=x^2$,$(0<x<2\pi)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1\text{ 时}\\ 2-x, & 1<x<2\text{ 时}\end{cases}$.

**10.** 把下列函数展成傅里叶级数.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos x+|x|$;

(2) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2},\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$

参　考　答　案

**1.** (1)B　(2)C　(3)B　(4)C　(5)D　(6)B　(7)A

**2.** (1) 发散;(2) 收敛;(3) 发散;(4) 收敛;

(5) 收敛； (6) 收敛； (7) 收敛；(8) 发散； (9) 发散.

**3.** (1) 发散； (2) 条件收敛； (3) 绝对收敛；

(4) 绝对收敛； (5) 绝对收敛； (6) 条件收敛.

**4.** 略.

**5.** (1) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}},1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$； (2) $[-1,1]$； (3) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；

(4) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$； (5) $(-2,4)$； (6) $[4,6)$.

**6.** (1) $\frac{1}{24}$； (2) $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$； (3) $f(x)=\arctan x,[-1,1]$；

(4) $f(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},(-1,1)$； (5) $f(x)=\ln\frac{2}{1-x}[-3,1)$；

(6) $f(x)=\frac{16}{(2-x)^3},f(1)=16$.

**7.** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n,\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3},(-1,1)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2},[-1,1]$；

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n2^{2n+1}]x^n,\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；

(5) $-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1},[-1,1]$.

**8.** (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,(-6,-2)$；

(2) $\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1},(0,2]$.

**9.** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}$，其中 $b_{2k+1}=-\left[\frac{\pi^2}{2k+1}-\frac{4}{(2k+1)^3}\right],b_{2k}=-\frac{4\pi}{k}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{4\pi^2}{3}-16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{nx}{2}}{n^2};$$

(2) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)}{2}\pi x}{(2n+1)^2}$；$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

**10.** (1) $\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi}\right)\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},[-\pi,\pi]$；

(2) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]\sin nx,(-\pi,\pi)$.

# 第九章　矢量代数与空间解析几何

## 第 1 节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、矢量的概念及其性质

(一) 概念及其运算

矢量 $\triangleq$ 既有大小又有方向的量.

矢量的模 $\triangleq$ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小. 矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模,记为 $|\boldsymbol{a}|$.

若矢量用坐标表示 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}$,

则　　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

单位矢量 $\triangleq$ 模为 1 的矢量. 矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量记作 $\boldsymbol{a}^0$,

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}.$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\triangleq \cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

显然 $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

设　$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点,则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

矢量的运算及其性质

**1. 加减运算**

设有矢量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$.

**2. 数乘运算**

数乘矢量 $\triangleq$ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与一数量 $\lambda$ 之积 $\lambda\boldsymbol{a}$,

$$\lambda\boldsymbol{a}=\begin{cases}|\lambda\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, & \lambda>0,\text{即与 }\boldsymbol{a}\text{ 相向},\\ \boldsymbol{0}, & \lambda=0,\text{即为零矢量},\\ -|\lambda\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, & \lambda<0,\text{即与 }\boldsymbol{a}\text{ 反向}.\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$.

**3. 矢量的数积(点积，内积)**

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\triangleq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

**运算律**

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) 与数乘矢量有结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

**4. 矢量的矢积(叉积，外积)**

**定义** 设有两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，若存在一个矢量 $\boldsymbol{c}$，满足如下条件

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$；

(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定的平面；

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成右手系.

则称矢量 $\boldsymbol{c}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积，记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

**运算律**

(1) 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) 与数乘矢量有结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

**5. 混合积**

**定义** 设有三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，若先作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再与 $\boldsymbol{c}$ 作点积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，则这样的数积称为矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，即 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$，则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

几何意义：$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体体积.

**运算律**

(1) 具有轮换对称性，即 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；

(2) 两矢量积互换，混合积变号，即

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$.

### (二) 矢量之间的关系

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$，

1° $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$；

2° $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$，

其中 $x_2,y_2,z_2$ 之中有一个为“0”，如 $x_2=0$，应理解为 $x_1=0$；

3° $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 $\lambda,\mu$，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

4° 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，可由下式求出

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$

5° $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 $\lambda,\mu,v$，使

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\text{ 或者}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0.$$

**【例 9.1】**填空.

(1) 设 $\boldsymbol{a}=\{3,2,1\},\boldsymbol{b}=\left\{2,\frac{4}{3},k\right\}$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $k=$ ________；若 $\boldsymbol{a}\mathbin{/\!/}\boldsymbol{b}$，则 $k=$ ________.

(2) 设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$ ________.

(3) 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\},\boldsymbol{b}=\{1,-2,5\},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})=10$，则 $\boldsymbol{c}=$ ________.

(4) 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ________.

**【解】**(1) 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $3\cdot2+2\cdot\frac{4}{3}+1\cdot k=0\Rightarrow k=-\frac{26}{3}$.

因为 $\boldsymbol{a}\mathbin{/\!/}\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 对应坐标成比例，所以 $\frac{3}{2}=\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{k}\Rightarrow k=\frac{2}{3}$.

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

故 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=2\cdot4\cdot3\cdot1=24$.

(3) 设 $\boldsymbol{c}=\{x,y,z\}$，由 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，于是有 $\begin{cases}2x-3y+z=0,\\x-2y+5z=0,\\x+2y-7z=0.\end{cases}$

解三元一次方程组，得 $x=\frac{65}{12},y=\frac{15}{4},z=\frac{5}{12}$. 故 $\boldsymbol{c}=\left\{\frac{65}{12},\frac{15}{4},\frac{5}{12}\right\}$.

(4) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

$=4$[因为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$].

**【例 9.2】**若矢量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，并且矢量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

**【解】**由题设可知

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0,\\7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0,\end{cases}\quad ①$$

$$\Rightarrow46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=23\boldsymbol{b}^2\quad\Rightarrow2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2,\quad ②$$

把② 代入 ①,得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,又

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},$$

故 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

**【例 9.3】**求与矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的矢量 $\boldsymbol{x}$.

**【解】**因为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,所以 $\exists\lambda\neq 0$,使 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=\{2\lambda,-\lambda,2\lambda\}$,又

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$,所以 $4\lambda+\lambda+4\lambda=-18,\lambda=-2$,

故 $\boldsymbol{x}=\{-4,2,-4\}$.

**【例 9.4】**化简下列各式:

(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]$;

(2)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

(3)$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

**【解】**(1) 利用矢积,混合积性质并注意到

$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}),\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$,于是

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]\\&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\&=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2\sin^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2\cos^2(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\\&=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

**【例 9.5】**证明矢量 $\boldsymbol{c}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的方向.

**【证】**设 $\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{b}^0$ 分别表示与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向的单位矢量,则

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},$$

由 $\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{b}^0$ 为边所构成的平行四边形为菱形,知其对角线平分顶角,于是

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

这是与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角平分线平行的矢量,又

$$\boldsymbol{c}=\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\lambda\boldsymbol{d},\text{其中 }\lambda=\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}>0,$$

故,$\boldsymbol{c}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的方向.

**【例 9.6】**已知矢量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\angle ODA=\frac{\pi}{2}$,如图 9-1 所示.

求证:(1)$\triangle ODA$ 的面积等于 $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{b}|^2}$;

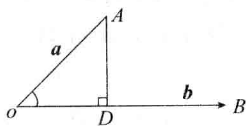


图 9-1

(2) 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta$ 为何值时，$\triangle ODA$ 的面积取最大值？

【解】(1) 设 $\triangle ODA$ 的面积为 $S$，则

$$S=\frac{1}{2}OD\cdot AD=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|\cos\theta\cdot|\boldsymbol{a}|\sin\theta=\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2\sin2\theta,$$

又 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,\quad|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$

于是，$\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin\theta\cos\theta}{2|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2\sin2\theta,$

故
$$S=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{b}|^2}.$$

(2) 由
$$S=\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2\sin2\theta\Rightarrow\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2\cos2\theta,$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta}=0$，可得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 是 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内唯一驻点.

又
$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\theta^2}=-|\boldsymbol{a}|^2\sin2\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=|\boldsymbol{a}|^2<0,$$

故，当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\triangle ODA$ 的面积 $S=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2$ 最大.

**【例 9.7】** 证明：当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面时，方程组

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d} \tag{③}$$

有以下解：$x=\dfrac{\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\quad y=\dfrac{\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})}\quad z=\dfrac{\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}.$

【证】将式 ③ 的两边点乘 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，并注意到：$\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，$\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，则有

$$\begin{aligned}(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=x\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+y\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+z\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=x\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

即
$$x\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

故，$x=\dfrac{\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}$，同理可证 $y$ 与 $z$ 的表达式成立.

**【例 9.8】** 证明如下结论：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，则矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

【证】(1) 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$，

因而只要考虑 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的数积即可.

注意到 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ 共面，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\&=0+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+0=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$，故 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，于是矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(2) 由于 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，

即只要考虑 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 是否为零矢量即可.

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c},$$

因为
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d},$$

所以
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

**【例 9.9】** 一矢量与 $x$ 轴、$y$ 轴成等角，与 $z$ 轴所构成的角是它们的 2 倍，试确定该矢量的方向.

【解】设该矢量与 $x,y$ 轴的夹角为 $\alpha$，则与 $z$ 轴的夹角为 $2\alpha$，又由于方向余弦的平方和等于 1，

所以

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1,$$
$$2\cos^2\alpha+(2\cos^2\alpha-1)^2=1,$$
$$2\cos^2\alpha\cdot(2\cos^2\alpha-1)=0.$$

$\Rightarrow\cos\alpha=0,\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（“—”舍去）$\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，或 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，

该矢量的方向角分别为：$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2},\gamma=\pi$ 或 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，

故，该矢量的方向为　$\{\cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=-1\}$，

或　$\left\{\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=0\right\}$.

## 二、平面与直线

平面与直线的关系见表 9-1.

表 9-1

| 平面方程 | 直线方程 |
|---|---|
| 1. 一般方程<br>$Ax+By+Cz+D=0$<br>法矢量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$<br>若方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴，例如<br>平面 $Ax+Cz+D=0$ // $y$ 轴 | 1. 一般式方程（两平面交线）<br>$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \text{平面 } \Pi_1\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \text{平面 } \Pi_2\end{cases}$<br>平面 $\Pi_1$ 与 $\Pi_2$ 的法矢量分别为<br>$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$<br>直线的方向矢量为<br>$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}$ |
| 2. 平面的点法式方程<br>$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$<br>$M(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上已知点<br>$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为法矢量 | 2. 标准式方程<br>$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$<br>$M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的已知点<br>$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$ 为直线的方向矢量 |
| 3. 三点式方程<br>$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{vmatrix}=0$<br>$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$ 为平面上的三个点 | 3. 两点式方程<br>$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$<br>$M_1\{x_1,y_1,z_1\},M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为直线上的两点 |
| 4. 截距式方程<br>$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$<br>$a,b,c$ 分别为平面在三坐标轴上的截距，即平面通过三点 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$ | 4. 参数式方程<br>$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\\z=z_0+nt\end{cases}$<br>$M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的已知点<br>$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$ 为直线的方向矢量 |

注　由平面 $\Pi_1:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 与平面 $\Pi_2:a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 所确定的平面束

方程为

$\mu(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$，其中 $\mu,\lambda$ 不全为“0”.

平面间的关系见表 9-2.

表 9-2

<table>
<tr><th>平面间关系</th><th>平面与直线间关系</th><th>直线间关系</th></tr>
<tr><td>设有两个平面：<br>平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$<br>平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$<br>1. 平面 $\Pi_1 /\!/ \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$<br>2. 平面 $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$<br>3. 平面 $\Pi_1$ 与 $\Pi_2$ 的夹角 $\theta$，由下式确定<br>$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$</td><td>设直线与平面方程分别为<br>直线 $L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$<br>平面 $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$<br>1. $L /\!/ \Pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$<br>2. $L \perp \Pi \Leftrightarrow \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$<br>3. $L$ 与 $\Pi$ 的夹角 $\theta$，由下式确定<br>$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$<br>$l$ $\theta$ $\pi$</td><td>设有两直线：<br>直线 $L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$<br>直线 $L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$<br>1. $L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$<br>2. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$<br>3. 直线 $L_1$ 与 $L_2$ 的夹角 $\theta$，由下式确定<br>$\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$</td></tr>
<tr><td>点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为<br>$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$</td><td colspan="2">点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离为<br>$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\overrightarrow{M_1P}|}{|\overrightarrow{M_1P}|}=\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$<br>$M_0$ $d$ $M_1$ $P$ $l$</td></tr>
</table>

## 三、投影方程

**定义** 设 $\Gamma$ 为一条空间曲线，$\Pi$ 是一张平面，$\Gamma$ 的每一个点在平面 $\Pi$ 上均有一个垂足，由这些垂足构成的曲线就称为 $\Gamma$ 在平面 $\Pi$ 上的投影. 经过 $\Gamma$ 的每一点均有平面 $\Pi$ 的一条垂线，这些垂线，构成一个柱面，称为 $\Gamma$ 到平面 $\Pi$ 的投影柱面.

由以上定义可知，$\Gamma$ 在平面 $\Pi$ 上的投影方程可由下列联立方程组表示

$$\begin{cases} \Gamma \text{ 在平面 } \Pi \text{ 上的投影柱面方程} \\ \text{平面 } \Pi \text{ 的方程} \end{cases}.$$

设空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$， ④

求 $\Gamma$ 在 $xOy, xOz, yOz$ 平面上的投影方程.

(1) 先求 $\Gamma$ 在 $xOy$ 平面上的投影方程.

1° 从方程组 ④ 中消去 $z$，得到一个母线平行于 $z$ 轴的柱面方程 $\varphi(x,y)=0$

2° 将 $\varphi(x,y)=0$ 与 $z=0$ 联立,即得 $\Gamma$ 在 $xOy$ 平面上的投影方程

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}.$$

(2)$\Gamma$ 在 $xOz$ 平面上投影方程为

$\begin{cases}\psi(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$,其中 $\psi(x,z)=0$ 为母线平行于 $y$ 轴的柱面方程.

(3)$\Gamma$ 在 $yOz$ 平面上的投影方程为

$\begin{cases}w(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$,其中,$w(y,z)=0$ 为母线平行于 $x$ 轴的柱面方程.

**【例 9.10】**设曲线方程为

$\begin{cases}2x^2+4y+z^2=4z\\ x^2-8y+3z^2=12z\end{cases}$,求它在三个坐标面上的投影方程.

**【解】**通过配方,将上述方程组变形为

$$\begin{cases}2x^2+4y+(z-2)^2=4\\ x^2-8y+3(z-2)^2=12\end{cases},$$

解之得
$$x^2+4y=0,$$

于是,曲线在 $xOy$ 面上的投影方程为 $\begin{cases}x^2+4y=0,\\ z=0.\end{cases}$

类似地可求得曲线在 $xOz$,$yOz$ 面上的投影方程分别为

$$\begin{cases}x^2+z^2=4z\\ y=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}z^2-4y=4z\\ x=0\end{cases}.$$

**【例 9.11】**求曲线 $\Gamma\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2 & ⑤\\ x^2+y^2-ax=0 & ⑥\end{cases}$ $(a>0)$ 在各坐标面上的投影方程.

**【解】**曲线在 $XY$ 面上的投影方程为 $\begin{cases}x^2+y^2-ax=0\\ z=0\end{cases}.$

⑤ − ⑥,得
$$z^2+ax=a^2, \quad ⑦$$

于是可知曲线在 $XZ$ 面上的投影方程为 $\begin{cases}z^2+ax=a^2,\\ y=0.\end{cases}$

从式 ⑦ 中解出 $x=\dfrac{1}{a}(a^2-z^2)$,代入式 ⑤,得 $z^4+a^2(y^2-z^2)=0$,

于是可得曲线在 $YZ$ 面上的投影方程为 $\begin{cases}z^4+a^2(y^2-z^2)=0,\\ x=0.\end{cases}$

**【例 9.12】**求直线 $L$:$\begin{cases}x=3-t\\ y=-1+2t\\ z=5+8t\end{cases}$ 在三个坐标面及平面 $\Pi$:$x-y+3z+8=0$ 上的投影方程.

**【解】**直线 $L$ 在 $xOy$,$xOz$,$yOz$ 坐标面上的投影方程分别为

$$\begin{cases}x=3-t\\ y=-1+2t,\\ z=0\end{cases}\begin{cases}x=3-t\\ y=0\\ z=5+8t,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\ y=-1+2t,\\ z=5+8t.\end{cases}$$

下面求直线 $L$ 在平面 $\Pi$:$x-y+3z+8=0$ 上的投影方程.

先求出通过直线 $L$ 且垂直于平面 $\Pi$ 的平面 $\Pi^*$ 的方程,此即直线 $L$ 在平面 $\Pi$ 上的投影柱面.

直线 $L$ 的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{-1,2,8\}$，平面 $\Pi$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,3\}$，设平面 $\Pi^*$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}^*$，由投影柱面的意义有

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 2 & 8\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\{14,11,-1\},$$

又平面 $\Pi^*$ 通过直线 $L$，可知直线 $L$ 上的点 $P(3,-1,5)$ 在平面 $\Pi^*$ 上，于是该平面方程为

$$14(x-3)+11(y+1)-(z-5)=0,$$

即

$$14x+11y-z-26=0,$$

故所求 $L$ 在 $\Pi$ 上的投影方程为 $\begin{cases}14x+11y-z-26=0\\ x-y+3z+8=0\end{cases}$.

## 四、曲面方程

### 1. 柱面方程

由平行于定直线并沿定曲线 $C$ 移动的直线 $L$ 描绘出的轨迹叫做柱面. 定曲线叫做柱面的准线，动直线 $L$ 叫做柱面的母线.

(1) 准线为 $\Gamma$：$\begin{cases}f(x,y)=0\\ z\quad\quad=0\end{cases}$，母线 // $z$ 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$，

准线为 $\Gamma$：$\begin{cases}\varphi(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$，母线 // $y$ 轴的柱面方程为 $\varphi(x,z)=0$，

准线为 $\Gamma$：$\begin{cases}\psi(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$，母线 // $x$ 轴的柱面方程为 $\psi(y,z)=0$.

常见的柱面方程见表 9-3.

表 9-3

| 名称 | 方程 | 图形 |
|---|---|---|
| 圆柱面 | $x^2+y^2=R^2$ | |
| 椭圆柱面 | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ | |
| 双曲柱面 | $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ | |
| 抛物柱面 | $x^2=2py,(p>0)$ | |

(2) 准线为 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$,母线的方向矢量为$\{l,m,n\}$的柱面方程的求法:

首先,在准线上任取一点$(x,y,z)$,则过点$(x,y,z)$的母线方程为

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n},$$

其中 $X,Y,Z$ 为母线上任一点的流动坐标,消去方程组

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \\ \dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n} \end{cases}$$
中的 $x,y,z$ 便得所求的柱面方程.

**【例 9.13】** 设准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$, ⑧

母线的方向数为 $-1,0,1$,求这个柱面方程.

**【解】** 柱面的母线方程可表示为 $\dfrac{X-x}{-1}=\dfrac{Y-y}{0}=\dfrac{Z-z}{1}$

令 $\dfrac{X-x}{-1}=\dfrac{Y-y}{0}=\dfrac{Z-z}{1}=t\Rightarrow x=X+t,y=Y,z=Z-t$,

将其代入准线方程 ⑧ 有 $\begin{cases} (X+t)^2+Y^2+(Z-t)^2=1, \\ 2(X+t)^2+2Y^2+(Z-t)^2=2, \end{cases}$ ⑨

解之得 $(Z-t)^2=0$,即 $Z=t$,将其代入方程组 ⑨

可知所求柱面方程为 $(X+Z)^2+Y^2=1$.

**【例 9.14】** 设准线方程为 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$, ⑩

母线平行于直线 $x=y=z$,求该柱面方程.

**【解】** 由题设可知母线的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{1,1,1\}$,$(x,y,z)$为准线上任一点,于是柱面的母线方程可表示为 $\dfrac{X-x}{1}=\dfrac{Y-y}{1}=\dfrac{Z-z}{1}$,

或 $X=x+t,Y=y+t,Z=z+t$,代入准线方程 ⑩,得

$$2Y-2Z-1=0,$$

这就是所求柱面方程,该柱面为平行于 $X$ 轴的平面.

(3) 设准线方程为参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad (a\leqslant t\leqslant b) \\ z=g(t) \end{cases}$

母线的方向数为 $l,m,n$ 的柱面方程的求法.

首先设 $t=t_0\in[a,b]$,可得准线上一点$(\varphi(t_0),\psi(t_0),g(t_0))$,故母线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t_0)+lu \\ y=\psi(t_0)+mu. \quad (-\infty<u<+\infty,\text{其中 } u \text{ 为参数}) \\ z=g(t_0)+nu \end{cases} \quad ⑪$$

其次,当 $t_0$ 在$[a,b]$上变化,$u$ 取所有的值时,由式 ⑪ 所确定的点$(x,y,z)$就布满整个柱面,故柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t)+lu \\ y=\psi(t)+mu. \quad (a\leqslant t\leqslant b,-\infty\leqslant u\leqslant+\infty) \\ z=g(t)+nu \end{cases}$$

标准二次方程及其图形见表 9-4.

**表 9-4**

| 曲面名称 | 方　程 | 图　形 |
|---|---|---|
| 椭球面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ （$a,b,c$ 均为正数） | |
| 单叶双曲面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ （$a,b,c$ 均为正数） | |
| 双叶双曲面 | $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ （$a,b,c$ 均为正数） | |
| 椭圆抛物面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ （$a,b,p$ 均为正数） | |
| 双曲抛物面（又名马鞍面） | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ （$a,b,p$ 均为正数） | |
| 二次锥面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ （$a,b,c$ 为正数） | |

**2. 旋转曲面方程**

由一已知平面曲线 $L$ 绕该平面上一定直线旋转而成的曲面叫做旋转曲面，定直线叫做旋转曲面的轴，曲线 $L$ 叫做旋转面的母线.

设有平面曲线 $L$：$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

(1) 曲线 $L$ 绕 $x$ 轴旋转所成的旋转曲面方程为：$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；

(2) 曲线 $L$ 绕 $y$ 轴旋转所成的旋转曲面方程为：$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

(3) 空间曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转所成的旋转面方程：

1° 解出 $\begin{cases}x=x(z)\\y=y(z)\end{cases}$；

2° 旋转面方程为：$x^2+y^2=x^2(z)+y^2(z)$.

**【例 9.15】** 求下列各平面曲线的旋转面方程：

(1) $\begin{cases}x^2+4y^2=1\\z\qquad\quad=0\end{cases}$ 分别绕 $x$ 轴，$y$ 轴旋转.

(2) 求空间直线 $\begin{cases}x+y-z=4\\x-y+2z=1\end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转的旋转面方程.

**【解】** 平面曲线绕某轴旋转，则该坐标所对应的变量不变.

(1) 绕 $x$ 轴的旋转面方程 $x^2+4(y^2+z^2)=1$，

绕 $y$ 轴的旋转面方程 $x^2+z^2+4y^2=1$.

(2) 解得 $x=\dfrac{1}{2}(5-z)$，$y=\dfrac{3}{2}(1+z)$，旋转面方程为：

$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}(5-z)^2+\dfrac{9}{4}(1+z)^2$，即 $4x^2+4y^2-10z^2-8z-34=0$.

**【例 9.16】** 求以原点为顶点且经过三坐标轴的正圆锥面方程.

**提示** 准线为 $\Gamma$：$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\end{cases}$，顶点为 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的锥面方程的求法.

先设 $M(X,Y,Z)$ 为锥面上任一点，直线 $AM$ 为锥面的母线，它与准线 $\Gamma$ 的交点为 $(x,y,z)$，则母线方程为 $\dfrac{X-x_0}{x-x_0}=\dfrac{Y-y_0}{y-y_0}=\dfrac{Z-z_0}{z-z_0}$，

从联立方程组
$$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\\\dfrac{Z-x_0}{x-x_0}=\dfrac{Y-y_0}{y-y_0}=\dfrac{Z-z_0}{z-z_0}\end{cases}$$

中消去 $x,y,z$，便得所求锥面方程为 $F(X,Y,Z)=0$.

**【解】** 以 $O(0,0,0)$ 为顶点的锥面经过三坐标轴，易知 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ 必在锥面上，由 $A,B,C$ 三点所确定的平面为
$$x+y+z=1.$$
该平面与正圆锥面的交线是一个圆
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=1\end{cases}. \qquad ⑫$$
这是锥面的准线，设 $M(X,Y,Z)$ 为锥面上任一点，$(x,y,z)$ 为母线 $OM$ 与准线的交点，故母线方程为
$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z},$$
令
$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=\frac{1}{t},$$
则 $x=Xt$，$y=Yt$，$z=Zt$，代入式 ⑫ 得
$$\begin{cases}t^2(X^2+Y^2+Z^2)=1,\\t(X+Y+Z)=1.\end{cases}$$

消去参数 $t$，则得 $$XY + YZ + ZX = 0.$$

即 $-XY + YZ + ZX = 0, XY - YZ + ZX = 0, XY + YZ - ZX = 0$

这就是所求的锥面方程.

**【例 9.17】** 求直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 $L_0$，并求 $L_0$ 绕 $y$ 轴旋转一周所得的曲面方程.

**【解】** 平面 $\Pi$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$，直线 $L$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{1,1,-1\}$. 于是求直线 $L$ 在平面 $\Pi$ 上的投影平面方程

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{即 } x-3y-2z+1=0.$$

于是 $L_0$ 的方程为 $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$，消去 $z$ 得 $x=2y$.

所以 $L_0$ 的参数式 $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}(1-t) \end{cases}$.

故所求旋转曲面方程为

$$x^2+z^2=(2t)^2+\left[\frac{1}{2}(1-t)\right]^2=(2y)^2+\left[\frac{1}{2}(1-y)\right]^2,$$

即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　求平面方程

**提示** 最好依题意画草图，以助分析.

若题设条件中有两个相交的平面(其方程为一般式方程)，则用平面束方程处理简便；若题设条件中平面过某点，则一般用点法式方程，此时问题转化为求平面的法矢量 $\boldsymbol{n}$.

**【例 9.18】** (1) 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是________.

(2) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是________.

(3) 已知两直线方程是 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ 和 $L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，则过 $L_1$ 且平行于 $L_2$ 的平面方程是________.

**【解】** (1) $\boldsymbol{s}_1=\{0,1,1\}, \boldsymbol{s}_2=\{1,2,1\}$,

由题意平面$\Pi$ // 两直线，则平面的法矢量$\boldsymbol{n}$与该两直线的方向矢量垂直，于是可设

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

平面又过原点，所以所求平面方程为

$$-x+y-z=0,\text{即}\quad x-y+z=0.$$

(2) 直线的方向矢量为$\boldsymbol{s}=\{-1,3,1\}$，因为直线垂直于所求平面，于是可知平面的法矢量$\boldsymbol{n}$ // $\boldsymbol{s}$，取$\boldsymbol{s}=\{-1,3,1\}$为平面的法矢量，故所求平面为

$$(-1)(x-1)+3(y-2)+1\cdot(z+1)=0,$$

即
$$x-3y-z+4=0.$$

(3) 直线$L_1,L_2$的方向矢量分别为$\boldsymbol{s}_1=\{1,0,-1\},\boldsymbol{s}_2=\{2,1,1\}$，因为平面过$L_1$且平行于$L_2$，所以平面的法矢量：$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

由于平面过$L_1$，所以点$M(1,2,3)$在平面上，故平面方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0,$$

即
$$x-3y+z+2=0.$$

**【例 9.19】**求过直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$且垂直于平面$3x+2y-z-5=0$的平面方程.

**【解】**直线的方向矢量$\boldsymbol{s}=\{2,-3,2\}$，已知平面的法矢量为$\boldsymbol{n}=\{3,2,-1\}$，设所求平面的法矢量为$\boldsymbol{n}^*$，由题意$\boldsymbol{n}^*\perp\boldsymbol{n}$且$\boldsymbol{n}^*\perp\boldsymbol{s}$，故可令

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&2\\3&2&-1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+13\boldsymbol{k},$$

于是所求平面方程为　$-(x-1)+8(y+2)+13(z-2)=0.$

即
$$x-8y-13z+9=0.$$

**【例 9.20】**求平行于平面$6x+y+6z+5=0$，而与三坐标面所构成的四面体体积为一个单位的平面.

**【解】**设所求平面为　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$

由题设有
$$\begin{cases}\dfrac{1}{6}\mid abc\mid=1, & ①\\[2mm] \dfrac{1}{a}\Big/6=\dfrac{1}{b}\Big/1=\dfrac{1}{c}\Big/6=t, & ②\end{cases}$$

由方程②可知$a=\dfrac{1}{6t},b=\dfrac{1}{t},c=\dfrac{1}{6t}$，将其代入式①，得$t^3=\dfrac{1}{6^3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{6}$，

$$\Rightarrow a=1,b=6,c=1\text{ 或 }a=-1,b=-6,c=-1,$$

故所求平面方程为　$x+\dfrac{1}{6}y+z=1$ 或 $x+\dfrac{1}{6}y+z=-1.$

**【例 9.21】**求通过下列两平面$\Pi_1:2x+y-z-2=0$和$\Pi_2:3x-2y-2z+1=0$的交线，且与

平面 $\Pi_3: 3x+2y+3z-6=0$ 垂直的平面方程.

【解】设所求平面为

$$\lambda(2x+y-z-2)+\mu(3x-2y-2z+1)=0, \quad ③$$

即 $(2\lambda+3\mu)x+(\lambda-2\mu)y+(-\lambda-2\mu)z+(-2\lambda+\mu)=0$,

由于该平面 $\perp$ 平面 $\Pi_3$,所以它们的法矢量一定互相垂直,于是

$$3(2\lambda+3\mu)+2(\lambda-2\mu)+3(-\lambda-2\mu)=0, \Rightarrow 5\lambda-\mu=0,$$

取 $\lambda=1, \mu=5$, 代入 ③ 即得所求平面为

$$17x-9y-11z+3=0.$$

## 题型二　求空间直线方程

提示 若题设条件中有一个已知点,则一般考虑建立直线的参数方程简便.求两直线的交点,异面直线的距离等方面的问题,通常也借助于直线参数方程之便.

【例 9.22】求过点$(-1,-4,3)$并与下面两直线

$$L_1: \begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x+3y=-5 \end{cases} \text{和 } L_2: \begin{cases} x=2+4t \\ y=-1-t \\ z=-3+2t \end{cases}$$ 都垂直的直线方程.

【解】设所求直线方程为 $\begin{cases} x=-1+lt \\ y=-4+mt \\ z=3+nt \end{cases}$, $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$,

直线 $L_1$ 与 $L_2$ 的方向矢量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{-3,1,10\}$, $\boldsymbol{s}_2=\{4,-1,2\}$,

由题意有 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_2$,故

$$\begin{cases} -3l+m+10n=0 \\ 4l-m+2n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=-12n, \\ m=-46n. \end{cases}$$

令 $n=1$,则所求直线为

$$\begin{cases} x=-1-12t, \\ y=-4-46t, \\ z=3+t. \end{cases}$$

【例 9.23】求过点$(-1,0,4)$,平行于平面 $3x-4y+z=10$,且与直线 $x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

【解】设所求的直线方程为 $\begin{cases} x=-1+lt \\ y=mt \\ z=4+nt \end{cases}$, $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$,

平面的法矢量 $\boldsymbol{n}=\{3,-4,1\}$,由直线与平面平行,所以

$$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s} \Leftrightarrow 3l-4m+n=0, \quad ④$$

因为两直线相交,故有 $lt=-3+mt=\dfrac{4+nt}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-l)t=3 \\ (2l-n)t=4 \end{cases} \Rightarrow 4m+3n-10l=0, \quad ⑤$$

解方程 ④,⑤ 得 $l=\frac{4}{7}n, m=\frac{19}{28}n$,

令 $n=28$,得 $l=16, m=19$,

故,所求直线为 $\begin{cases} x=-1+16t, \\ y=19t, \\ z=4+28t. \end{cases}$

**【例 9.24】**直线过点 $A(-3,5,-9)$,且与两直线

$L_1:\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$ 相交,求此直线方程.

**【解】**设所求直线方程 $L:\begin{cases} x=-3+lt \\ y=5+mt \\ z=-9+nt \end{cases}$.

因为直线 $L$ 与直线 $L_1,L_2$ 相交

所以 $\begin{cases} 5+mt=-9+3lt+5 \\ -9+nt=-6+2lt-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-3l)t=-9 \\ n=2l \end{cases}$. ⑥

$\begin{cases} 5+mt=-12+4lt-7 \\ -9+nt=-15+5lt+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-4l)t=-24 \\ (n-5l)t=4 \end{cases}$. ⑦

由方程组 ⑥ 与方程组 ⑦,得 $n=2l, m=22l$,

令 $l=1$,则 $m=22, n=2$,

故所求直线方程为 $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5+22t \\ z=-9+2t \end{cases}$,

**【例 9.25】**判断两直线 $L_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ 和 $L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$

是否在同一平面上,若在同一平面上,则求交点;若不在同一平面上,则求两直线间的距离.

**【解】**直线 $L_1,L_2$ 的方向矢量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{1,1,2\}, \boldsymbol{s}_2=\{1,3,4\}$,该两直线分别通过 $P(-1,0,1)$,$Q(0,-1,2)$ $\overrightarrow{PQ}=\{1,-1,1\}$,

因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$,所以直线 $L_1$ 与 $L_2$ 为异面直线.

直线 $L_1$ 与 $L_2$ 的参数方程分别为

$$L_1:\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=1+2t \end{cases}, \quad L_2:\begin{cases} x=s \\ y=-1+3s \\ z=2+4s \end{cases}.$$

设两直线间的距离为 $d$,则

$$d=\sqrt{(s-t+1)^2+(-1+3s-t)^2+(1+4s-2t)^2},$$

令

$$h=(s-t+1)^2+(-1+3s-t)^2+(1+4s-2t)^2,$$

$$\begin{cases} h'_s=52s-24t+4=0 \\ h'_t=-24s+12t-4=0 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{7}{3}, s=1,$$

由二元函数求极值的方法可知，当 $t=\dfrac{7}{3}, s=1$ 时的距离 $d$ 最小，为 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

## 第3节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　已知三向量共面，要想到它们的混合积为零，即它们的坐标分量所组成的行列式为零.

**【例 9.26】** 判断下列两直线 $L_1: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 和 $L_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

是否在同一平面内，若是，则求两直线的交点；若不是，则试求它们的最短距离.

**【解】** 直线 $L_1$ 与 $L_2$ 的方向矢量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{2,3,4\}, \boldsymbol{s}_2=\{1,1,2\}$，并且它们分别过点 $P(0,-3,0), Q(1,-2,2), \overrightarrow{PQ}=\{1,1,2\}$. 直线 $L_1$ 与 $L_2$ 共面 $\Leftrightarrow$ 矢量 $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \overrightarrow{PQ}$ 共面，即混合积 $=0$，因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$ 故直线 $L_1$ 与 $L_2$ 共面.

下面求直线 $L_1$ 与 $L_2$ 的交点，

为此令　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}=t,$　①

即 $x=2t, y=-3+3t, z=4t$，代入 $L_2$ 中，得

$$\frac{2t-1}{1}=\frac{(-3+3t)+2}{1}=\frac{4t-2}{2}.$$

$\Rightarrow t=0$，代回①，可得 $x=0, y=-3, z=0$，

故 $(0,-3,0)$ 为直线 $L_1$ 与 $L_2$ 的交点.

### 二、综合题解析

**【例 9.27】** 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求

(1) 使方向导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}}\right|_{(0,0)}\neq 0$ [方向 $\boldsymbol{\Gamma}=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}, \alpha\in[0,2\pi)$] 的最大 $\alpha$ 值（记为 $\alpha_0$）；

(2) 过点 $M(2,-1,3)$，与直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ 相交，且与平面 $\Pi_1: 3x-2y+z+5=0$ 的夹角为 $\alpha_0$ 的直线 $L$ 的方向向量.

**【分析】** (1) 利用方向导数的定义，计算 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}}\right|_{(0,0)}$（它是 $\alpha$ 的函数），由此确定使 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}}\right|_{(0,0)}\neq 0$ 的最大 $\alpha$ 值 $\alpha_0$.

(2) 设 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$，则利用 $L$ 的三个条件[过 $M(2,-1,3)$，与 $L_1$ 相交及与 $\Pi_1$ 的夹角为 $\alpha_0$] 确定 $\boldsymbol{s}$.

**【解】**(1) 由于 $f(x,y)$ 是非初等函数，所以利用定义计算方向导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}}\right|_{(0,0)}$.

由于在方向 $\boldsymbol{\Gamma}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 上，$x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha$，所以对 $\alpha\in[0,2\pi)$ 有

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}}\right|_{(0,0)}=\lim_{r\to0}\frac{f(r\cos\alpha,r\sin\alpha)-f(0,0)}{r}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{\dfrac{r^5\cos^5\alpha}{(r\sin\alpha-r^2\cos^2\alpha)^2+r^6\cos^6\alpha}}{r}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{r^3\cos^5\alpha}{(\sin\alpha-r\cos^2\alpha)^2+r^4\cos^6\alpha}=\begin{cases}1, & \alpha=0\\ -1, & \alpha=\pi.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因此使 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}}\right|_{(0,0)}\neq0$ 的最大 $\alpha$ 值 $\alpha_0=\pi$.

(2) 设 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$，则由 $L$ 过点 $M(2,-1,3)$ 及与直线 $L_1$ 相交知，向量 $\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}$ 共面[其中，$M_0=(1,0,-2)$ 是 $L_1$ 上的点，$\boldsymbol{s}_1=\{1,-1,1\}$ 是 $L_1$ 的方向向量]，于是有

$$[\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}]=0,$$

即 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0$，由此得 $l,m,n$ 满足 $l+m=0$. ②

此外，由于 $L$ 与平面 $\Pi$ 的夹角为 $\alpha_0=\pi$，即 $L$ 与平面 $\Pi_1$ 平行，或者说 $L$ 与 $\Pi_1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3,-2,1\}$ 垂直，所以 $l,m,n$ 满足

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0,\text{即 } 3l-2m+n=0. \quad ③$$

由式 ② 和式 ③ 得，$l=-\dfrac{1}{5}n, m=\dfrac{1}{5}n$. 所以 $L$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\left\{-\dfrac{1}{5}n,\dfrac{1}{5}n,n\right\}$（$n$ 是不为 0 的实数）.

## 习　题　九

**1.** 设有两个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，试比较 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的大小.

**2.** 化简下列各式：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]$；

(3) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]$.

**3.** 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{2}{3}\pi$，问：系数 $\lambda$ 为何值时，向量 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直.

**4.** 求同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的单位矢量.

**5.** 若 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n},\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$，式中 $|\boldsymbol{m}|=2$，$|\boldsymbol{n}|=1$，又 $(\boldsymbol{m}\hat{,}\boldsymbol{n})=\dfrac{\pi}{2}$，化简表达式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$.

6. 求平行四边形的面积，若已知其对角线为矢量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$，而 $|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=2$，$(\boldsymbol{m}\hat{,}\boldsymbol{n})=\frac{\pi}{6}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，
问：(1)$k$ 为何值时，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$；
(2)$k$ 为何值时，以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形面积为 6.

8. 求通过三平面：$2x+y-z-2=0$，$x-2y+z+1=0$ 和 $x+y+z-3=0$ 的交点，且平行于平面 $x+y+2z=0$ 的平面方程.

9. 过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线，作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面，求切平面方程.

10. 设 $L_1$，$L_2$ 为两条共面直线，$L_1$ 的方程为 $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$，$L_2$ 通过点 $(2,-3,-1)$，且与 $x$ 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与 $z$ 轴正向夹角为锐角，求 $L_2$ 的方程.

11. 求直线 $\begin{cases}x=3z-1\\y=2z-3\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}y=2x-5\\z=7x+2\end{cases}$ 之间的垂直距离.

12. 已知直线 $\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-z+d=0\end{cases}$ 与 $z$ 轴相交，求 $d$ 值.

13. 在平面 $x+y+z+1=0$ 内，求作一直线，使它通过直线 $\begin{cases}y+z+1=0\\x+2z=0\end{cases}$ 与平面的交点，且与已知直线垂直.

14. 决定 $\lambda$，使直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 相交.

15. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\y=z\end{cases}$ 在各坐标平面上的投影方程.

16. 求准线为 $\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=1,\\x^2=y^2+z^2,\end{cases}$ 母线平行于 $z$ 轴的柱面方程.

17. 求直线 $\begin{cases}x+y-z=1\\-x+y-z=1\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程.

18. 求通过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 和 $x^2=y^2+z^2$ 的交线，而母线平行于 $z$ 轴的柱面方程.

## 参　考　答　案

1. $0<\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}<\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

$\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}=\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

$\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}>\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. (1)$2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；　(2)$3\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；　(3)$2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

3. $\lambda=40$.

4. $\pm\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$.

**5.** 74.　**6.** 5.　**7.** (1) $k=-2$, (2) $k=-1$ 或 $k=5$.

**8.** $x+y+2z-4=0$.

**9.** $387x-164y-24z-421=0$ 及 $3x-4y-5=0$.

**10.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{\sqrt{6}}=\dfrac{z+1}{\sqrt{6}}$.

**11.** $\dfrac{3\sqrt{35}}{7}$.　**12.** $d=3$.　**13.** $\begin{cases}2x+y-z+1=0,\\ x+y+z+1=0.\end{cases}$　**14.** $\lambda=\dfrac{5}{4}$.

**15.** $\begin{cases}x^2+2y^2=4,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+2z^2=4,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}z=y,\\ x=0.\end{cases}$ $(|y|\leqslant\sqrt{2})$.

**16.** $5x^2-3y^2=1$.　**17.** $\begin{cases}y-z-1=0,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

**18.** $5x^2-3y^2=1$，双曲柱面.

# 第十章　多元函数微分学

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、二元函数的定义

设有三个变量 $x,y,z$，如果对于变量 $x,y$ 的变化范围内每一对数值，按照一定的法则，变量 $z$ 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 $z$ 是变量 $x,y$ 的二元函数，记为

$$z=f(x,y).$$

和一元函数一样，二元和二元以上的函数也只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示自变量与因变量无关.

**【例 10.1】** 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

**【解】** 令 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow x=\dfrac{u}{1+v}, y=\dfrac{uv}{1+v}$，则

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v},$$

故 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}\quad(y\neq-1)$.

一般讲，二元函数的定义域是平面上的一个区域，常用图形表示出来；二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是三维空间中的一张曲面.

**提示** 求较复杂点的多元函数的定义域也和一元函数一样，先写出构成部分的各简单函数的定义域，再解联立不等式组即得所求定义域.

**【例 10.2】** 求 $z=\arcsin(2x)+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域.

**【解】** 对 $\arcsin(2x)$，　　$D_f: |2x|\leqslant 1$，

对 $\sqrt{4x-y^2}$，　　$D_f: 4x-y^2\geqslant 0$，

对 $\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$，$D_f: 1-x^2-y^2>0$，且 $1-x^2-y^2\neq 1$.

故，所求函数的定义域为(如图 10-1 所示)

$$\begin{cases}|2x|\leqslant 1\\ 4x-y^2\geqslant 0\\ 1-x^2-y^2>0\\ 1-x^2-y^2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ y^2\leqslant 4x\\ 0<x^2+y^2<1\end{cases},$$

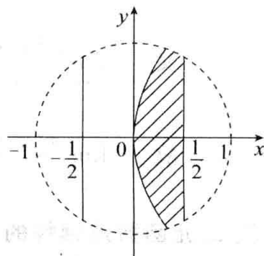



图 10-1

## 二、二元函数的极限及连续性

### 1. 二元函数的极限

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

恒有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

二元函数的极限要求点 $Q(x,y)$ 以任何方式、任何方向、任何路径趋向 $P(x_0,y_0)$ 时，均有

$$f(x,y)\to A(x\to x_0,y\to y_0).$$

倘若沿两条不同的路径，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不相等，则可判断 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在，这是证明多元函数极限不存在的有效方法.

**【例 10.3】** 求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} \dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$.

**【解】** 因为当 $(x,y)$ 沿 $x=y$ 的路径趋于无穷时，$\left|\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{|x|}}{5x}\right|=\dfrac{1}{5\sqrt{|x|}}$，而

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5\sqrt{|x|}}=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y=x}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}=0$.

又
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y=-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{|x|}}{2}}}\frac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}=\lim_{\substack{x\to\infty\\y=-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{|x|}}{2}}}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}}=1,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$ 不存在.

**【例 10.4】** 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$.

**【解】**
$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x^3-x}}\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^3(x^3-x)+x(x^3-x)^4+x^2(x^3-x)}{x+(x^3-x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^3-x^4+o(x^4)}{x^3}=-1,$$

又
$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+x^5+x^3}{2x}=0,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$ 不存在.

### 2. 二元函数连续性的定义

**定义 1** 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，分别给自变量 $x,y$ 在 $x_0,y_0$ 处以增量 $\Delta x,\Delta y$，得全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

如果极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\Delta z=0$，则称 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

**定义 2** 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 满足如下条件：

(1) $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的某邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

## 三、偏导数、全导数及全微分

### 1. 偏导数的定义

设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，给自变量 $x$ 以增量 $\Delta x$，而 $y$ 保持不变(即 $y=y_0$)，相应地得到函数关于 $x$ 的偏增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

存在，则该极限值就称为 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处对变量 $x$ 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\text{ 或 }f'_x(x_0,y_0),$$

即

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

同样可定义

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

注 在分界点处的偏导数，用偏导数定义求.

【例 10.5】设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$.

【解】$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$. 同理有 $f'_y(0,0)=0$.

### 2. 全导数的定义

设 $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，$w=g(t)$ 且 $f,\varphi,\psi,g$ 均可导，则 $z=f[\varphi(t),\psi(t),g(t)]$ 是关于 $t$ 的一元函数，也可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\quad\text{—— 称为 } z \text{ 对 } t \text{ 的全导数.}$$

### 3. 全微分的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，给 $x,y$ 在 $x_0,y_0$ 处分别以增量 $\Delta x$，$\Delta y$，相应地得到函数的全增量 $\Delta z$，若其可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中，$A,B$ 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关；$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$；$o(\rho)$ 为 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时 $\rho$ 的高阶无穷小，则称函数 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处可微；$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处的全微分，记为

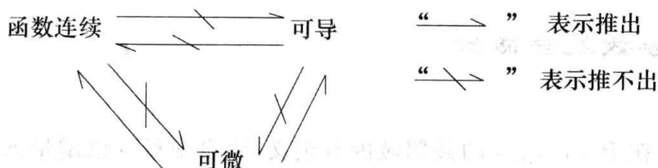
$$\left.\mathrm{d}z\right|_{x_0,y_0}=\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y.$$

当 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 可微时，$A=\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$，$B=\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$，

于是
$$\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\mathrm{d}y.$$

一般地
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 连续，可导（两个偏导数存在）与可微三者的关系如下：




**【例 10.6】** 求由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分.

**【解】** $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 的两边分别对 $x,y$ 求偏导数，并解出 $z'_x,z'_y$，得

$$z'_x\big|_{(1,0,-1)}=-\frac{x+yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}\Big|_{(1,0,-1)}=1,$$

$$z'_y\big|_{(1,0,-1)}=-\frac{y+xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}\Big|_{(1,0,-1)}=-\sqrt{2},$$

故
$$\mathrm{d}z=\big|_{(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\,\mathrm{d}y.$$

## 四、基本定理

**定理 1**（可微与偏导数存在的关系定理） 若 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微，则在该点处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

**定理 2**（偏导数存在与可微的关系定理） 若 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 $P(x,y)$ 点的某邻域内存在，并且在 $P(x,y)$ 点处连续，则 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微.

**定理 3**（求偏导数与次序无关的定理） 若 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 及 $f''_{yx}(x,y)$ 在区域 $D$ 内连续，则有

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

**【例 10.7】** 二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微的充分条件是

(A) $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续.

(B) $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 的某邻域存在.

(C) $\Delta z-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y$，当 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，是无穷小量.

(D) $\dfrac{\Delta z-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，当 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，是无穷小量.

【　】

【解】检查对照以上定理以及全微分的定义，可知应该选(D).

【例 10.8】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

则在原点(0,0)处 $f(x,y)$

(A) 偏导数不存在.　　(B) 不可微.

(C) 偏导数存在且连续.　　(D) 可微.　　【　】

【解】$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}=0;$

同理　$f'_y(0,0)=0.$

若(C)正确，则(D)一定正确，又因为该题是单选题.

所以(A)，(C)不入选.

因为 $\Delta z=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+\alpha$，且知 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，

所以 $\alpha=\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\alpha}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0.$

所以函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微，而(D)入选.

注　用全微分定义验证一个可导函数的可微性只需检验

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}\overset{?}{=}0.\ 若=0，则可微.$$

【例 10.9】设 $\varphi(x)$ 为任意一个 $x$ 的可微函数，$\psi(y)$ 为任意一个 $y$ 的可微函数，若已知 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$，则 $F(x,y)$ 是

(A) $f(x,y)+\varphi(x)$.　　(B) $f(x,y)+\psi(y)$.

(C) $f(x,y)+\varphi(x)+\psi(y)$.　　(D) $f(x,y)+\varphi(x)\psi(y)$.　　【　】

【解】若 $F(x,y)=f(x,y)+\varphi(x)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\varphi'(x),\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi'(x))=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

可知(A)不入选. 同理可验证(B)、(C)也不入选. 故(D)入选.

【例 10.10】已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 $a$ 和 $b$ 的值分别是

(A) $-2$ 和 2.　　(B) 2 和 $-2$.

(C) $-3$ 和 3.　　(D) 3 和 $-3$.　　【　】

【解】由题设有

$$\mathrm{d}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y,$$

即
$$f'_x(x,y)=axy^3-y^2\cos x,$$
$$f'_y(x,y)=1+by\sin x+3x^2y^2,$$
$$f''_{xy}(x,y)=3axy^2-2y\cos x,$$
$$f''_{yx}(x,y)=by\cos x+6xy^2.$$

由 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 的表达式可知它们均为连续函数,由定理 3 可知
$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y),$$
即
$$3axy^2-2y\cos x=by\cos x+6xy^2,$$
$$\Rightarrow\begin{cases}3a=6\\b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$$ 故(B) 入选.

【例 10.11】设函数 $z=f(x,y)$,有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$,且 $f(x,0)=1,f'_y(x,0)=x$,则 $f(x,y)$ 为

(A) $1-xy+y^2$.　　(B) $1+xy+y^2$.

(C) $1-x^2y+y^2$.　　(D) $1+x^2y+y^2$.　　【　】

【解】$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$ 的两边对 $y$ 积分,得 $f'_y(x,y)=2y+\varphi(x)$.

将 $f'_y(x,0)=x$ 代入上式,得 $\varphi(x)=x$,于是 $f'_y(x,y)=2y+x$,

该式两边再对 $y$ 积分,得 $f(x,y)=y^2+xy+\psi(x)$,

将 $f(x,0)=1$ 代入上式,得 $\psi(x)=1$. 故 $f(x,y)=y^2+xy+1$,可见(B) 入选.

【例 10.12】设 $z=x^{y^2}$,结论正确的是

(A) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}>0$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}<0$.

(C) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\neq 0$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$.

【　】

【解】$z=e^{y^2\ln x}$,从而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{y^2\ln x}\cdot\frac{y^2}{x},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2y}{x}x^{y^2}(1+y^2\ln x);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y^2\ln x}2y\ln x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{2y}{x}x^{y^2}(1+y^2\ln x);$$
故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$.　可见(D) 入选.

## 五、多元函数的极值

**定义 1**　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点的某邻域内有定义,如果对于该邻域内异于 $P(x_0,y_0)$ 点的任一点 $Q(x,y)$,恒有
$$f(x,y)>f(x_0,y_0)\quad(\text{或 } f(x,y)<f(x_0,y_0)),$$
则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值(或极大值),极大值与极小值统称极值. 使函数 $z=f(x,y)$ 取极值的自变量 $x,y$ 的值,称为 $f(x,y)$ 的极值点.

**定义 2**　方程组 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0\\f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 的解,称为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点.

注　$P(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的驻点 $\not\Leftrightarrow$ $P(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极值点.

**定理 1**（取极值的必要条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的一阶偏导数存在，且 $P(x_0,y_0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的极值点，则

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

**定理 2**（函数取极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内有连续的二阶偏导数，且

$$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0,$$
$$[f''_{xy}(x_0,y_0)]^2-f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f''_{y^2}(x_0,y_0)<0.$$

则 $P(x_0,y_0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的一个极值点.

1° 若 $f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$（或 $f''_{y^2}(x_0,y_0)>0$），则 $P(x_0,y_0)$ 为极小值点.

2° 若 $f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$（或 $f''_{y^2}(x_0,y_0)<0$），则 $P(x_0,y_0)$ 为极大值点.

### 六、条件极值与无条件极值

无条件极值问题 $\triangleq$ 函数中的自变量只受定义域约束的极值问题.

条件极值问题 $\triangleq$ 函数中的自变量除受定义域约束外，还受其他条件限制的极值问题.

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的微分法

**提示** 求偏导数的方法很简单，在求 $f'_x(x,y,z)$ 时，将 $y,z$ 当做常数，利用一元函数的求导公式和导数的运算法则即可求得，求 $f'_y(x,y,z),f'_z(x,y,z)$ 类似.

符号 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y,z)$，表示先对 $x$ 求偏导，($y,z$ 暂时当常数)，然后再对 $y$ 求偏导(此时 $x,z$ 当常数)，符号 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}=f'''_{x^2z}(x,y,z),\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}=f'''_{yz^2}(x,y,z),\cdots$ 类似.

**【例 10.13】** 设 $u=x^{y^z}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

**【解】**

$$u=x^{y^z},\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{y^z\ln x})=e^{y^z\ln x}\cdot zy^{z-1}\ln x=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(e^{y^z\ln x})=e^{y^z\ln x}\cdot y^z\ln y\cdot\ln x=y^z\ln x\cdot\ln y x^{y^z}.$$

**【例 10.14】** 设 $z=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**【解】** $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{|y|}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{|y|}{x^2+y^2}\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & y>0\\ -\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & y<0\end{cases}.$$

## 题型二　复合函数微分法

提示 (1) 设 $u=\varphi(x,y),u=\psi(x,y),\omega=g(x,y)$ 在点$(x,y)$处有连续偏导数，而 $z=f(u,v,\omega)$ 在相应点$(u,v,\omega)$有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),g(x,y)]$ 在点$(x,y)$处有连续偏导数，且

$$(A):\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial \omega}\cdot\dfrac{\partial \omega}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial \omega}\cdot\dfrac{\partial \omega}{\partial y}.\end{cases}$$

(2) 设 $u=\varphi(x),v=\psi(x)$ 在点 $x$ 处可导，$z=f(u,v)$ 在相应点$(u,v)$处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$ 在点 $x$ 处可导，且

$$(B):\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

(3) 设 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 在点$(x,y)$处有连续的偏导数，而 $z=f(x,u,v)$ 在相应点$(x,u,v)$处有连续偏导数，则

$$(C):\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}.\end{cases}$$

公式(A)～(C)不必刻意去记，但要彻底理解，注意以下几点有助于理解并写出上述公式，并在解题中自如地应用.

① 用图示法表示出函数的复合关系. 公式(A),(B),(C)的图示分别如图 10-2(a)、(b)和(c)所示.

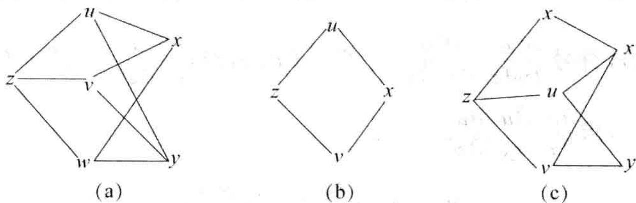



图 10-2

② 函数对某自变量的偏导数的结构：

ⓐ 项数 = 中间变量的个数.

ⓑ 每一项 = 函数对中间变量的偏导数 × 该中间变量对其指定自变量的偏导数.

③ 一般而言，函数 $z$ 对中间变量 $u,v,\omega$ 的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v},\dfrac{\partial z}{\partial \omega}$仍然是以 $u,v,\omega$ 为中间变量，$x,y$ 为自变量的复合函数，对它们求偏导数时须重复使用复合函数求导法.

对抽象函数在求偏导数时，一定要设中间变量. 例如：

$$z=f(e^x\sin y,x^2-y^2)，令\ u=e^x\sin y,v=x^2-y^2.$$

一般来讲，抽象函数的高阶偏导数采用如下记号较为简便，且不易出差错. 记号 $f_1',f_2',f_3'$ 分别表示函数 $f$ 对第一，第二，第三中间变量求偏导. 类似地，记号 $f_{12}'',f_{23}'',f_{31}''$ 分别表示 $f$ 对第一、二中间变量的二阶偏导，第二、三中间变量的二阶偏导，第三、一中间变量的二

阶偏导.

【10.15】设 $f(x,y,z)$ 是 $k$ 次齐次函数,即 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$,$\lambda$ 为某一常数,则结论正确的是

(A)$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=k^\lambda f(x,y,z)$.

(B)$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda^k f(x,y,z)$.

(C)$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$.

(D)$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=f(x,y,z)$.

【　】

【解】令 $u=tx,v=ty,\omega=tz$,则

$$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)\Rightarrow f(u,v,\omega)=t^k f(x,y,z),$$

上述两边对 $t$ 求导,得

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}=kt^{k-1}f(x,y,z)$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+z\frac{\partial f}{\partial \omega}=kt^{k-1}f(x,y,z).$$

$$\Rightarrow tx\frac{\partial f}{\partial u}+ty\frac{\partial f}{\partial v}+tz\frac{\partial f}{\partial \omega}=kt^k f(x,y,z)=kf(u,v,\omega)$$

$$\Rightarrow u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}+\omega\frac{\partial f}{\partial \omega}=kf(u,v,\omega),$$

故 $$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z),$$ 即(C)入选.

【例 10.16】设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】令 $xy=u,x+y=v$,

则
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(u)+\frac{1}{x}f'(u)\cdot y+yf'(v)\cdot 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{x^2}f(u)+\frac{y}{x}f'(u)+yf'(v)\right]$$

$$=-\frac{1}{x^2}f'(u)\cdot x+\frac{1}{x}f'(u)+\frac{y}{x}f''(u)\cdot x+f'(v)+yf''(v)\cdot 1$$

$$=yf''(u)+f'(v)+yf''(v).$$

【例 10.17】设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中 $f(t)$ 二阶可导,$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2f'(t)+g'_u+yg'_v$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2f'(t)+g'_u+yg'_v)=-2f''(t)+xg''_{uv}+g'_v+xyg''_{v^2}.$$

【例 10.18】设 $z=f(2x-y,y\sin x)$,其中 $f$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】令 $u=2x-y, v=y\sin x$，则 $z=f(u,v)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\&=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=2\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\\&=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2\sin x-y\cos x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{2}y\sin 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

**【例 10.19】** 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$. 其中，$f,\varphi$ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$.

**【解】**

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,$$

$\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 的两边对 $x$ 求偏导，得

$$\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot e^y\cdot\cos x+\varphi_3'\cdot\frac{dz}{dx}=0\Rightarrow\frac{dz}{dx}=-\frac{2x\varphi_1'+e^y\cos x\varphi_2'}{\varphi_3'},$$

故

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\cos x\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{2x\varphi_1'+e^y\cos x\varphi_2'}{\varphi_3'}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}.$$

**【例 10.20】** 设 $\omega=f(t)$，$t=\varphi(xy,x^2+y^2)$，其中 $f,\varphi$ 具有连续的二阶导数及偏导数，求 $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$.

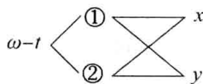



图 10-3

**【解】** 如图 10-3 所示中，令 ① 代表 $xy$，② 代表 $(x^2+y^2)$，

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t)(\varphi_1'\cdot y+\varphi_2'\cdot 2x),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}[f'(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')]\\&=f''(t)\frac{\partial t}{\partial x}(y\varphi_1'+2x\varphi_2')+f'(t)\frac{\partial}{\partial x}(y\varphi_1'+2x\varphi_2')\\&=f''(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')^2+f'(t)[y(\varphi_{11}''\cdot y+\varphi_{12}''\cdot 2x)+2\varphi_2'+2x(\varphi_{21}''\cdot y+\varphi_{22}''\cdot 2x)]\\&=f''(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')^2+f'(t)[y^2\varphi_{11}''+4xy\varphi_{12}''+4x^2\varphi_{22}''+2\varphi_2']\end{aligned}$$

**【例 10.21】** 已知函数 $u=u(x,y)$ 存在二阶连续偏导数满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad ①$$

(1) 试选择参数 $\alpha,\beta$，利用变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{\alpha x+\beta y}$ 将原方程变形，使新方程中不出现一阶偏导数项.

(2) 再令 $\xi=x+y,\eta=x-y$，使新方程变换形式.

【解】(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}e^{\alpha x+\beta y}+v\alpha e^{\alpha x+\beta y}=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\alpha v\right)e^{\alpha x+\beta y}$, ②

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{\alpha x+\beta y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha v\right)\alpha e^{\alpha x+\beta y}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha^2 v\right)e^{\alpha x+\beta y}, \quad ③$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\beta v\right)e^{\alpha x+\beta y}, \quad ④$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\beta\frac{\partial v}{\partial y}+\beta^2 v\right)e^{\alpha x+\beta y}. \quad ⑤$$

将 ②,③,④,⑤ 代入 ① 并消去 $e^{\alpha x+\beta y}$,得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(2\alpha+a)\frac{\partial v}{\partial x}+(-2\beta+a)\frac{\partial v}{\partial y}+(\alpha^2-\beta^2+a\alpha+a\beta)v=0,$$

由题意可知,应令 $2\alpha+a=0,\ -2\beta+a=0\Rightarrow\alpha=-\dfrac{a}{2},\beta=\dfrac{a}{2}$,

故原方程 $\Rightarrow\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$ ⑥

(2) 令 $\xi=x+y,\quad \eta=x-y$,故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

代入 ⑥,得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

## 题型三　隐函数微分法

**提示** (1) 由方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$,则

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},\quad (F'_y(x,y)\neq 0).$$

(2) 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

(3) 由三个变量两个方程所构成的方程组,一般是其中两个变量确定为第三个变量的一元函数. 例如

$$方程组\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}确定隐函数\ y=y(x),z=z(x),$$

$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$ 的求法可通过解关于$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$ 的线性方程组来完成. 即

$$\begin{cases}F'_x+F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=0\\G'_x+G'_y\dfrac{dy}{dx}+G'_z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=-F'_x\\G'_y\dfrac{dy}{dx}+G'_z\dfrac{dz}{dx}=-G'_x\end{cases},$$

上式中将$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$ 当做未知量用克莱姆法则求解.

(4) 由四个变量两个方程所构成的方程组,一般是其中两个变量确定为另两个变量的二元函数.例如

方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$确定隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$,$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 也可通过解关于$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$的线性方程组来完成

$$\begin{cases}F'_x+F'_u\frac{\partial u}{\partial x}+F'_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\\G'_x+G'_u\frac{\partial u}{\partial x}+G'_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F'_u\frac{\partial u}{\partial x}+F'_v\frac{\partial v}{\partial x}=-F'_x\\G'_u\frac{\partial u}{\partial x}+G'_v\frac{\partial v}{\partial x}=-G'_x\end{cases},$$

用克莱姆法则求解,同理可求出$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

**【例 10.22】** 设 $y=f(x,t)$,而 $t$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 $x,y$ 的函数,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**【解】** $\begin{cases}y=f(x,t)\\F(x,y,t)=0\end{cases}$确定 $y,t$ 为 $x$ 的一元函数.

两个方程的两边分别对 $x$ 求偏导,得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'_x(x,t)+f'_t(x,t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\F'_x(x,y,t)\cdot 1+F'_y(x,y,t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_t(x,y,t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-f'_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f'_x(x,t),\\F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-F'_x,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}f'_x&-f'_t\\-F'_x&F'_t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-f'_t\\F'_y&F'_t\end{vmatrix}}=\frac{F'_t\cdot f'_x-F'_x\cdot f'_t}{F'_t+F'_y\cdot f'_t}.$$

**【例 10.23】** 设$\begin{cases}x=-u^2+v+z\\y=u+vz\end{cases}$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial z}$.

**【解】** 所给的方程组中含有五个变量 $x,y,z,u,v$,从所求的结果中明显看出 $u,v$ 是因变量,$x,z$ 是自变量,$y$ 究竟是因变量,还是自变量呢?在这种所求偏导是一阶,而又有一变量的属性不太明确的情况下,用全微分形式不变性来处理比较简便.

对$\begin{cases}x=-u^2+v+z\\y=u+vz\end{cases}$的两边求全微分,得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=-2u\mathrm{d}u+\mathrm{d}v+\mathrm{d}z,\\\mathrm{d}y=\mathrm{d}u+z\mathrm{d}v+v\mathrm{d}z,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2u\mathrm{d}u-\mathrm{d}v=-\mathrm{d}x+\mathrm{d}z,\\\mathrm{d}u+z\mathrm{d}v=\mathrm{d}y-v\mathrm{d}z,\end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{-z\mathrm{d}x + (z-v)\mathrm{d}z + \mathrm{d}y}{2uz+1},$$

$$\mathrm{d}v = \frac{2u\mathrm{d}y + \mathrm{d}x - (1+2uv)\mathrm{d}z}{2uz+1},$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{2uz+1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2uz+1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z-v}{2uz+1}.$$

**【例 10.24】** 设函数 $z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定,证明:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

**【证法一】** 公式法:先求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$,

$$F'_x = F'_1 \cdot 1 + F'_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right),$$

$$F'_y = F'_1\left(-\frac{z}{y^2}\right) + F'_2,$$

$$F'_z = F'_1 \cdot \frac{1}{y} + F'_2 \cdot \frac{1}{x},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2F'_x}{xF'_z} = -\frac{x^2yF'_1 - zyF'_2}{xF'_1 + yF'_2},$$

$$y\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2F'_y}{yF'_z} = -\frac{-xzF'_1 + y^2xF'_2}{xF'_1 + yF'_2},$$

上面两式相加,即得 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

**【证法二】** 直接法:方程的两边分别对 $x,y$ 求偏导,注意 $x,y$ 彼此间无关,$z$ 是 $x,y$ 的函数,

$$F'_1\left(1+\frac{1}{y}z'_x\right) + F'_2\left(-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x}z'_x\right) = 0,$$

方程两边同乘以 $x^2y$,得 $xz'_x = \frac{yzF'_2 - x^2yF'_1}{xF'_1 + yF'_2}$. 由于对称性,即得

$$yz_y = \frac{xzF'_1 - y^2xF'_2}{yF'_2 + xF'_1},$$

上式两式相加,便得:$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

注 求二阶或二阶以上偏导数,通常用直接法简便.

**【例 10.25】** 设 $u=f(x,y)$,其中,$y$ 是由方程 $\varphi(x,y)=0$ 所确定的 $x$ 的函数($f$ 及 $\varphi$ 均有连续的二阶偏导数),求 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

**【解】**

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'_x + f'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = f''_{x^2} + f''_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(f''_{yx} + f''_{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f'_y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

$$= f''_{x^2} + 2f''_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f''_{y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + f'_y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \qquad ⑦$$

方程 $\varphi(x,y)=0$ 的两边对 $x$ 求导,得

$$\varphi'_x+\varphi'_y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \qquad ⑧$$

$$\varphi''_{x^2}\cdot 1+\varphi''_{xy}\frac{dy}{dx}+\left(\varphi''_{yx}+\varphi''_{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\varphi'_y\frac{dy}{dx^2}=0,$$

$$\varphi''_{x^2}+2\varphi''_{xy}\frac{dy}{dx}+\varphi''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\varphi'_y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

解得
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(\varphi'_y)^3}[\varphi''_{x^2}(\varphi'_y)^2-2\varphi''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y+\varphi''_{y^2}(\varphi'_x)^2]. \qquad ⑨$$

将式 ⑧ 和式 ⑨ 代入式 ⑦，得

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{\varphi'^2_y}\left[f''_{x^2}(\varphi'_y)^2-2f''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y+f''_{y^2}(\varphi'_x)^2-\frac{f'_y}{\varphi'_y}(\varphi''_{x^2}\varphi'^2_y-2\varphi''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y+\varphi''_{y^2}\varphi'^2_x)\right].$$

## 题型四　空间曲线在某点处的切线和法平面方程

**提示** (1) 设空间曲线 $\Gamma$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}\quad t\in T,$$

$t=t_0\leftrightarrow$ 曲线 $\Gamma$ 上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则曲线在该点的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(2) 设空间曲线 $\Gamma$ 的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases},$$

则曲线在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切线和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_P}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_P},$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_P(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_P(z-z_0)=0,$$

其中，$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ 为雅可比行列式.

**【例 10.26】** 求曲线 $\Gamma\begin{cases}x=\int_0^t e^u\cos u\,du\\ y=2\sin t+\cos t\\ z=1+e^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

**【解】** 当 $t=0$ 时，$\begin{cases}x=0,\\ y=1,\\ z=2.\end{cases}$

$x'=e^t\cos t,x'(0)=1;y'=2\cos t-\sin t,y'(0)=2;z'=3e^{3t},z'(0)=3,$

故，切线方程为
$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

法平面方程为　$x+2(y-1)+3(z-2)=0$，

即
$$x+2y+3z-8=0.$$

【例 10.27】求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点(1，−2，1)处的切线和法平面方程.

【解】令
$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6,$$
$$G(x,y,z)=x+y+z,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\1 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=2(y-z)\Big|_{(1,-2,1)}=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\begin{vmatrix}2z & 2x\\1 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=2(z-x)\Big|_{(1,-2,1)}=0;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,-2,1)}=\left.\begin{vmatrix}2x & 2y\\1 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=2(x-y)\Big|_{(1,-2,1)}=6;$$

故过点(1，−2，1)的切线方程为 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$.

法平面方程为　$-6(x-1)+0(y+z)+6(z-1)=0$.

即
$$x-z=0.$$

## 题型五　空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程

**提示** (1) 设曲面 $S$ 为显式方程 $z=f(x,y)$，则过 $S$ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_P}=\frac{z-z_0}{-1},$$

其中，$P(x_0,y_0)$ 为与 $M(x_0,y_0,z_0)$ 对应的 $xOy$ 平面上的一点.

(2) 设曲面 $S$ 为隐式方程 $F(x,y,z)=0$，则过 $S$ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面和法线方程分别为

$$F'_x\,|_M(x-x_0)+F'_y\,|_M(y-y_0)+F'_z\,|_M(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x\,|_M}=\frac{y-y_0}{F'_y\,|\,M}=\frac{z-z_0}{F'_z\,|_M}.$$

【例 10.28】求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点(1，2，0)处的切平面方程和法线方程.

【解】令
$$F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3,$$
$$F'_x\,|_{(1,2,0)}=2y\,|_{(1,2,0)}=4,$$
$$F'_y\,|_{(1,2,0)}=2x\,|_{(1,2,0)}=2,$$
$$F'_z\,|_{(1,2,0)}=1-e^z\,|_{(1,2,0)}=0.$$

故，切平面方程为　$4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$，

即
$$2x+y-4=0.$$

法线方程为　$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-0}{0}$，

即
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

【例 10.29】求过直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$，且与曲面 $2x^2-2y^2+2z=\frac{5}{8}$ 相切的切平面方程.

【解】令
$$F(x,y,z)=2x^2-2y^2+2z-\frac{5}{8},$$
则
$$F_x'=4x,\quad F_y'=-4y,\quad F_z'=2.$$
过直线 $L$ 的平面束方程为
$$3x-2y-z-5+\lambda(x+y+z)=0,$$
即
$$(3+\lambda)x+(\lambda-2)y+(\lambda-1)z-5=0,$$
其法矢量为
$$\{3+\lambda,\lambda-2,\lambda-1\},$$
设曲面与切平面的切点为 $(x_0,y_0,z_0)$，则
$$\begin{cases}\dfrac{3+\lambda}{4x_0}=\dfrac{\lambda-2}{-4y_0}=\dfrac{\lambda-1}{2}=t & ⑩\\(3+\lambda)x_0+(\lambda-2)y_0+(\lambda-1)z_0-5=0 & ⑪\\2x_0^2-2y_0^2+2z_0=\dfrac{5}{8} & ⑫\end{cases}$$
由式 ⑩ 和式 ⑪ 联立解之，有
$$x_0=\frac{2+t}{2t},\quad y_0=-\frac{2t-1}{4t},\quad z_0=-\frac{15}{8t^2},$$
把这些代入式 ⑫，得 $t^2-4t+3=0$. 解之，$t_1=1,t_2=3$，
因而
$$\lambda_1=3,\lambda_2=7,$$
故，所求切平面方程为
$$3x-2y-z-5+3(x+y+z)=0,$$
或
$$3x-2y-z-5+7(x+y+z)=0,$$
即
$$6x+y+2z=5 \text{ 或 } 10x+5y+6z=5.$$

【例 10.30】试证：曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任意一点处的切平面在各坐标轴上截距的平方和等于常数 $a^2$.

【证】令
$$F(x,y,z)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}},$$
$$F_x'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\quad F_y'=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},\quad F_z'=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}.$$
故，在曲面上任一点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面方程为
$$x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)+z_0^{-\frac{1}{3}}(z-z_0)=0,$$
在上式中令 $y=z=0$ 得切平面在 $x$ 轴上的截距为
$$x=x_0+x_0^{\frac{1}{3}}(y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},$$
由曲面方程的对称性可知，切平面在 $y,z$ 轴上的截距分别为
$$y=y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},z=z_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},$$
故

$$x^2+y^2+z^2=(a^{\frac{2}{3}})^2(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^2.$$

## 题型六　求无条件极值

**提示** 无条件极值的解法：

(1) 利用二阶偏导数之间的关系和符号判断取不取极值及极值的类型；

(2) 利用全微分来判断，即假设有一函数 $u=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处，如果

$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0,\mathrm{d}^2f(x_0,y_0)<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值，

$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0,\mathrm{d}^2f(x_0,y_0)>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值.

注 $\mathrm{d}^2f(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.$

(3) 配方法：适用于多项式或类似于多项式的函数类型.

**【例 10.31】** 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

**【解法一】** 方程的两边分别对 $x,y$ 求偏导，得，

$$\begin{cases}2x+2zz'_x-2-4z'_x=0\\2y+2zz'_y+2-4z'_y=0\end{cases}, \quad ⑬$$

由函数取极值的必要条件 $\begin{cases}z'_x=0\\z'_y=0\end{cases}$，　⑭

将 ⑭ 代入 ⑬ 解得 $x=1,y=-1,P(1,-1)$ 为驻点.

将 ⑬ 的两个方程分别对 $x,y$ 求偏导，得

$$A=z''_{x^2}\big|_P=\frac{(x-2)^2+(1-x)^2}{(2-z)^3}\bigg|_P=\frac{1}{2-z}. \quad ⑮$$

$$B=z''_{xy}\big|_P=0$$

$$C=z''_{y^2}\big|_P=\frac{(2-z)^2+(1+y)^2}{(2-z)^3}=\frac{1}{2-z}.$$

因为 $$B^2-AC=-\frac{1}{(2-z)^2}<0\quad(z\neq 2),$$

所以 $z=f(x,y)\big|_P$ 取极值.

将 $x=1,y=-1$ 代入原方程，得 $z_1=-2,z_2=6$，

把 $z_1=-2$ 代入 ⑮，$A=\dfrac{1}{2-z}\bigg|_{z=-2}=\dfrac{1}{4}>0$，

故，$z=f(1,-1)=-2$ 为极小值.

把 $z_2=6$ 代入 ⑮，$A=\dfrac{1}{2-z}\bigg|_{z=6}=-\dfrac{1}{4}<0$，

故 $z=f(1,-1)=6$ 为极大值.

**【解法二】** 配方法　原方程可变形为 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$，

于是

$$z=2\pm\sqrt{16-(x-1)^2-(y+1)^2}.$$

显然，当 $x=1,y=-1$ 时，根号中的极大值为 4，由此可知 $z=2\pm 4$ 为极值，$z=6$ 为极大值，$z=-2$ 为极小值.

## 题型七　求条件极值

**提示** 条件极值的解法：

(1) 化为无条件极值问题求解；

(2) 更一般的是利用拉格朗日乘数法求解.

这里提醒读者注意："乘数法"所得到的点只是"可能"的极值点，到底是否是极值点及其类型，要依据拉格朗日函数 $F(x,y,z)$ 的二阶微分 $d^2F$ 的符号来判断.

拉格朗日乘数法具体如下：

设目标函数为 $u = f(x,y,z)$，约束条件为 $\varphi(x,y,z) = 0$，求极值.

**方法一**：化为无条件极值.

① 由 $\varphi(x,y,z) = 0$ 中解出 $z = z(x,y)$（不一定能解出）；

② 代入 $u = f(x,y,z)$ 中，得 $u = f[x,y,z(x,y)]$；

③ 再按无条件极值求解.

**方法二**：拉格朗日乘数法.

① 作辅助函数

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z).$$

② 解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

求出驻点 $(x_0,y_0,z_0)$.

（求驻点时，先将含 $\lambda$ 的项移到右边，然后通过前三个方程得出 $x$ 与 $y$ 的关系式（或 $x$ 与 $y$，$z$ 的关系式），$x$ 与 $z$ 的关系式（或 $x$ 与 $y,z$ 的关系式），最后将关系式代入 $\varphi(x,y,z) = 0$ 中解出 $x_0,y_0,z_0$）.

③ 求出极值.

**注** ① 当 $f(x,y,z)$ 含有绝对值符号时，由拉格朗日乘数法所作的辅助函数为

$$F(x,y,z) = f^2(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z).$$

② 当目标函数 $f(x,y,z)$ 比较复杂时，可取在相同的约束条件 $\varphi(x,y,z) = 0$ 下与 $f(x,y,z)$ 具有相同驻点的简单形式 $f_*(x,y,z)$，作辅助函数 $F(x,y,z) = f_*(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$.

③ 当有两个约束条件 $\varphi(x,y,z) = 0$，$\psi(x,y,z) = 0$ 时，相应地辅助函数设为

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z),$$

然后解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$，求出驻点 $(x_0,y_0,z_0)$.

【例 10.32】求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $(x-y)^2-z^2=1$ 条件下的极值.

【解】为简单即求 $v=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 下的极值(注:$u$ 与 $v$ 在相同条件下的极值点相同).令

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1],$$

解方程组

$$\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda(x-y)=0\\ F'_y=2y-2\lambda(x-y)=0\\ F'_z=2z-2\lambda z=0\\ (x-y)^2-z^2-1=0\end{cases},\tag{16}$$

由 ⑯ $\Rightarrow(\lambda-1)z=0\quad\Rightarrow\lambda=1$ 或 $z=0$.

当 $\lambda=1$ 时,方程组不相容,故 $\lambda\neq1$,于是,只有 $z=0$,代入其他各式,得驻点:

$$P_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right),P_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\text{及 }\lambda=-\frac{1}{2},$$

又由

$$F''_{x^2}=2(1+\lambda),F''_{xy}=-2\lambda,F''_{y^2}=2(1+\lambda),$$
$$F''_{z^2}=2(1-\lambda),F''_{yz}=F''_{xz}=0,$$

$$\mathrm{d}^2F(x,y,x)=[2(1+\lambda)\mathrm{d}x^2+2(1+\lambda)\mathrm{d}y^2+2(1-\lambda)\mathrm{d}z^2-4\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\Big|_{\lambda=-\frac{1}{2}}$$
$$=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+3\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0,$$

故 $P_1,P_2$ 分别为 $v$ 的极小值点,亦即 $u$ 的极小值点.极小值为:

$$u\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)=u\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## 题型八　求最值

提示 设函数 $z=f(x,y)$ 在闭域 $D$ 上连续,则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上必有最大值与最小值,求最值的程序为:

(1) 求出 $f(x,y)$ 在 $D$ 内"可疑"的极值点的函数值;

(2) 求出 $f(x,y)$ 在 $D$ 的边界上的最值;

(3) 将上面所得之函数值进行比较,最大(小)者为最大(小)值.

如果是实际应用题,知道 $f(x,y)$ 在 $D$ 内只有一个驻点,则函数在该点的值就是所求的最大(小)值,不必再求 $f(x,y)$ 在 $D$ 的边界上的最值,也无需判别函数值是极大(或极小)值.

【例 10.33】求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$,$x$ 轴和 $y$ 轴所围成的闭域 $D$ 上的最大值与最小值.

【解】(1) 先求函数在 $D$ 内的驻点(如图 10-4 所示),解方程组

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ f'_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$$

得 $x=0$,$(0\leqslant y\leqslant6)$,及点 $(4,0)$,$(2,1)$;在 $D$ 内只有唯一驻点 $(2,1)$,在该点处 $f(2,1)=4$.

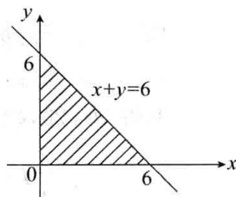


图 10-4

(2) 再求 $f(x,y)$ 在 $D$ 的边界上的最值.

在边界 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 和 $y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上 $f(x,y)=0$.

在边界 $x+y=6$ 上,$y=6-x$,代入 $f(x,y)$ 中,得

$$f(x,y)=x^2(6-x)(-2)=2x^2(x-6),$$
$$f'_x=4x(x-6)+2x^2=6x^2-24x=0$$

$$\Rightarrow x=0,x=4,\Rightarrow \text{当 } x=0 \text{ 时},f(x,y)=0;\text{当 } x=4 \text{ 时 } y=6-x\Big|_{x=4}=2,$$

$$f(4,2)=x^2y(4-x-y)\Big|_{(4,2)}=-64.$$

比较后可知 $f(2,1)=4$ 为最大值,$f(4,2)=-64$ 为最小值.

**【例 10.34】** 已知三角形周长为 $2p$,试求此三角形绕自己的一边旋转时所构成的旋转体体积的最大值.

**【解】** 设三角形的三边分别为 $x,y,z$(如图 10-5 所示),不妨设它绕 $AC$ 边旋转,$AC$ 边上的高为 $h$,面积为 $s$,于是

$yh=2s=2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$,则旋转体体积为

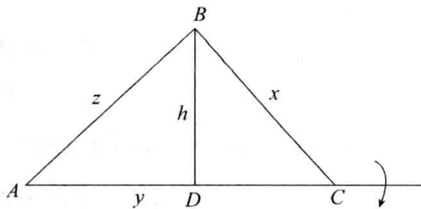


图 10-5

$$V=\frac{1}{3}\pi yh^2=\frac{1}{3}\pi y\frac{4p(p-x)(p-y)(p-z)}{y^2}$$
$$=\frac{4}{3}\pi p\frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{y},\text{其中 } x+y+z=2p.$$

为简便即求 $u=\ln(p-x)+\ln(p-y)+\ln(p-z)-\ln y$ 在条件 $x+y+z=2p$ 之下的驻点.

令 $F(x,y,z)=\ln(p-x)+\ln(p-y)+\ln(p-z)-\ln y+\lambda(x+y+z-2p)$

解方程组
$$\begin{cases}F'_x=-\dfrac{1}{p-x}+\lambda=0 & ⑰\\ F'_y=-\dfrac{1}{p-y}-\dfrac{1}{y}+\lambda=0 & ⑱\\ F'_z=-\dfrac{1}{p-z}+\lambda=0 & ⑲\\ x+y+z-2p=0 & ⑳\end{cases}$$

解这类方程组通常是将含 $\lambda$ 的项移到等式的右边,然后两式相除,消去 $\lambda$,得两变量之间的关系式.

由 ⑰ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{p-x}=\lambda$ ⑰′

⑱ $\Rightarrow$ $\dfrac{p}{y(p-y)}=\lambda$ ⑱′

⑲ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{p-x}=\lambda$ ⑲′

⑰′ ÷ ⑱′ 得:$p(p-x)=y(p-y)$, ㉑

⑰′ ÷ ⑲′ 得:$x=z$. ㉒

再将 ⑳,㉑,㉒ 联立,解之得

$x=z=\dfrac{3}{4}p,y=\dfrac{p}{2},P\left(\dfrac{3}{4}p,\dfrac{p}{2},\dfrac{3}{4}p\right)$为驻点.

故 $V$ 的最大值为 $V\Big|_P=\dfrac{\pi}{12}p^3$.

【例 10.35】在平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$与三坐标面所围成的四面体内(如图 10-6 所示),作一个以该平面为顶面,在 $xOy$ 坐标面上的投影为长方形(与 $AB$ 相接)的六面体中体积之最大者(其中 $a,b,c>0$).

【解】如图 10-6 所示,则六面体体积为

$$V=\iint_D z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=c\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^y\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}y,$$

直线 $AB$:$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

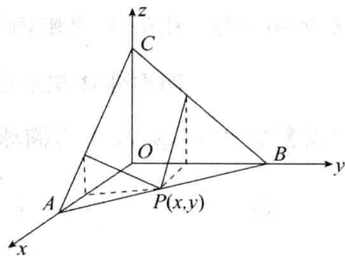


图 10-6

令

$$F(x,y)=c\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^y\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}y+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right),$$

解方程

$$\begin{cases}F'_x=y-\frac{y^2}{2b}-\frac{xy}{a}+\frac{\lambda}{a}=0\\F'_y=x-\frac{xy}{b}-\frac{x^2}{2a}+\frac{\lambda}{b}=0\\\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\end{cases}$$

得 $x=\frac{a}{2},y=\frac{b}{2}$. 此时

$$V=c\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{2}}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}abc,$$

即所求最大体积为$\frac{1}{8}abc$.

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　求多元对称函数的偏导数,要想到对任一变元所得的结果,可以经变元(或字母)的对换直接得到对其他变元的偏导.

【例 10.36】设 $x+y+z=\mathrm{e}^{xy}$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解】方程 $x+y+z=\mathrm{e}^{xy}$ 两边微分,得

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y),\text{即 }\mathrm{d}z=(y\mathrm{e}^{xy}-1)\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^{xy}-1)\mathrm{d}y,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy}-1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\mathrm{e}^{xy},$$

因为方程关于 $x,y$ 对称,所以$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\mathrm{e}^{xy}$.

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)e^{xy}$.

## 二、综合题解析

【例 10.37】* 在第 Ⅰ 卦限内作椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

【解】设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为椭球面上一点，令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，

则
$$F'_x\Big|_P=\frac{2}{a^2}x_0,\quad F'_y\Big|_P=\frac{2}{b^2}y_0,\quad F'_z\Big|_P=\frac{2}{c^2}z_0,$$

过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的切平面方程为
$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1,$$

该切平面在 $x,y,z$ 轴的截距分别为
$$x=\frac{a^2}{x_0},y=\frac{b^2}{y_0},z=\frac{c^2}{z_0},$$

则切平面与三坐标面所围四面体体积为
$$V=\frac{1}{6}xyz=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}.$$

现求 $V$ 在条件$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$之下的最小值.

令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$,

$$G(x_0,y_0,z_0)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right),$$

解方程组
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0\\ \dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0\\ \dfrac{1}{z_0}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0\end{cases},$$

可得 $x_0=\dfrac{a}{\sqrt3},y_0=\dfrac{b}{\sqrt3},z_0=\dfrac{c}{\sqrt3}$.

故当切点坐标为$\left(\dfrac{a}{\sqrt3},\dfrac{b}{\sqrt3},\dfrac{c}{\sqrt3}\right)$时，切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小，即
$$V_{\min}=\frac{\sqrt3}{2}abc.$$

【例 10.38】* 设有一小山，取它的底面所在的平面为 $xOy$ 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 $D$ 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 $D$ 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试确定攀登起点的位置.

**【解】**(1) 由梯度的几何意义知，$h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度 $\mathbf{grad}h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$ 方向的方向导数最大，方向导数的最大值为该梯度的模，所以 $g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，

由题意，只需求 $f(x,y)$ 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点.

令 $L(x,y)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$，则

$$\begin{cases}L'_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 & ①\\ L'_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0. & ②\\ x^2+y^2-xy=75 & ③\end{cases}$$

由式①和式②消去 $\lambda$，得 $y=\pm x$，代入式③，得

$$x=\pm 5\sqrt{3},y=\pm 5\sqrt{3}，或 x=\pm 5,y=\mp 5.$$

于是得到 4 个可能的极值点：$M_1(5,-5)$，$M_2(-5,5)$，$M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$，$M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$.

由于 $f(M_1)=f(M_2)=450$，$f(M_3)=f(M_4)=150$，

故 $M_1(5,-5)$ 或 $M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点.

## 习　题　十

**1.** 设 $f,g$ 为连续可微函数，$u=f(x,xy)$，$v=g(x+xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

**2.** 设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$，其中 $\varphi$ 为可微函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**3.** 设 $u=f(x,y,z)$，又 $y=\varphi(x,t)$，$t=\psi(x,z)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

**4.** 求下列方程所确定函数的全微分：

(1) $f(x+y,y+z,z+x)=0$，求 $\mathrm{d}z$；

(2) $z=f(xz,z-y)$，求 $\mathrm{d}z$.

**5.** 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**6.** 已知 $z=f\left(2x,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $z''_{x^2}$，$z''_{y^2}$.

**7.** 已知 $z=f(x\ln y,x-y)$，求 $z''_{x^2}$，$z''_{xy}$，$z''_{y^2}$.

**8.** 设 $y=y(x)$，$z=z(x)$，由 $\begin{cases}x+y+z+z^2=0\\ x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

**9.** 设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，求 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**10.** 设 $z=f[x^2-y,\varphi(xy)]$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(u)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11. 已知 $z=z(u)$，且 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$，其中 $z(u)$ 可微，$\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，$p(t)$ 连续，试求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

12. 设 $F[x,y(x),z(x)]=P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]z(x)$，其中出现的函数都是连续可微的，试计算$\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)$.

13. 设 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定常数 $a$，使

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

14. 若 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中 $f(u)$ 有连续的二阶导数，求 $z$.

15. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 平行于平面 $x+4y+3z=0$ 的切平面方程.

16. 求圆周 $x^2+y^2+z^2-3x=0,2x-3y+5z-4=0$ 在 $M(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

17. 试求函数 $z=x^2+y^2-xy+x+y$ 在闭域 $D:x\leqslant 0,y\leqslant 0$ 及 $x+y\geqslant -3$ 上的最大值与最小值.

18. 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 内作内接直角平行六面体，求其最大体积.

19. 求原点到曲面$(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

20. 当 $x>0,y>0,z>0$ 时，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，并证明对任意的正实数 $a,b,c$ 成立不等式

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6 \text{ 成立.}$$

## 参考答案

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial \omega}\right)$，$(\omega=xy)$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-z\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}$.

3. $f'_x+f'_y\varphi'_x+f'_y\varphi'_t\psi'_x$.

4. (1)$\mathrm{d}z=-\dfrac{(f'_1+f'_3)\mathrm{d}x+(f'_1+f'_2)\mathrm{d}y}{f'_2+f'_3}$；

(2)$\mathrm{d}z=\dfrac{-zf'_1\mathrm{d}x+f'_2\mathrm{d}y}{xf'_1+f'_2-1}$.

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y+2\mathrm{e}^x(y\sin y+x\cos y)f''_{12}+4xyf''_{22}+f'_1\mathrm{e}^x\cos y$.

6. $4f''_{11}+\dfrac{4}{y}f''_{12}+\dfrac{1}{y^2}f''_{22}$，$\dfrac{x^2}{y^4}f''_{22}+\dfrac{2x}{y^3}f'_2$.

7. (1)$(\ln y)^2f''_{11}+2\ln yf''_{12}+f''_{22}$；

(2) $\dfrac{x}{y}\ln yf''_{11}+\left(\dfrac{x}{y}-\ln y\right)f''_{12}-f''_{22}+\dfrac{1}{y}f'_1$；

(3) $\frac{x^2}{y^2}f''_{11}-\frac{2x}{y}f''_{12}+f''_{22}-\frac{x}{y^2}f'_u$.

**8.** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2z-3z^2}{1+3z^2-2y-4yz}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2y-1}{1+3z^2-2y-4yz}$.

**9.** 0.

**10.** $(\varphi'+xy\varphi'')f'_2-2xf''_{11}+(2x^2-y)\varphi'f''_{12}+xy(\varphi')^2f''_{22}$.

**11.** 0.

**12.** $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}+[z(x)-y'(x)]\frac{\partial Q}{\partial y}$.

**13.** $a=1$.

**14.** $z=c_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+c_2$ （$c_1,c_2$ 为任意常数）.

**15.** $x+4y+3z-12=0$ 及 $x+4y+3z+12=0$.

**16.** $\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$ 及 $16x+9y-z-24=0$.

**17.** 最小值 $-1$，最大值 6.

**18.** $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}},\frac{2b}{\sqrt{3}},\frac{2c}{\sqrt{3}}\right)$，$V_{\max}=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

**19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**20.** $U_{\max}=\ln(6\sqrt{3}r^6)$.

# 第十一章　重　积　分

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、基本概念

**1. 二重积分**

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中，$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$，$d_i$ 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径($i = 1,2,\cdots,n$).

几何意义：当 $z = f(x,y) \geqslant 0$，$(x,y) \in D$ 时，二重积分 $I$ 表示以 $z = f(x,y)$ 为曲顶，以 $D$ 为底的柱体体积.

**2. 三重积分**

$$I = \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta v_i,$$

其中，$d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$，$d_i$ 为 $\Delta v_i$ 的直径($i = 1,2,\cdots,n$).

物理意义：三重积分 $I$ 表示体密度为 $\mu = f(x,y,z)$ 的空间形体 $\Omega$ 的质量.

### 二、性质

只叙述二重积分的性质，三重积分类似.

(1) $\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，$k$ 为常数，

(2) $\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(3) $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{m}\iint_{D_i} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中，$D_i$ 为 $D$ 的构成子域且任两个子域没有重叠部分($i = 1,2,\cdots,m$).

(4) $\iint_D \mathrm{d}\sigma = A$，其中 $A$ 为 $D$ 的面积.

(5)(**比较定理**) 若在 $D$ 上恒有 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(6)(**估值定理**) 设 $M,m$ 分别为 $f(x,y)$ 在闭域 $D$ 上的最大值与最小值，$A$ 为 $D$ 的面积，则

$$mA \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MA.$$

(7)(**中值定理**) 若 $f(x,y)$ 在闭域 $D$ 上连续,$A$ 为 $D$ 的面积,则在 $D$ 上至少存在一点 $(\xi,\eta)$,使

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A.$$

(8) 二重积分的对称性定理.

① 如果积分域 $D$ 关于 $x$ 轴对称,$f(x,y)$ 为 $y$ 的奇偶函数,则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数,即 } f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数,即 } f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}.$$

其中,$D_1$ 为 $D$ 在上半平面部分.

这个性质的几何意义如图 11-1(a) 和图 11-1(b).

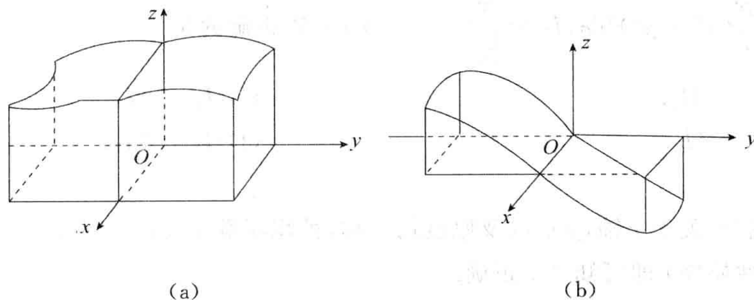



图 11-1

② 如果 $D$ 关于 $y$ 轴对称,$f(x,y)$ 为 $x$ 的奇偶函数,则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数,即 } f(-x,y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f \text{ 关 } x \text{ 为偶函数,即 } f(-x,y) = f(x,y) \end{cases}.$$

其中,$D_2$ 为 $D$ 在右半平面部分.

③ 轮换对称性:设积分区域为 $D_{xy}$,$D_{yx}$ 为将积分区域中的变量 $x,y$ 互换后所成的区域,则

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{yx}} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

即将积分区域中变量 $x,y$ 互换,将被积函数中变量 $x,y$ 互换得到的二重积分与原二重积分相等.

④ 设 $D$ 关于原点对称,$f(x,y)$ 同时为 $x,y$ 的奇函数或偶函数,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } x,y \text{ 的奇函数,即 } f(-x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f \text{ 关于 } x,y \text{ 的偶函数,即 } f(-x,-y) = f(x,y) \end{cases}.$$

其中 $D_1$ 为 $D$ 的右半平面部分

注 注意到二重积分积分域 $D$ 的对称性及被积函数 $f(x,y)$ 的奇偶性,一方面可减少计算量,另一方面可避免出差错,要特别注意的是仅当积分域 $D$ 的对称性与被积函数 $f(x,y)$ 的奇偶性两者兼得时才能用性质(8).

**【例 11.1】**下列不等式正确的是

(A) $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}}(x-1)\mathrm{d}\sigma>0$.　　(B) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma>0$.

(C) $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}}(y-1)\mathrm{d}\sigma>0$.　　(D) $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}}(x+1)\mathrm{d}\sigma>0$.

【　】

**【解】**仅当被积函数 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$，而(A)中 $f(x,y)=x-1$，在 $D$：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$ 中不总是 $f(x,y)\geqslant 0$，故(A)不正确，同理(B)，(C)也不正确，故应选(D).

**【例 11.2】**设区域 $D_1$：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$-2\leqslant y\leqslant 2$；$D_2$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$，又

$I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，则正确的是

(A) $I_1>4I_2$.　　(B) $I_1<4I_2$.

(C) $I_1=4I_2$.　　(D) $I_1=2I_2$.

【　】

**【解】**由于积分域 $D_1$ 关于 $x$ 轴，$y$ 轴以及原点均对称，被积函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^3$ 关于 $y,x$ 为偶函数，由性质(8)即可知(C)正确.

**【例 11.3】**计算 $I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 为下列双纽线所围成：(1) $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$；(2) $(x^2+y^2)^2=2xy$.

**【解】**(1) 由 $D$ 的方程 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$，$x$ 用 $-x$ 替代不变，可知 $D$ 关于 $y$ 轴对称(同理可知 $D$ 关于 $x$ 轴也对称)又 $f(x,y)=xy$ 关于 $x$ 为奇函数，即 $f(-x,y)=(-x)y=-xy=-f(x,y)$，由性质(8)可知 $I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中 $D$：$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$.

(2) $D$：$(x^2+y^2)^2=2xy$ 关于原点对称，又

$$f(-x,-y)=(-x)(-y)=xy=f(x,y),$$

所以 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D^*}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D^*$ 为 $D$ 在第一象限部分.

用极坐标系计算，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\sigma\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}}\rho^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\rho=\frac{1}{6}.$$

注 不画图如何定义累次积分限？可以这样处理：

$$(x^2+y^2)^2=2xy\xrightarrow[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta}\rho^4=2\rho^2\sin\theta\cos\theta$$

$\Rightarrow\rho^2=\sin 2\theta\Rightarrow\rho=\sqrt{\sin 2\theta}$，($\rho=-\sqrt{\sin 2\theta}$ 舍去，因为在第 Ⅰ 象限)

令 $\rho=0\Rightarrow\sin 2\theta=0\Rightarrow 2\theta=0$ 或 $2\theta=\pi\Rightarrow\theta=0$，或 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

让 $\rho=0$，得出 $\theta$ 的两个相邻的角度，小角为下限，大角为上限，这是极坐标系中不画积分域 $D$ 的草图情况下，确定 $\theta$ 角上下限的一种方法.

## 三、公式

### 1. 利用二重积分求曲面面积

设二元函数 $z=f(x,y)$ 及其一阶偏导数连续，它所对应的曲面 $\Sigma$ 与平行于 $z$ 轴的直线只交于一点，$D_{xy}$ 为该曲面在 $xOy$ 平面上的投影，则曲面 $\Sigma$ 的面积 $A$ 为

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同样 $A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z, A=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$

分别表示曲面 $x=g(y,z)$ 与 $y=h(z,x)$ 在满足相应的条件下的面积.

### 2. 二、三重积分在物理上的应用

设平面薄片的面密度为 $\mu=\rho(x,y)$，薄片在 $xOy$ 坐标面上的投影为 $D$，则

(1) 薄片质量，

$$M=\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 薄片质心 $(\overline{x},\overline{y})$.

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_{D}x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\overline{y}=\frac{\iint\limits_{D}y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

注 若 $\mu=\rho(x,y)$ 是常量，则我们把均匀薄片的质心叫做这平面薄片所占平面图形的**形心**.

(3) 薄片关于 $x,y$ 轴及原点的转动惯量分别为

$$J_x=\iint\limits_{D}y^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, J_y=\iint\limits_{D}x^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$J_0=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

* 设空间形体 $\Omega$ 的体密度为 $\mu=\rho(x,y,z)$，则

(4) 空间形体 $\Omega$ 的质量.

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(5) 空间形体 $\Omega$ 的质心 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

$$\overline{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\overline{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

(6) 空间形体 $\Omega$ 关于 $x,y,z$ 轴及原点的转动惯量分别为

$$J_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, J_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, J_0=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

## 四、二重积分的解题技巧

### 1. $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的解题程序

(1) 画出积分域 $D$ 的草图.

(2) 选择坐标系，主要根据积分域 $D$ 的形状，有时也参看被积函数的形式，见表 11-1.

表 11-1

| 坐标系 | 积分域 $D$ 形状 | 被积函数形式 | 面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ | 变量替换 | 积分表达式 |
|---|---|---|---|---|---|
| 直角坐标系 | $D$ 为矩形、三角形或任意形 | $f(x,y)$ | $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ | | $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ |
| 极坐标系 | $D$ 为圆域<br>环域<br>扇域<br>环扇域 | $f(x^2+y^2)$<br>或 $f\left(\frac{x}{y}\right)$<br>或 $f\left(\frac{x}{y}\right)$ | $\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ | $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ | $\iint\limits_{D} f(m)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$<br>其中 $f(m)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ |

(3) 选择积分次序

选序的原则：① 先积分的容易，并能为后积分创造条件；

② 对积分域 $D$ 的划分，块数越少越好.

(4) 确定累次积分的上下限，作定积分运算.

定限口诀：

后积先定限，（累次积分中后积变量的上下限均为常数）

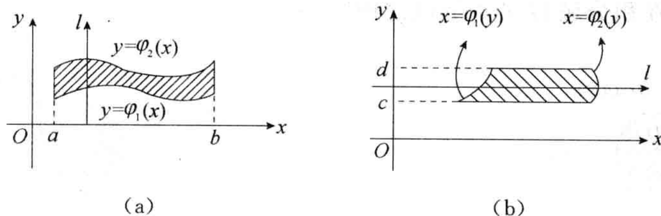
限内划条线，（该直线平行于坐标轴且同向）

先交下限写，（上下限或者为常数或者后积分变量的函数）

后交上限见.

直角坐标系中积分限的确定，如图 11-2(a)、(b) 所示.

$$D:\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x).\end{cases}$$




(a) (b)

图 11-2

直线 $l \parallel y$ 轴,它先与 $D$ 的边界曲线 $y=\varphi_1(x)$ 相交,$\varphi_1(x)$ 取做下限,后与 $D$ 的边界曲线 $y=\varphi_2(x)$ 相交,$\varphi_2(x)$ 取作上限,故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

与以上作类似分析,可得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

注 一般来讲,后积分的变量,积分上下限均为常数;先积分的变量,积分上下限或者为常数或者是后积分变量的函数.

**【例 11.4】** 设 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$,则改变其积分次序后为

(A) $\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$. (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$. (D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$. 【 】

**【解】** (A) 显然是错的,因为后积分的上、下限不能含有变量;(B) 也是错的,因为先积分的上、下限或者为常数或者后积分变量的函数,而(B) 违背了此原则;(C) 也是错的,原因是改变积分次序不会改变积分域,由排除法可知应选(D).

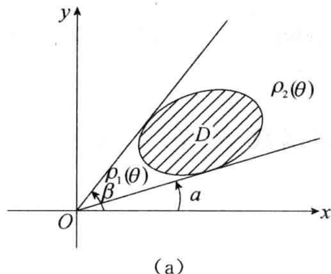
**2. 极坐标系中积分限的确定**

一般而言,极坐标系中二重积分的积分次序是"先 $\rho$ 后 $\theta$".

即 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_?^?\mathrm{d}\theta\int_?^? f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$

积分限随极点 $O$ 与积分域 $D$ 的边界曲线的相对位置而定.

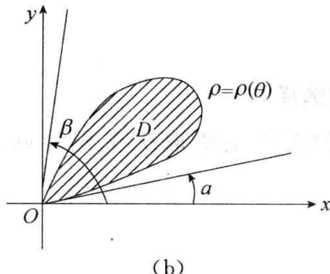
(1) 当极点 $O$ 在域 $D$ 的边界曲线之外时[如图 11-3(a) 所示],




(a)

$$I=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) 当极点 $O$ 在域 $D$ 的边界线上时[如图 11-3(b) 所示],

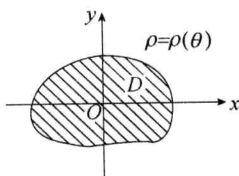



(b)

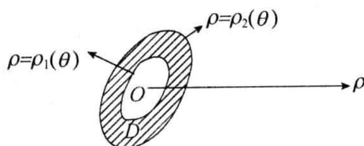
图 11-3

$$I=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(3) 当极点 $O$ 在积分域 $D$ 的边界线之内时，




(c)




(d)

图 11-3

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

## 五、三重积分的解题技巧

### 1. $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 的解题程序

在直角坐标系，柱坐标系中三重积分化为累次积分的过程中，不要急于求成，而应按如下步骤处理：

设 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v,\Omega:a\leqslant x\leqslant b,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),z_1(x,y)\leqslant z(x,y)\leqslant z_2(x,y)$，

则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$，

其中，$D_{xy}$ 为 $\Omega$ 在 $xOy$ 平面上的投影，在 $D_{xy}$ 内任取一点作平行于 $z$ 轴的直线，该直线与围成 $\Omega$ 的边界曲面相交，则先交者作为 $z$ 的积分下限，后交者为上限.

类似地也可考虑先对 $x$ 或 $y$ 积分的情形.

设 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v,\Omega:\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$.

则
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

### 2. 坐标系的选择

坐标系的选择主要取决于积分域 $\Omega$ 的形状，被积函数 $f(x,y,z)$ 的形式仅作参考，见表 11-2.

表 11-2

| 坐标系 | 积分域 $\Omega$ 形状 | 被积函数 $f(x,y,z)$ 形状 | 体积元素 $dv$ | 变量替换 | 积分形式 |
|---|---|---|---|---|---|
| 直角坐标系 | $\Omega$ 为长方体，四面体或任意形体 | $f(x,y,z)$ | $dv=dxdydz$ | | $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ |
| 柱坐标系 | $\Omega$ 为柱体，锥体，或由柱面，锥面，旋转抛物面与其他曲面所围成的形体 | $zf(x^2+y^2)$<br>$zf\left(\frac{y}{x}\right)$ 或<br>$xf(y^2+z^2)$，<br>$xf\left(\frac{z}{y}\right)$ 或<br>$yf(x^2+z^2)$<br>或 $yf\left(\frac{z}{x}\right)$ | $dv$<br>$=\rho d\rho d\theta dz$ | $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=z\end{cases}$ | $I=\iiint\limits_{\Omega} f(m)\rho d\rho d\theta dz$<br>其中 $f(m)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$ |
| 球坐标系 | $\Omega$ 为球体或球体的一部分，锥体 | $f(x^2+y^2+z^2)$ | $dv=$<br>$r^2\sin\varphi d\theta dr d\varphi$ | $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\y=r\sin\theta\sin\varphi\\z=r\cos\varphi\end{cases}$ | $I=$<br>$\iiint\limits_{\Omega} f(m)r^2\sin\varphi dr d\theta d\varphi$<br>其中 $f(m)=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)$ |

**3. 球面坐标系中积分限的确定**

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta.$$

积分次序：

通常是先对 $r$ 积分，把区域 $\Omega$ 投影到 $r=1$(或常数) 的球面上，得到投影区域 $\sigma_{\varphi\theta}$，它的边界曲线由 $\varphi,\theta$ 的关系确定(见图 11-4). 积分可表示为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(M)dv=\iint\limits_{\sigma_{\varphi\theta}}\sin\varphi d\varphi d\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r,\varphi,\theta)r^2 dr=\int_{\square}^{\square}\sin\varphi d\varphi\int_{\square}^{\square}d\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r,\varphi,\theta)r^2 dr.$$

关于第一个积分 $\int_{\square}^{\square}\sin\varphi d\varphi$，积分限这样确定：

(1) 若 $z$ 轴从各分域 $\Omega$ 中穿过

则
$$\int_{\square}^{\square}\sin\varphi d\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\sin\varphi d\varphi.$$

(2) 若 $z$ 轴与积分域 $\Omega$ 相隔或相切

则总可以找到两个锥角分别为 $\alpha,\beta,(\alpha<\beta)$ 的锥面，把 $\Omega$ 夹在其中，于是

$$\int_{\square}^{\square}\sin\varphi d\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\sin\varphi d\varphi.$$

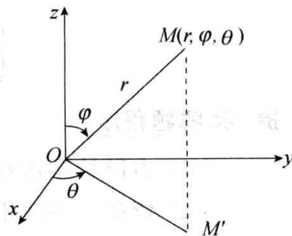


图 11-4

关于第二个积分 $\int_{\square}^{\square}d\theta$ 积分限的确定与极坐标系中的 $\theta$ 的确定类似，即若积分域 $\Omega$ 在 $xOy$ 平面上投影后区域的边界曲线包含原点在其内，则

$$\int_{\square}^{\square} \mathrm{d}\theta = \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta.$$

若投影区域的边界曲线不包含原点在其内，则在 $xOy$ 平面上总可作两条射线把投影域夹在其中，设两射线与 $x$ 轴正向的夹角分别为 $\theta_1,\theta_2(\theta_1<\theta_2)$（见图 11-5），则

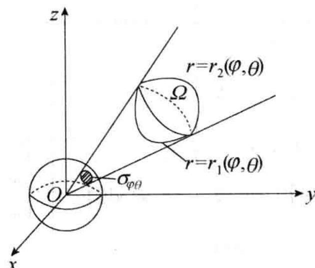



图 11-5

$$\int_{\square}^{\square} \mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta.$$

(3) 三重积分的“先二后一”方法（见例 11.25，例 11.27，例 11.31）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，$D_{xy}$ 为固定 $z$ 后在 $\Omega$ 上所得的截面，如图 11-6 所示.

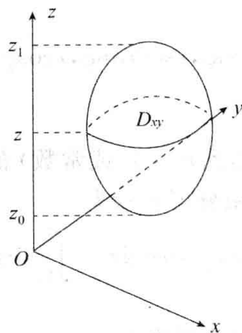



图 11-6

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　更换二重积分的积分次序

**提示 解题程序：**

(1) 由所给累次积分的上下限写出表示积分域 $D$ 的不等式组；

(2) 依据不等式组画出积分域 $D$ 的草图；

(3) 写出新的累次积分，积分限的确定与前面所讲的相同.

**【例 11.5】** 更换下列积分次序：

$$(1) I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y;$$

(2) $I=\int_1^2 dx\int_x^{x^2} f(x,y)dy+\int_2^8 dx\int_x^8 f(x,y)dy$;

(3) $I=\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy,(a>0)$;

(4) $I=\int_0^4 dy\int_{\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$.

**【解】**(1) 由积分的上下限知

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\end{cases}及\ D_2:\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\0\leqslant y\leqslant 2-x,\end{cases}$$

由 $D_1,D_2$ 作出 $D$ 的图形,见图 11-7. 于是

$$D:\begin{cases}1-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 2-y,\\0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$$

故
$$I=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

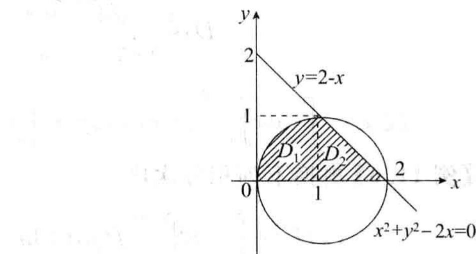


图 11-7

(2) 分别写出右边两个积分所确定的不等式组.

$$D_1:\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\x\leqslant y\leqslant x^2\end{cases}及\ D_2:\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 8,\\x\leqslant y\leqslant 8,\end{cases}$$

由 $D_1,D_2$ 作出 $D$ 的图形如图 11-8 所示,于是

$$D:\begin{cases}\sqrt{y}\leqslant x\leqslant y\\1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}及\begin{cases}2\leqslant x\leqslant y,\\4\leqslant y\leqslant 8,\end{cases}$$

$$I=\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)dx+\int_4^8 dy\int_2^y f(x,y)dx.$$

(3) 由 $D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2a\\\sqrt{2ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax}\end{cases}$ 作出其图形,

如图 11-9 所示. 将积分域 $D$ 分成 $D_1,D_2$ 及 $D_3$ 三部分.

$$D_1:\begin{cases}\dfrac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant a-\sqrt{a^2-y^2}\\0\leqslant y\leqslant a\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}\dfrac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant 2a\\a\leqslant y\leqslant 2a\end{cases},$$

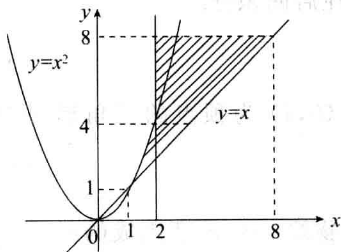


图 11-8

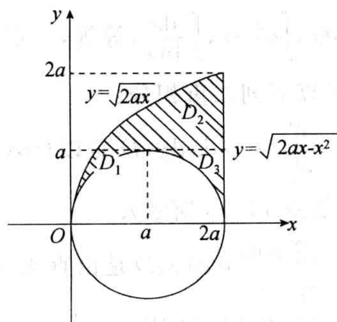


图 11-9

$$D_3:\begin{cases}a+\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant 2a\\0\leqslant y\leqslant a\end{cases}$$

故 $I=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx.$

(4) 写出确定 $D$ 的不等式组，并作出其图形，如图 11-10 所示.

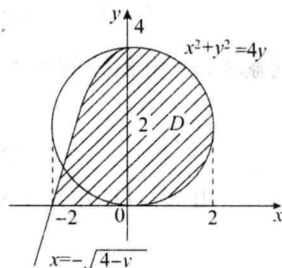


图 11-10

$$D:\begin{cases}-\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant\sqrt{4y-y^2}\\0\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

故 $I=\int_{-2}^0 dx\int_0^{4-x^2}f(x,y)dy+\int_0^2 dx\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$

**【例 11.6】**更换下列积分次序：

(1) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(\rho,\theta)d\rho\quad(a\geqslant 0)$

(2) $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(\rho,\theta)d\rho.$

**【解】**极坐标系中的二重积分，若先对 $\theta$ 后对 $\rho$ 进行积分，则应注意如下两点：

(1) 积分域 $D$ 的边界曲线均用极坐标表示；

(2) 若以原点 $O$ 为圆心的一系列同心圆与域 $D$ 的边界曲线中的不同曲线相交，则应在交点处把 $\rho$ 的区间分开处理.

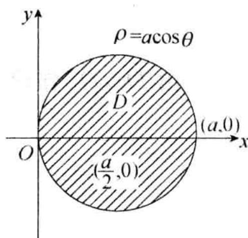


图 11-11

(1) $D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta\end{cases}$，作图(如图 11-11 所示).

$I=\int_0^a d\rho\int_{-\arccos\frac{\rho}{a}}^{\arccos\frac{\rho}{a}}f(\rho,\theta)d\theta.$

(2) $D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta\end{cases}$，作图(如图 11-12 所示).

$I=\int_0^{\sqrt{2}a}d\rho\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{\rho}{2a}}f(\rho,\theta)d\theta+\int_{\sqrt{2}a}^{2a}d\rho\int_{-\arccos\frac{\rho}{2a}}^{\arccos\frac{\rho}{2a}}f(\rho,\theta)d\theta.$

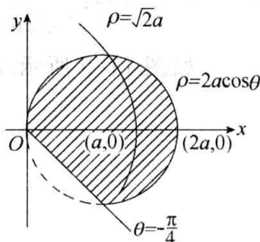


图 11-12

## 题型二 选择二重积分的积分次序

提示 凡遇如下形式积分：$\int\dfrac{\sin x}{x}dx$，$\int\sin x^2dx$，$\int\cos x^2dx$，$\int e^{-x^2}dx$，$\int e^{x^2}dx$，$\int e^{\frac{y}{x}}dx$，$\int\dfrac{dx}{\ln x}$，等等，一定要将其放在后面积分.

**【例 11.7】**计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$，$D$ 是以 $(0,0)$，$(1,1)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形(如图 11-13 所示).

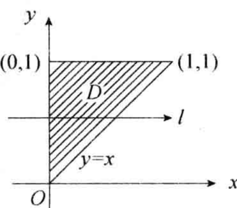


图 11-13

(2) $\iint\limits_D\dfrac{\sin x}{x}dxdy$，$D$ 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域(如图 11-14 所示).

【解】(1) 因为$\int e^{-y^2}dy$不能用有限形式表示出其结果. 所以它不能先积分,故

$$I=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy$$
$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 y^2d(e^{-y^2})$$
$$=-\frac{1}{6}[y^2e^{-y^2}\Big|_0^1-2\int_0^1 ye^{-y^2}dy]$$
$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

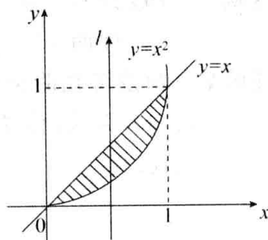


图 11-14

(2) 因为$\int\frac{\sin x}{x}dx$不能用有限形式表示出其结果,所以它不能先积分,故

$$I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\int_{x^2}^x dy=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)dx$$
$$=\int_0^1(1-x)\sin xdx=1-\sin 1.$$

【例 11.8】计算 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx.$

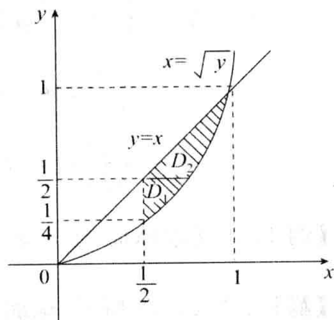


图 11-15

【解】因为$\int e^{\frac{y}{x}}dx$不能用有限形式表示出其结果,所以$\int e^{\frac{y}{x}}dx$不能先计算. 为了改变积分次序,先要写出右边两积分的积分域所对应的不等式组($D_1$,$D_2$ 所表示的区域如图 11-15 所示).

$$D_1:\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{y},\\ \frac{1}{4}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2};\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}y\leqslant x\leqslant\sqrt{y},\\ \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

故 $I=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}}dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 x(e-e^x)dx=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}.$

【例 11.9】设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,并设$\int_0^1 f(x)dx=A$,求$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy.$

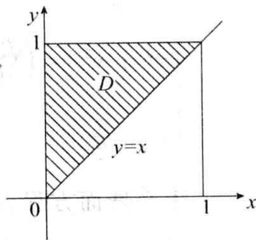


图 11-16

【解】因为 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy$ 中$\int_x^1 f(y)dy$不能直接计算出来.

所以必须考虑更换积分次序,为此先画出积分域 $D$ 的草图,如图 11-16 所示.

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1 f(y)dy\int_0^y f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx\int_0^x f(y)dy.$$

于是
$$2I=\int_0^1 f(x)dx\left(\int_0^x f(y)dy+\int_x^1 f(y)dy\right)$$
$$=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=A^2,$$

故 $$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}A^2.$$

## 题型三　二重积分坐标系的选择

提示 请参照表 11-1.

【例 11.10】设有一曲顶柱体，以双曲抛物面 $z=xy$ 为顶，以 $xy$ 坐标面为底，以平面 $y=0$ 为侧，柱面 $x^2+y^2=1$ 为外侧，柱面 $x^2+y^2=2x$ 为内侧，试求这个柱体的体积.

【解】由题设可知曲顶柱体在 $xOy$ 平面上的投影，即积分域 $D$ 如图 11-17 所示，由 $D$ 的形状可知用极坐标计算曲顶柱体的体积简便.

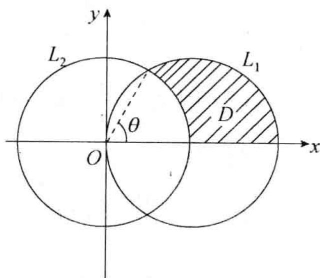


图 11-17

$$V=\iint_D z\,dxdy=\iint_D xy\,dxdy$$

曲线 $L_1:\rho=2\cos\theta$，$L_2:\rho=1$，联立解得，$\theta=\frac{\pi}{3}$

故 $$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\rho^3\sin\theta\cos\theta d\rho$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(16\cos^4\theta-1)\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-16\cos^4\theta)d(\cos^2\theta)=\frac{9}{16}.$$

【例 11.11】求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 被平面 $z=\frac{a}{4}$ 与 $z=\frac{a}{2}$ 所夹部分的面积.

【解】如图 11-18 所示，球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $z=\frac{a}{2}$，$z=\frac{a}{4}$ 的交线分别为

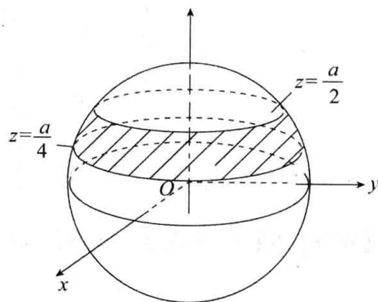


图 11-18

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ z=\frac{a}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ z=\frac{a}{4}\end{cases}$$

$$\Downarrow\qquad\qquad\Downarrow$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\\ z=\frac{a}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{15}}{4}a\right)^2\\ z=\frac{a}{4}\end{cases}$$

上半球面方程：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ z'_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

由于对称性，只要算出第一卦限的面积再四倍之即可.

$$S=4\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=4\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{15}}{4}a}\frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho=2\pi a\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{15}}{4}a}=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

【例 11.12】求由下列曲面所围成的形体的体积：$z=x+y, z=xy, x+y=1, x=0, y=0$.

【解】显然，由以上曲面所围的空间形体在 $xOy$ 坐标上的投影是由 $x+y=1$ 及 $x, y$ 轴所围成的三角形，如图 11-19 所示.

因为 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，因而 $x+y\geqslant xy$，

所以所求体积

$$V=\iint_D (x+y-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(x+y-xy)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{7}{24}.$$



图 11-19

【例 11.13】计算 $I=\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

【解】从被积函数 $f(x,y)=\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 看，用极坐标系做要简单些，但从积分域 $D$ 的形状看却又以直角坐标系为宜，在二者不可兼得的情况下，应以 $D$ 的形状来决定用什么坐标系，本题用直角坐标系做，如图 11-20 所示.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_0^1\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1-\ln\left[\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]\Bigg|_0^1=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$



图 11-20

## 题型四　分段函数的二重积分的计算

提示　被积函数为分段函数的重积分，一般是将被积函数及积分域的图形先画出来，然后根据几何图形的性质加以讨论.

被积函数含有绝对值符号的重积分，实际上也是属于分段函数的重积分，运算前要去掉绝对值号，然后进行分域研究.

【例 11.14】设 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$D$ 是由 $x+y\leqslant t, x=0$ 及 $y=0$ 围成的，求 $F(t)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】做出 $f(x,y)$ 及 $D$ 的图形，如图 11-21 所示.

① 当 $t<0$ 时，$f(x,y)=0, F(t)=0$；

② 当 $0\leqslant t<1$ 时，$f(x,y)=1$

$$F(t)=\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}t^2;$$

③ 当 $1\leqslant t<2$ 时，$f(x,y)=1$

$$F(t)=\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[1-(t-1)]^2$$

$$=1-\frac{1}{2}(2-t)^2$$



图 11-21

$$F(t)=\iint_D 1\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}(2-t)^2;$$

④ 当 $t\geqslant 2$ 时，$f(x,y)=1$

$$F(t)=\iint_D 1\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

综上所述，可知
$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t<1\\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1\leqslant t<2\\ 1, & t\geqslant 2\end{cases}.$$

**【例 11.15】** 计算 $I=\iint_D (x+y)\operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\operatorname{sgn}(x-y)=\begin{cases}1, & x>y\\ 0, & x=y.\\ -1, & x<y\end{cases}$$

**【解】** 作出积分区域，如图 11-22 所示.

$$I=\iint_{D_1}(x+y)(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y(x+y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x+y)\mathrm{d}y=0.$$

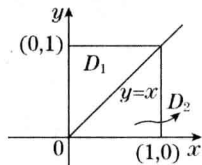
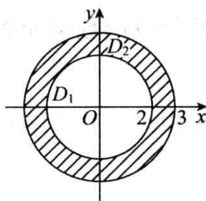


图 11-22

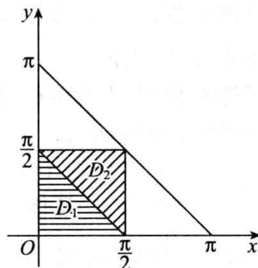
**【例 11.16】** 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D |x^2+y^2-4|\,\mathrm{d}\sigma$，　　$D:x^2+y^2\leqslant 9$.［如图 11-23(a) 所示］

(2) $\iint_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}\sigma$，　　$D:0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$.［如图 11-23(b) 所示］



(a)



(b)

图 11-23

**【解】** (1) $\iint_D |x^2+y^2-4|\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint_{D_1}[4-(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}\sigma$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^3(\rho^2-4)\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=2\pi\left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2+2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}-2\rho^2\right]_2^3=\frac{41}{2}\pi.$$

$$(2)\iint_D |\cos(x+y)|\,d\sigma$$

$$=\iint_{D_1}|\cos(x+y)|\,d\sigma+\iint_{D_2}|\cos(x+y)|\,d\sigma$$

$$=\iint_{D_1}\cos(x+y)d\sigma-\iint_{D_2}\cos(x+y)d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\Big|_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin x-\cos x)dx=\pi-2.$$

**【例 11.17】**(1) 计算$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$,其中 $D$(如图 11-24 所示)是由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围成的区域,$f(u)$ 为连续函数.

(2) 设 $D$ 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成,计算 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}d\sigma$.

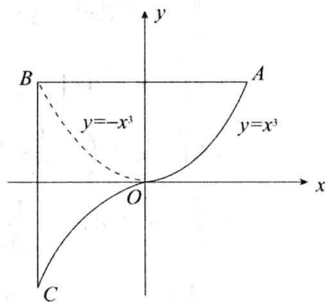



图 11-24

**【解】**(1) 作辅助线 $y=-x^3$,则 $D=ABO+BOC$.

$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\iint_D x\,dxdy+\iint_D xyf(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\iint_{AOB}x\,dxdy+\iint_{BOC}x\,dxdy+\iint_{AOB}xyf(x^2+y^2)dxdy+\iint_{BOC}xyf(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\iint_{BOC}x\,dxdy=\int_{-1}^0 x\,dx\int_{x^3}^{-x^3}dy=-2\int_{-1}^0 x^4dx=-\frac{2}{5}.$$

(2) 设 $I=\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$

$$\xlongequal{\text{轮换对称性}}\iint_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(x)+f(y)}dxdy,$$

所以 $2I=\iint_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy+\iint_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy$

$$=\iint_D\frac{(a+b)[f(x)+f(y)]}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint_D(a+b)dxdy=\frac{1}{2}(a+b).$$

所以$\iint_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\frac{1}{4}(a+b).$

【例 11.18】计算下列积分：

$$\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy,\qquad D\begin{cases}|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}.$$

【解】$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}$（$D_1,D_2$ 如图 11-25 所示）

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{2}+\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{0}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}|x|^3dx=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

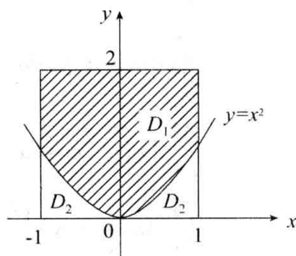



图 11-25

【例 11.19】求 $I=\iint\limits_D \max\{x,y\}e^{-x^2-y^2}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

【解】$I=\iint\limits_{\substack{D\\ y\geqslant x}} ye^{-x^2-y^2}d\sigma+\iint\limits_{\substack{D\\ y<x}} xe^{-x^2-y^2}d\sigma$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_x^{+\infty}ye^{-y^2}dy+\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_y^{+\infty}xe^{-x^2}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_x^{+\infty}ye^{-y^2}dy$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right)\Big|_x^{+\infty}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-2x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{2}x)^2}d(\sqrt{2}x)\quad(\sqrt{2}x=t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

## 题型五　二重积分等式的证明

### 1. 概念型命题的证明

**提示** 凡欲证结论：$f(x,y)=0$ 的命题，多数用反证法.

【例 11.20】设 $f(x,y)$ 是平面域 $D$ 上的连续函数，且在 $D$ 的任何一个子域 $\sigma$ 上，恒有

$$\iint\limits_{D_\sigma}f(x,y)d\sigma=0,\text{则在 } D \text{ 内 } f(x,y)\equiv 0.$$

【证】用反证法. 设有一点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，而 $f(x_0,y_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0,y_0)>0$，由 $f(x,y)$ 的连续性，可知存在一个 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $\Delta(P_0,\delta)\in D$，使得在其中 $f(x,y)>0$，于是，由积分中值定理，必存在 $(\xi,\eta)\in\Delta(P_0,\delta)$，使

$\iint\limits_{\Delta(P_0,\delta)}f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)s$，其中 $s$ 为 $\Delta(P_0,\delta)$ 的面积，又因 $f(\xi,\eta)>0$

故
$$\iint\limits_{\Delta(P_0,\delta)}f(x,y)d\sigma>0,$$

与假设矛盾，即知在 $D$ 内有 $f(x,y)\equiv 0$.

### 2. 幂次积分型的命题的证明

**提示** 证题思路：累次积分 $\xrightarrow{\text{化为}}$ 重积分 $\xrightarrow{\text{化为}}$ 另一次序的累次积分.

证题过程中，常用到重积分对积分域的可加性，对积分变量的无关性.

**【例 11.21】** 设 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上连续，试证：

$$2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

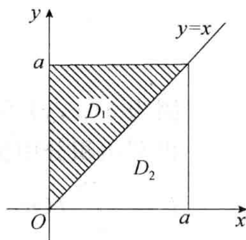


图 11-26

**【证】** 如图 11-26 所示. 设 $I=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

$$I_1=\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 $I=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1+D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2,$$

但 $I_2=\int_0^a f(y)\mathrm{d}y\int_y^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left[f(y)\int_y^a f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_0^a\left[f(t)\int_t^a f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t$

$$=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\int_t^a f(y)\mathrm{d}y=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=I_1,$$

故 $I=2I_1$.

**【例 11.22】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证：

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$$

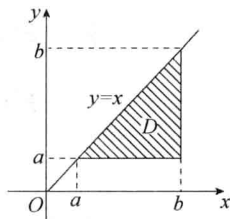


图 11-27

**【证】** $\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}y$ （如图 11-27 所示）

$$=\int_a^b\left[f(y)\int_y^b (x-y)^{n-2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_a^b \frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\Big|_y^b f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$$

### 3. 被积函数为复合函数型命题的证法

**提示** 此类命题一般是用变量替换法证.

**【例 11.23】** 设 $f(x,y)$ 在单位圆上有连续的偏导数，且在边界上取值为零，证明：

$$f(0,0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，$D$ 为圆环域：$\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

**【证】** 采用极坐标，令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

则
$$\frac{\partial f}{\partial \rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}=\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}=xf'_x+yf'_y,$$

于是 $$I=\iint_D \frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*}\frac{\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial f}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\Big|_\varepsilon^1\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

因为 $f(x,y)$ 在单位圆的边界上取值为零，故 $f(\cos\theta,\sin\theta)=0$.

再利用积分中值定理，可知

$I=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-2\pi f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*)$，其中 $\theta^*\in[0,2\pi]$，故

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{2\pi}(-2\pi)f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*)$$

$$=f(0,0).$$

## 题型六　二重积分不等式的证明

**提示** 常用定理和公式：重积分的性质，尤其是比较和估值定理以及以下公式：

$$f^2(x)+g^2(x)\geqslant 2f(x)g(x).$$

常用方法：估值法，判别式法，辅助函数法.

**【例 11.24】** 设 $f(x),g(x)$ 均在$[a,b]$上连续，证明柯西不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right].$$

**【证法一】** 辅助函数法：

令 $$F(u)=\left[\int_a^u f(x)g(x)\right]^2\mathrm{d}x-\left[\int_a^u f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^u g^2(x)\mathrm{d}x\right].$$

$$F'(u)=2f(u)g(u)\int_a^u f(x)g(x)\mathrm{d}x-f^2(u)\int_a^u g^2(x)\mathrm{d}x-g^2(u)\int_a^u f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^u[2f(u)f(x)g(u)g(x)-f^2(u)g^2(x)-g^2(u)f^2(x)]\mathrm{d}x\leqslant0.$$

（因为$[f(u)g(x)]^2+[g(u)f(x)]^2\geqslant 2f(u)g(x)g(u)f(x)$）

所以 $F(u)$“↘”，又因为 $F(a)=0$，

故 $F(b)\leqslant F(a)=0$，即

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant0,$$

亦即 $$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right].$$

**【证法二】** 判别式法：　设 $t$ 为任意实数，则

$$[f(x)-tg(x)]^2=f^2(x)-2tf(x)g(x)+t^2g^2(x)\geqslant0,$$

因而有

$$\int_a^b[f(x)-tg(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+t^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant0,$$

上式中间部分是关于实数 $t$ 的二次三项式，故其判别式仅当 $\Delta=B^2-4AC\leqslant0$ 时不等号才成立，

即 $$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]\leqslant 0,$$

由此可推出命题成立.

**【证法三】**二重积分法： 令 $I=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$,

则

$$I=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I=\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$2I=\iint\limits_D[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_D[2f(x)g(x)f(y)g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故

$$\begin{aligned}I=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}y&\geqslant\iint\limits_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2,\end{aligned}$$

其中,$D=\{x,y:a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$.

注 凡涉及函数平方的命题均可考虑用以上三种方法之中的一种分析处理.

**【例 11.25】**设 $f(x)$ 为$[0,1]$上的单调增加的连续函数,证明

$$\frac{\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}.$$

**【证】**令

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_D xf^3(x)f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D f^3(x)yf^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D f^3(x)f^2(y)(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\qquad①\end{aligned}$$

类似处理,又有 $$I=\iint\limits_D f^2(x)f^3(y)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad②$$

将式 ① 和式 ② 相加,并注意到假设即$(x-y)[f(x)-f(y)]\geqslant 0$,

就有 $$2I=\iint\limits_D(x-y)f^2(x)f^2(y)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

即 $I\geqslant 0$,故命题成立.

**【例 11.26】**证明：

$$\frac{\pi}{2}\int_0^N \mathrm{e}^{-x^2}x\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_0^N \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}N}\mathrm{e}^{-x^2}x\mathrm{d}x.$$

**【证】**考虑二重积分$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,分别取 $D$ 为

$$D_1: x^2+y^2 \leqslant N^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0,$$
$$D_2: 0 \leqslant x \leqslant N, 0 \leqslant y \leqslant N,$$
$$D_3: x^2+y^2 \leqslant 2N^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

因为 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}>0$，且 $D_1 \subset D_2 \subset D_3$，

所以 $\iint\limits_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{D_3} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

把左右两个二重积分化为极坐标系下的形式，于是

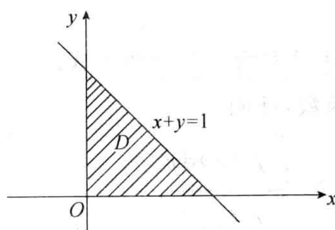
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^N \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \leqslant \int_0^N \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \int_0^N \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}N} \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho,$$

故
$$\frac{\pi}{2}\int_0^N \mathrm{e}^{-x^2} x\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_0^N \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}N} \mathrm{e}^{-x^2} x\mathrm{d}x.$$

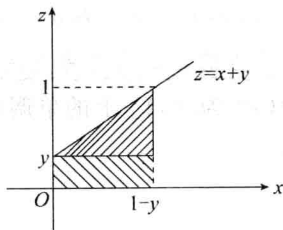
## 题型七　更换三重积分的积分次序

**提示** 计算重积分时，一般是先画积分域，再依图按序定出积分限，此法很直观，但作图并非易事，因此通常采用这样的方法：在交换两个变量的积分次序时，第三个变量按常数处理，交换次序结束后，再恢复变量面目.

**【例 11.27】** 将 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 按 $y,z,x$ 的次序积分重新改写.




(a)




(b)

图 11-28

**【解】** 原式 $\xlongequal[11\text{-}28(\mathrm{a})]{\text{见图}} \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

$\xlongequal[11\text{-}28(\mathrm{b})]{\text{见图}} \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x.$

**【例 11.28】** 将 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 按 $x,z,y$ 的次序积分改写.

**【解】** 由图 11-29，则

原式 $= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{d}z \int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1+x^2} \mathrm{d}z \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y.$

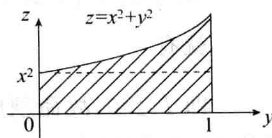



图 11-29

## 题型八　三重积分的计算

**【例 11.29】** 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 为由平面 $x+y+z=1$ 及三坐标面所围之区域

(如图 11-30 所示).

【解】方法一:因 $f(x,y,z)=x+y+z$ 及积分域关于 $x,y,z$ 均对称,

故 $\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}y\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz.$

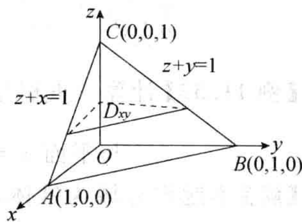


图 11-30

于是
$$I=3\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz=3\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz$$
$$=3\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^1 x[(1-x-y)^2]\Big|_{1-x}^{0}\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\frac{1}{8}.$$

方法二:(先 2 后 1) $=3\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz=3\int_0^1 z\,dz\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=3\int_0^1 z\,\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz=\frac{1}{8}.$

【例 11.30】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz$,$\Omega$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围形体.

【解】凡积分域是由抛物面与其他曲面所围成的形体,一般用柱坐标计算为宜.在柱坐标系下,球面与抛物面的交线为

$$\begin{cases}\rho^2+z^2=4\\ \rho^2=3z\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}z=1\\ \rho=\sqrt{3}\end{cases}.$$

故 $$I=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}z\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}z\,dz$$
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9}\right)d\rho=\frac{13}{4}\pi.$$

【例 11.31】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz$,其中 $\Omega$ 是由曲线 $y^2=2z,x=0$ 绕 $Oz$ 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2,z=8$ 所围之形体.

【解】曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$ 绕 $Oz$ 轴旋转,所得旋转面方程为 $x^2+y^2=2z$,如图 11-31 所示.

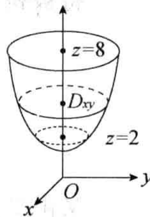


图 11-31

方法一:无论从积分域还是从被积函数均可看出本题以选柱坐标系为宜.由于积分域 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影域的两个不同部分:

$D_1:0\leqslant\rho\leqslant 2$,$D_2:2\leqslant\rho\leqslant 4$ 之中过任一点所作平行于 $z$ 轴的直线与围成 $\Omega$ 的不同曲面相交,故原积分应视为柱坐标下两个不同的三重积分之和,即

$$I=\iint\limits_{D_1}\rho\,d\theta\,d\rho\int_2^8\rho^2\,dz+\iint\limits_{D_2}\rho\,d\theta\,d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho^2\,dz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3\,d\rho\int_2^8 dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4\rho^3\,d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 dz$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2\cdot 6+2\pi\int_2^4\rho^3\left(8-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=336\pi.$$

方法二:(先 2 后 1)

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^8\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_2^8\rho^4\Big|_0^{\sqrt{2z}}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\int_2^8 4z^2\mathrm{d}z=336\pi.$$

**【例 11.32】** 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega$ 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=a(a>0)$ 围成的区域，如图 11-32 所示.

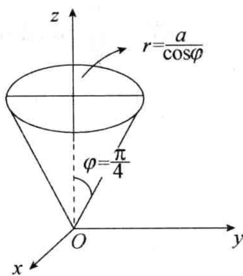



图 11-32

**【解】** 本题积分域为锥体，既可用柱面坐标系，也可用球面坐标系. 该处用球面坐标系做，注意各面均应写成球坐标方程.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a/\cos\varphi}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^{a/\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi}{5}a^5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{5}\pi a^5\cdot\frac{1}{4}\tan^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{10}a^5.$$

## 第 3 节　思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　积分域关于坐标轴(或坐标面)对称，被积函数为奇偶函数的二重积分(三重积分)，要想到利用被积函数的奇偶性简化计算.

**【例 11.33】** 设积分区域 $D$ 是圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，求 $\iint\limits_D(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**【解】** 因积分域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 关于 $x$ 轴，$y$ 轴对称，且函数 $2x^3$ 及 $\sin\frac{x}{y}$ 分别是 $x$，$y$ 的奇函数，将被积函数分项积分，得

$$\iint\limits_D(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 3\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 7\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0+7\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由二重积分的几何意义，知 $\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-\pi=3\pi$.

故 $\iint\limits_D(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=7\cdot 3\pi=21\pi$.

**【例 11.34】** 设 $D$ 是由曲线 $y=\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}$，$x=\sqrt{1+y^2}-\frac{1}{2}$ 与直线 $y=-x$ 所围成的区域，$D_1$ 是 $D$ 在第二象限的部分，则 $\iint\limits_D(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A) $2\iint\limits_{D_1}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(B) $2\iint\limits_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint_{D_1}(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D) 0.　　【　】

【分析】若被积函数为关于 $x,y$ 为奇或偶函数，但积分域关于 $x,y$ 轴不对称，这时要想到做一条辅助线使积分区域对称.

【解】作出 $D$ 的图形，如图 11-33 所示.

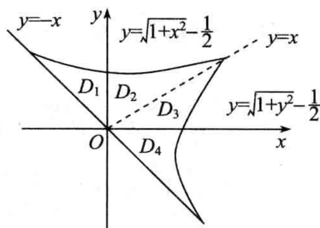


图 11-33

作辅助线 $y=x$，则 $D$ 被分成两个子区域，而每个子区域又被坐标轴分成两个小区域，因为 $D_1$ 与 $D_2$ 关于 $y$ 轴对称，$x\sin y$ 关于 $x$ 为奇函数，$D_3$ 与 $D_4$ 关于 $x$ 轴对称，$x\sin y$ 关于 $y$ 为奇函数，

所以 $\iint\limits_{D_1+D_2}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint\limits_{D_3+D_4}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

又 $y\cos x$ 关于 $x$ 为偶函数，关于 $y$ 为奇函数，

所以 $\iint\limits_{D_1+D_2}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_{D_3+D_4}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

故 $\iint\limits_{D}(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即选(B).

## 二、综合题解析

【例 11.35】设有一高度为 $h(t)$($t$ 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9)，问高度为 130（厘米）的雪堆全部融化需多少小时？

【解】记 $V$ 为雪堆体积，$S$ 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}[h^2(t)+16r^2]^{\frac{1}{2}}r\mathrm{d}r=\frac{13\pi h^2(t)}{12}.$$

由题知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{13}{10}$，因此 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+C$.

由 $h(0)=130$，得 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130$. 令 $h(t)=0$，得 $t=100$（小时）.

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需时间为 100 小时.

【例 11.36】设 $a=\iint\limits_{D}\cos\dfrac{x-y}{x+y}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，求：

(1)$a$ 的值；

(2) 常数 $b$ 的值，其中 $b$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{2x}{\sin 1}}=\dfrac{1}{3}\int_b^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

【分析】(1) 由于 $D$ 是角域的一部分，因此采用极坐标计算表示 $a$ 的二重积分.

(2) 先将(1)算得的$a$代入$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{2x}{\sin 1}}$，计算它的值，然后计算$\dfrac{1}{3}\int_b^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，令两者相等即可确定$b$的值.

**【解】**(1) 在极坐标下，

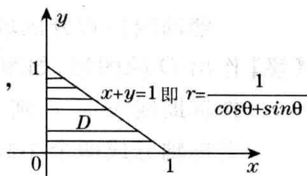


图 11-34

$$D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$(图 11-34)，所以，

$$a=\iint_D\cos\frac{x-y}{x+y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}\cos\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)\cdot\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{1}{2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\sin\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\sin 1.$$

(2) 对于(1)的$a=\dfrac{1}{2}\sin 1$得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{2x}{\sin 1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}\right]^{\frac{2}{\sin 1}}=\left(\frac{\mathrm{e}^{-a}}{\mathrm{e}^a}\right)^{\frac{2}{\sin 1}}=(\mathrm{e}^{-2\cdot\frac{1}{2}\sin 1})^{\frac{2}{\sin 1}}=\mathrm{e}^{-2}.$$

此外，
$$\frac{1}{3}\int_b^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Bigg|_b^{+\infty}=\frac{1}{3}(b+1)\mathrm{e}^{-b}.$$

于是由题设得

$$\mathrm{e}^{-2}=\frac{1}{3}(b+1)\mathrm{e}^{-b},\text{即 } b=2.$$

## 习　题　十　一

**1.** 将二重积分$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$化为累次积分(两种形式)，其中积分区域$D$给定如下：

(1)$D$：由$y^2=8x$与$x^2=y$所围之区域；

(2)$D$：由$x=3,x=5,x-2y+1=0$及$x-2y+7=0$所围之区域；

(3)$D$：由$x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant x$及$x>0$所围之区域；

(4)$D$：$|x|+|y|\leqslant 1$.

**2.** 改变下列积分次序.

(1)$\int_0^a\mathrm{d}x\int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(2)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3)$\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(x,y)\mathrm{d}y$.

**3.** 将二重积分 $I=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为极坐标形式的累次积分,其中:

(1)$D: a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2, y \geqslant 0, (b>a>0)$;

(2)$D: x^2+y^2 \leqslant y, x \geqslant 0$;

(3)$D: 0 \leqslant x+y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

**4.** 求解下列二重积分:

(1)$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$;

(2)$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$;

(3)$\iint\limits_{D} \frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$:由 $x=y^2$ 及 $x=1+\sqrt{1-y^2}$ 所围成;

(4)$\iint\limits_{D} \frac{y}{x^6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$:为 $y=x^4-x^3$ 的上凸弧段部分与 $x$ 轴所围成的曲边梯形;

(5)$\iint\limits_{D} \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,$D: y \geqslant x$ 及 $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$.

**5.** 计算下列二重积分:

(1)$\iint\limits_{D} \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D: \varepsilon^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$,并求上述二重积分当 $\varepsilon \to 0^+$ 时的极限;

(2)$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}y$;

(3)$\iint\limits_{D} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,  $D: x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0$ 及 $y \geqslant 0$.

**6.** 设 $f(t)$ 是半径为 $t$ 的圆的周长,试证:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \mathrm{e}^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^a f(\rho)\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\rho.$$

**7.** 设 $p(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负连续函数,$f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增,证明:

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

**8.** 设 $m$,$n$ 均为正整数,且其中至少有一个是奇数,证明:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

**9.** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上连续,令 $F(t)=\int_0^t \mathrm{d}z\int_0^z \mathrm{d}y\int_0^y (y-z)^2 f(x)\mathrm{d}x$,

证明:$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{3}\int_0^t (t-x)^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**10.** 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y \frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}z$.

**11.** $\iiint\limits_{\Omega} (2y+\sqrt{x^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega: x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=4a^2$ 及 $x^2-y^2+z^2=0$ $(y \geqslant 0, a>0)$ 所围之区域.

**12.** 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(1+x+y+z)^{-3}\mathrm{d}v$， $\Omega$：由 $x+y+z=1, x=0, y=0$ 及 $z=0$ 所围形体；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}v$， $\Omega$：$y=1, y=-x, x=0, z=0$ 及 $z=-x$ 所围形体；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v$， $\Omega$：由 $yOz$ 面上的区域 $D$ 绕 $z$ 轴旋转一周而成的空间区域，其中

$$D=\{(x,y)\mid y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 2y-1, y\geqslant 0, z\geqslant 0\};$$

(4) $\iiint\limits_{\Omega}xy\,\mathrm{d}v$，$\Omega$：由 $z=xy, x+y=1$，及 $z=0$ 所围形体；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$，$\Omega$：由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成的空间区域；

(6) $\iiint\limits_{\Omega}r^2\mathrm{d}v$，$\Omega$ 为底面是单位正方形，高为 $h$ 的正四棱锥体，而 $r$ 为锥体中任一点到顶点 $P$ 的距离.

**13.** 求由下列曲线所围图形的面积.

(1) $xy=a^2, x+y=\dfrac{5}{2}a\,(a>0)$；

(2) $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x\,(0<a<b, 0<\alpha<\beta)$；

(3) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy\,(a>0)$；

(4) $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\,(a>0)$.

**14.** 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在两曲面 $x^2+y^2=y, x^2+y^2=2y$ 之间的部分的面积.

**15.** 求下列曲面所围形体的体积.

(1) $z=xy, x+y+z=1, z=0$；

(2) $z=x^2+y^2, x^2+y^2=x, x^2+y^2=2x, z=0$；

(3) $z=8-x^2-y^2, z=x^2+y^2$.

**16.** 将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为柱面坐标的累次积分，其中 $\Omega$ 是由 $x^2+y^2=z^2, z=1$ 及 $z=4$ 所围成.

**17.** 改变下列三重积分的积分次序：

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$；

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

**18.** 已知质量为 $M$，半径为 $a$ 的球上任一点的密度与该点到球心的距离成正比，求球关于切线的转动惯量.

**19.** 有一半径为 $R$，高为 $H$ 的均匀圆柱体，其中心轴上低于下底为 $a$ 处有一质量为 $m$ 的质点，试求此柱体对该点的引力.

**20.** 设半径为 $R$ 的球面 $\Sigma$ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\,(a>0)$ 上，问当 $R$ 为何值时，球面 $\Sigma$ 在定球面内部的那部分面积最大？

参 考 答 案

**1.** (1) $I=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_{x^2}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy$;

(2) $I=\int_2^3 dy\int_3^{2y-1} f(x,y)dx=\int_3^5 dy\int_3^5 f(x,y)dx=\int_5^6 dy\int_{2y-7}^5 f(x,y)dx=\int_3^5 dx\int_{\frac{x+1}{2}}^{\frac{x+7}{2}} f(x,y)dy$;

(3) $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;

(4) $I=\int_{-1}^0 dy\int_{-y-1}^{y+1} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)dx$

$=\int_{-1}^0 dx\int_{-x-1}^{x+1} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$.

**2.** (1) $I=\int_0^{\frac{a}{2}} dy\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx=\int_{\frac{a}{2}}^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$;

(2) $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$;

(3) $I=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.

**3.** (1) $I=\int_0^{\pi} d\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$;

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\sin\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$;

(3) $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$.

**4.** (1) $\frac{4}{\pi^3}(\pi+2)$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$(提示:先交换次序,对$\int_0^1 y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=-\int_0^1 yde^{-\frac{y^2}{2}}$分部积分);

(3)0(提示:利用对称性);

(4) $-\frac{7}{48}$(提示:先求上凸区间,$\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_{x^4-x^3}^0 \frac{y}{x^6}dy$);

(5)0(提示:利用对称性).

**5.** (1)$\pi[\varepsilon^2-\varepsilon^2\ln\varepsilon^3-1]$,$-\pi$;  (2)$\pi[f(a)-f(0)]$;  (3) $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$.

**6.** 略.

**7.** 提示:作辅助函数.

$F(x)=\int_a^x p(t)f(t)dt\int_a^x p(t)g(t)dt-\int_a^x p(t)dt\int_a^x p(t)f(t)g(t)dt$,利用单调性证明.

**8.** 利用对称性性质.

**9.** 提示:先求导,再交换积分次序.

**10.** $\frac{1}{2}(1-\sin 1)$(提示:化为先对$y$,后对$x$,再对$z$积分).

**11.** $\frac{15\pi}{16}(2+\pi)a^4$(提示:令$x=r\sin\varphi\cos\theta,z=r\sin\varphi\sin\theta,y=r\cos\varphi$).

**12.** (1) $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$； (2)$3-\mathrm{e}$； (3) $\frac{89}{75}\pi$； (4) $\frac{1}{180}$； (5) $\frac{\pi}{20}$； (6) $\frac{h}{30}(6h^2+1)$.

**13.** (1) $\frac{a^2}{8}(15-16\ln 2)$； (2) $\frac{(b^2-a^2)(\beta-\alpha)}{2(\beta+1)(\alpha+1)}$(提示：作换元 $u=x+y, D=\frac{y}{x}$)；

(3)$a^2$(提示：化为极坐标 $r^2=a^2\sin 2\theta$)； (4) $\frac{\pi}{4}a^2$(提示：化为极坐标，$r=a\cos 3\theta$).

**14.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$.

**15.** (1) $\frac{17}{12}-2\ln 2$； (2) $\frac{45}{32}\pi$； (3)$16\pi$.

**16.** $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_1^4 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^4\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^4 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z$.

**17.** (1)$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x^2+1}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y$

或 $I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z}}^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+$

$$\int_1^2\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-1}}^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

(2) $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y$

或 $I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x$.

**18.** $J=\frac{13}{9}Ma^2$.

**19.** $F=2\pi\mu\rho m[H-\sqrt{R^2+(a+H)^2}+\sqrt{R^2+a^2}]$,

其中 $\mu$ 为比例系数，$\rho$ 为柱体的密度.

**20.** $R=\frac{4}{3}a$.

# 第十二章　曲线、曲面积分及场论初步

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、曲线积分的概念和性质

(一) 对弧长的曲线积分

**1. 定义**

$$\int_{L(\widehat{AB})} f(x,y)\mathrm{d}l = \lim_{\|\Delta l\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i.$$

物理意义:线密度为 $\mu = f(x,y)$ 的弧段 $L_{\widehat{AB}}$ 的质量,即

$$M = \int_{L(\widehat{AB})} f(x,y)\mathrm{d}l.$$

**2. 性质**

(1) 与积分路径的方向无关,即

$$\int_{L(\widehat{AB})} f(x,y)\mathrm{d}l = \int_{L(\widehat{BA})} f(x,y)\mathrm{d}l.$$

(2) 对路径具有可加性,即若 $\widehat{AB}$ 由 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 所组成,且任何两线段之间无重叠部分,则

$$\int_{L(\widehat{AB})} f(x,y)\mathrm{d}l = \int_{C_1} f(x,y)\mathrm{d}l + \int_{C_2} f(x,y)\mathrm{d}l + \cdots + \int_{C_k} f(x,y)\mathrm{d}l.$$

(二) 对坐标的曲线积分

**1. 定义**

$$\begin{aligned}&\int_{L(\widehat{AB})} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\|\Delta l\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].\end{aligned}$$

物理意义:变力 $\boldsymbol{F} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 沿 $\widehat{AB}$ 所做的功

$$\begin{aligned}W &= \int_{L(\widehat{AB})} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L(\widehat{AB})} (P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j})(\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j}) \\ &= \int_{L(\widehat{AB})} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

**2. 性质**

(1) 与积分路径的方向有关,若路径的方向改变,则积分变号,即

$$\int_{L(\widehat{AB})} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{L(\widehat{BA})} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

(2) 对路径具有可加性. 若$\overset{\frown}{AB}$由$C_1,C_2,\cdots,C_k$所组成,且任何两线段之间无重叠部分,则

$$\begin{aligned}&\int_{L(\overset{\frown}{AB})}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{C_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{C_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\cdots+\int_{C_k}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

以上两种曲线积分可分别推广到空间中去,即

$$\int_{L(\overset{\frown}{AB})}f(x,y,z)\mathrm{d}l=\lim_{\|\Delta l\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta l_i.$$

$$\begin{aligned}&\int_{L(\overset{\frown}{AB})}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\lim_{\|\Delta l\|\to0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta z_i].\end{aligned}$$

(三) 两种曲线积分之间的关系

$$\begin{aligned}\int_{L(\overset{\frown}{AB})}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z&=\int_{L(\overset{\frown}{AB})}\left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\right)\mathrm{d}l\\&=\int_{L(\overset{\frown}{AB})}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}l\end{aligned}$$

其中,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$方向的切线的方向余弦,对坐标的曲线积分有时写成"点积"形式.

$$\int_{L(\overset{\frown}{AB})}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{L(\overset{\frown}{AB})}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},\text{其中 }\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\},\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}.$$

## 二、曲线积分的基本定理

**定理 1** (格林定理) 设函数$P(x,y),Q(x,y)$以及它们的一阶偏导数在闭域$D$上连续,则有公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中,$L$是闭区域$D$的边界曲线,$L$是按正向取定的.(所谓$L$的方向是指有人沿$L$的某方向前进时,区域$D$始终在它的左手一边)

应用格林定理时易出的差错:

1° 忽视$P(x,y),Q(x,y)$在闭域$D$上一阶偏导数的连续性;

2° 忘记曲线$L$是封闭的,并且是取正向.

**定理 2** (曲线积分与路径无关的条件)

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\text{ 与路径无关}\Leftrightarrow\oint_{L'}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0,$$

其中$L'$为$D$中任一闭曲线.

**定理 3** 设$P(x,y),Q(x,y)$在单连通域$D$内有一阶连续偏导数,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\text{ 与路径无关}\Leftrightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y)\in D,$$

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\text{ 为 }u(x,y)\text{ 的全微分}\Leftrightarrow\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y)\in D.$$

**定理 4** 设函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在域$\Omega$内有连续的一阶偏导数,则$P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$为某函数$u(x,y,z)$的全微分$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

**定理 5** 设 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在域 $D$ 内有一阶连续的偏导数,且恒有$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,$L_1$ 与 $L_2$ 为 $D$ 内任意两条同向闭曲线,且各自所围的区域中有相同的不属于 $D$ 的点,则

$$\oint_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

## 三、曲面积分的概念和性质

### (一) 对面积的曲面积分

**1. 定义**

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\|\Delta l\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \tau_i)\Delta s_i.$$

物理意义:面密度为 $u = f(x,y,z)$ 的曲面 $\Sigma$ 的质量,即 $M = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

**2. 性质**

(1) 与曲面 $\Sigma$ 的侧面选择无关,即$\iint_{\Sigma} = \iint_{-\Sigma}$其中 $-\Sigma$ 为曲面 $\Sigma$ 的另一侧.

(2) 对曲面具有可加性,若 $\Sigma$ 由 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_k$ 组成,并且任意两块子曲面没有重叠部分,则 $\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \cdots + \iint_{\Sigma_k}$.

### (二) 对坐标的曲面积分

**1. 定义**

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\|\Delta l\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (P_i \Delta\sigma_{i,yz} + Q_i \Delta\sigma_{i,zx} + R_i \Delta\sigma_{i,xy}).$$

物理意义:流体密度 $\rho = 1$,速度场为 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$,单位时间内流过曲面 $\Sigma$ 一侧的流量 $Q$,即

$$Q = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**2. 定义**

(1) 若 $\Sigma$ 由 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_k$ 组成,并且任意两块子曲面没有重叠部分,则

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \cdots + \iint_{\Sigma_k}.$$

(2) 积分与曲面的侧有关,即

$$\iint_{\Sigma} = -\iint_{-\Sigma},$$ 其中,$-\Sigma$ 表示曲面 $\Sigma$ 的另一侧.

### (三) 两种曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \left(P\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S} + Q\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} + R\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 $\Sigma$ 在 $P(x,y,z)$ 点处的法线的方向余弦. 对坐标的曲面积分经常写成点积形式

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中，$\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$.

## 四、曲面积分的基本定理

**定理 1**（奥－高公式） 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在闭域 $\Omega$ 上具有连续的一阶偏导数，则

$$\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中，$\Sigma$ 是闭域 $\Omega$ 的边界曲面的外侧.

应用奥－高公式时易出的差错：

(1) 搞不清 $P,Q,R$ 是对什么变量求偏导；

(2) 不满足奥－高公式的条件，用公式计算；

(3) 忽略了 $\Sigma$ 的取向，注意是取闭曲面的外侧.

**定理 2**（斯托克斯公式） 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 $\Sigma$ 所张成的空间域 $\Omega$ 内有一阶连续的偏导数，$L$ 为曲面 $\Sigma$ 的边界曲线，则

$$\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

其中，曲线 $L$ 的方向与曲面 $\Sigma$ 所取侧的法线方向满足右手法则，即用右手四指表示 $L$ 的方向，则拇指的指向就是曲面 $\Sigma$ 所取侧的法线方向，如图 12-1 所示.

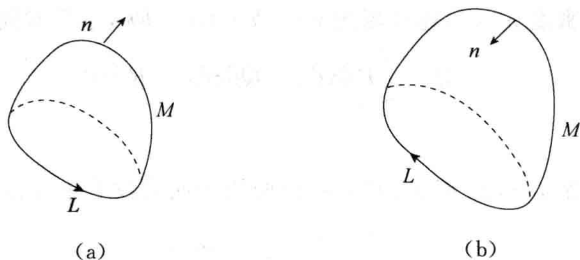



图 12-1

## 五、场论初步

### 1. 方向导数

设 $u=f(x,y,z)$ 为定义于空间域 $\Omega$ 的一个三元函数，$P(x,y,z)$ 为 $\Omega$ 内一点，$\boldsymbol{l}$ 为过 $P$ 点的任一有向线段，$P'(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 上与 $P$ 点邻近的另一点，若 $P'$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 趋于 $P$ 时极限（见图 12-2）：

$$\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|\overline{PP'}|}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}$$

存在，则此极限就称为 $f(x,y,z)$ 在 $P$ 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数，记为$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P$，或$\left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P$.

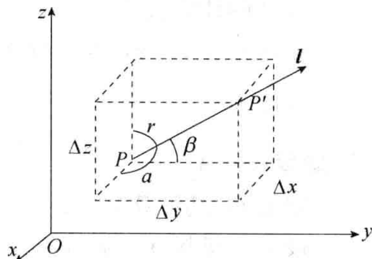



图 12-2

方向导数的计算公式：

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $P(x,y,z)$ 点可微，过 $P(x,y,z)$ 点的有向线段 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P.$$

**2. 梯度(grad $u$)**

设有一数量场 $u=u(x,y,z)$，在场中 $P$ 点处存在一个矢量，若其方向为 $u$ 在该点处方向导数取最大值的方向，其大小为该点处方向导数的最大值，则该矢量称为数量场 $u(x,y,z)$ 在该点处的梯度，记作 **grad** $u$.

梯度 **grad** $u$ 的计算公式：

设数量场 $u=u(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，则

$$\textbf{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

**3. 通量**

设有一矢量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则称沿场中有向曲面 $\Sigma$ 某一侧的曲面积分

$$\Phi=\iint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$ 为 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 $\Sigma$ 这一侧的通量.

通量的计算公式：

$$\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{i}+\mathrm{d}z\mathrm{d}x\boldsymbol{j}+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{k},$$

$$\Phi=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**4. 散度(div $\boldsymbol{A}$)**

设有一矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$，$P(x,y,z)$ 为场中任一点，在 $P$ 点的某邻域内作一包含 $P$ 点在其内的闭曲面 $\Delta\Sigma$，它所围成的小区域及其体积记为 $\Delta v$，以 $\Delta\Phi$ 表示从 $\Delta\Sigma$ 内穿出的通量，若当 $\Delta v\to 0$，即 $\Delta v$ 缩成 $P$ 点时，极限

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta v}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oiint_{\Delta\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta v}$$

存在，则该极限值就称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 $P$ 点的散度，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta v}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oiint_{\Delta\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta v}.$$

散度的计算公式：

设 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$；$P,Q,R$ 均可导，则 $\boldsymbol{A}$ 在 $P(x,y,z)$ 点处的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

**5. 旋度(rot A)**

定义略，其计算公式：

设有矢量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 $P,Q,R$ 均有连续的一阶偏导数，则旋度 rot $\boldsymbol{A}$ 为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

**【例 12.1】** 填空题.

(1) 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法矢量，则 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在 $P$ 点处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数 $=$ ________.

(2) 矢量场 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 div $\boldsymbol{A}$ $=$ ________.

(3) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度为 $\mathbf{grad}\,u\,|_M=$ ________.

(4) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=$ ________.

**【解】** (1) 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，

因为 $F'_x|_P=4x|_P=4, F'_y|_P=6y|_P=6, F'_z|_P=2z|_P=2$，

所以 $\boldsymbol{n}=\{4,6,2\}$，其方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14},$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{11}{7}.$$

(2) $P(x,y,z)=xy^2, Q(x,y,z)=ye^z, R(x,y,z)=x\ln(1+z^2)$，

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_P=y^2\Big|_P=1,\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_P=e^z\Big|_P=1,\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_P=\left.\frac{2xz}{1+z^2}\right|_P=0,$$

故
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_P=2.$$

(3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right|_M=\dfrac{2}{9},\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right|_M=\dfrac{4}{9},$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right|_M=-\frac{4}{9}.$$

故 $$\mathbf{grad}\ u\Big|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\Big|_M=\left\{\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9}\right\}.$$

(4) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$,

先求梯度 $\mathbf{grad}\ u$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\mathbf{grad}\ u=\frac{x\boldsymbol{i}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z\boldsymbol{k}}{x^2+y^2+z^2}.$$

再求 $\mathbf{grad}\ u$ 的散度.

$$P=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\qquad Q=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\qquad R=\frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

故 $$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

**【例 12.2】**已知数量场 $v(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$,求沿 $v(x,y,z)$ 的梯度方向的方向导数.

**【解】** $\mathbf{grad}\ v=\dfrac{2x}{a^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{2y}{b^2}\boldsymbol{j}+\dfrac{2z}{c^2}\boldsymbol{k}$,其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},\quad \cos\beta=\frac{y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

$$v'_x=\frac{2x}{a^2},\qquad v'_y=\frac{2y}{b^2},\qquad v'_z=\frac{2z}{c^2}.$$

故 $$\frac{\partial v}{\partial(\mathbf{grad}\ u)}=\frac{2x}{a^2}\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}+\frac{2y}{b^2}\frac{y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}+\frac{2z}{c^2}\frac{z}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$
$$=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

**【例 12.3】**设函数 $u(x,y,z)=\cos^2(xy)+\dfrac{y}{z^2}$,直线 $l$ 是直线 $L:\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}z=1\\ y-2z+4=0\end{cases}$ 在平面 $x+y-z=5$ 上的投影,求函数 $u(x,y,z)$ 在 $M(0,0,1)$ 点沿直线 $l$ 的方向导数(规定 $l$ 与 $z$ 轴正向夹角为锐角).

**【解】方法一:** $u'_x\,|_M=-2\cos(xy)\sin(xy)y\,|_M=0$,

$$u'_y\,|_M=\left[-2\cos(xy)\sin(xy)x+\frac{1}{z^2}\right]\Big|_M=1,$$

$$u'_z\Big|_M=-\frac{2y}{z^3}\Big|_M=0.$$

设 $\boldsymbol{n}_{平},\boldsymbol{n}_L,\boldsymbol{n}_l$ 分别为平面 $x+y-z=5$ 的法矢量,直线 $L$,直线 $l$ 的方向矢量.

由于 $l$ 在平面上,所以 $\boldsymbol{n}_{平}\cdot\boldsymbol{n}_l=0$,设 $\boldsymbol{n}_l=\{l,m,n\}$ 而 $\boldsymbol{n}_{平}=\{1,1,-1\}$,于是有

$$l+m-n=0, \tag{①}$$

$$\boldsymbol{n}_L=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\},$$

$$\cos(\boldsymbol{n}_{平}\hat{,}\boldsymbol{n}_L)=\frac{\boldsymbol{n}_{平}\cdot\boldsymbol{n}_L}{|\boldsymbol{n}_{平}||\boldsymbol{n}_L|}=\frac{\frac{1}{2}\times 1+\frac{2}{3}\times 1-\frac{1}{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{29}{36}}}=\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{29}},$$

$$\sin(\boldsymbol{n}_{平}\hat{,}\boldsymbol{n}_L)=\frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3}\sqrt{29}},$$

$$\cos(\boldsymbol{n}_l\hat{,}\boldsymbol{n}_L)=\frac{\frac{1}{2}l+\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{\frac{29}{36}}}=\frac{3l+4m+2n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{29}},$$

因为 $\cos(\boldsymbol{n}_l\hat{,}\boldsymbol{n}_L)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\boldsymbol{n}_{平}\hat{,}\boldsymbol{n}_L)\right]=\sin(\boldsymbol{n}_{平}\hat{,}\boldsymbol{n}_L)$,

所以 $\frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3}\sqrt{29}}=\frac{3l+4m+2n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{29}}\Rightarrow(3l+4m+2n)^2=\frac{62}{3}(l^2+m^2+n^2)$.

再由 ①$\Rightarrow(7l-4m)^2=0\Rightarrow l=\frac{4}{7}m,n=\frac{11}{7}m$,

所以 $\boldsymbol{n}_L=\left\{\frac{7}{4},1,\frac{11}{7}\right\}$,其方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{186}},\cos\beta=\frac{7}{\sqrt{186}},\cos\gamma=\frac{11}{\sqrt{186}},$$

故 $\frac{\partial u}{\partial l}=0\times\cos\alpha+1\times\cos\beta+0\times\cos\gamma=\frac{7}{\sqrt{186}}$.

**方法二:** 投影平面:$\lambda(2x-3z-6)+y-2z+4=0$,

即 $2\lambda x+y-(3\lambda+2)z-6\lambda+4=0$.

投影平面法矢量:$\boldsymbol{n}_{投}=\{2\lambda,1,-3\lambda-2\}$,

① 与平面 $x+y-z=5$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}=\{1,1,-1\}$ 互相垂直.

所以 $2\lambda+1+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=-\frac{3}{5}$.

投影平面方程为:$-6x+5y-z+38=0$,

$l$ 的方程为:$\begin{cases}x+y-z=5,\\-6x+5y-z+38=0.\end{cases}$

$l$ 的方向矢量:$\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ -6 & 5 & -1\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$,

$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{186}},\cos\beta=\frac{7}{\sqrt{186}},\cos\gamma=\frac{11}{\sqrt{186}}$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=0,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=1,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=0,$$

所以$\frac{\partial u}{\partial l}=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\cos\beta+0\cdot\cos\gamma=\frac{7}{\sqrt{186}}$.

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　对弧长的曲线积分的计算

**提 示** 解法:化为参变量的定积分计算.

解题程序:

(1) 画出积分路径的图形.

(2) 把路径$\widehat{AB}$的参数式写出来:$x=\varphi(t),y=\psi(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

(3) 将 $\mathrm{d}l$ 写成参变量的微分式,并计算

$$\int_{L(\widehat{AB})}f(x,y)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,\mathrm{d}t.$$

(注:参数大的作为上限$\beta$,小的为下限$\alpha$)

**【例 12.4】**计算$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$,$L$为由圆周$x^2+y^2=a^2$,直线$y=x$及$x$轴在第一象限中所围图形的边界(如图 12-3 所示).

**【解】**$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=\int_{\overline{OA}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{BO}}$,

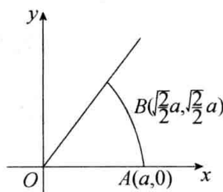


图 12-3

$\overline{OA}:y=0,0\leqslant x\leqslant a$,

$$\int_{\overline{OA}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=\int_0^a \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1.$$

$\widehat{AB}:x=\cos t,y=a\sin t,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$,

$$\int_{\widehat{AB}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a a\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a.$$

$\overline{BO}:y=x,0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$\int_{\overline{BO}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1.$$

故　$$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=2(\mathrm{e}^a-1)+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a.$$

**【例 12.5】**计算$I=\int_L|y|\mathrm{d}l$,其中$L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,其中$a>0$.

**【解】**由 $L$ 的表达式可知用极坐标简便,令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,

则　$$L:\rho^4=a^2\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\Rightarrow\rho^2=a^2\cos2\theta.$$

因为路径和被积函数 $f(x,y)=|y|$ 均关于 $x$ 轴、$y$ 轴、原点对称,所以只要算出第一象限

的曲线积分再 4 倍即可.

令 $\rho^2=0\Rightarrow 2\theta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}$. 又 $\mathrm{d}l=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{a}{\sqrt{\cos2\theta}}\mathrm{d}\theta$,

故
$$\begin{aligned}I&=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho\sin\theta\,\frac{a}{\sqrt{\cos2\theta}}\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos2\theta}\cdot\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos2\theta}}\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=4a^2\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0}=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

**【例 12.6】** 计算曲线积分 $I=\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}l$, $L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x=y$ 相交的圆周,其中 $a>0$.

**【解】** $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y^2+z^2=a^2\\x=y\end{cases}$,于是
$$I=\int_L\sqrt{a^2}\,\mathrm{d}l=a\int_L\mathrm{d}l=al=a\cdot(2\pi a)=2\pi a^2.$$

注 曲线积分可以将曲线 $L$ 的表达式直接代入积分式,而对曲面积分也可以作类似处理,这一点与重积分是完全不同的,请读者注意.

## 题型二 对坐标的曲线积分的计算

提示 解法有四种:

(1) 化为参数的定积分求解.

曲线 $L(\widehat{AB})$: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leftrightarrow\widehat{AB}$ 的起点 $A$, $\beta\leftrightarrow\widehat{AB}$ 的终点 $B$ ($\beta$ 不一定比 $\alpha$ 大!),则
$$\int_{L(\widehat{AB})}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t)),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)]\mathrm{d}t.$$
特例 $L: y=\varphi(x)$ 把 $x$ 作为参数. $L: x=\psi(y)$ 把 $y$ 作为参数.

(2) 利用格林公式求解 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,注意条件!

(3) $L$ 不闭合 + 边 $L^*$,使 $L+L^*$ 闭合,再用格林公式
$$\begin{aligned}\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}x&=\oint_{L+L^*}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L^*}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L^*}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

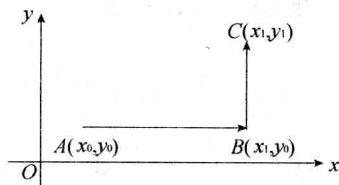


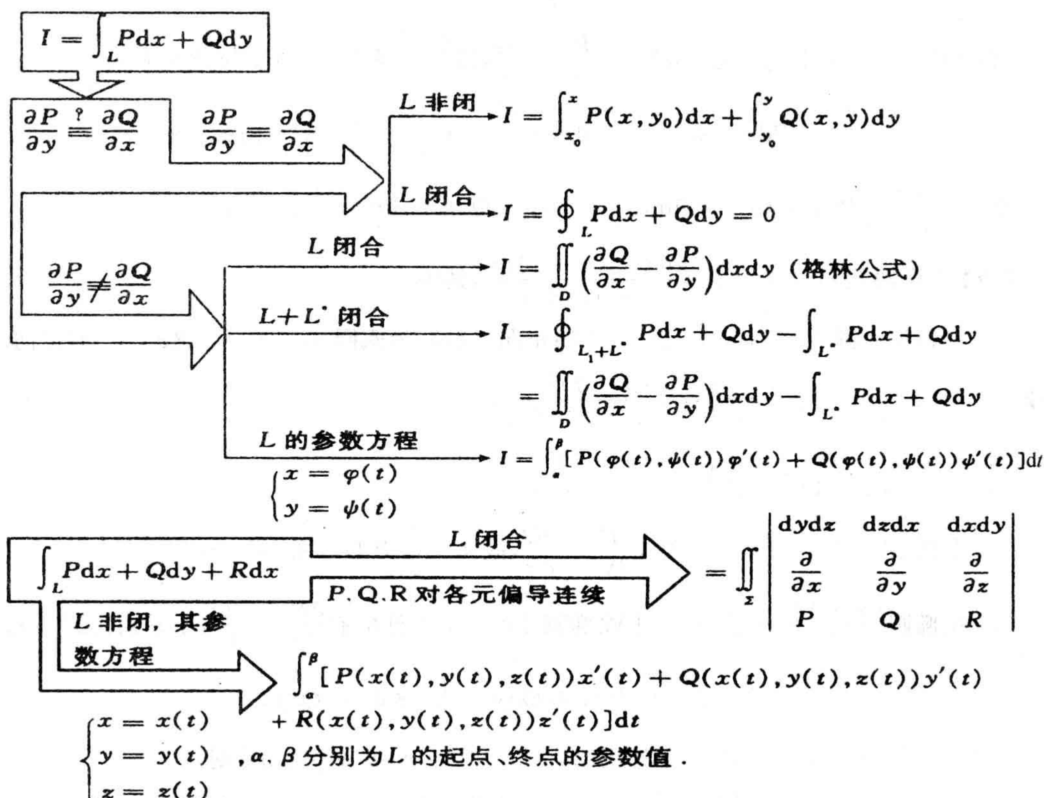
图 12-4

(4) 利用与路径无关条件求解(见图 12-4)

若 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$(与路径无关条件)

则 $\displaystyle\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y.$

解题程序(流程图)




【例 12.7】计算 $I=\int_L(x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$,其中 $L$ 为由点(0,0) 到点 $B(1,1)$ 的曲线

$$y=\sin\frac{\pi}{2}x.$$

【解】$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x,\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,

所以$\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关.

故 $$\int_L(x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy=\int_0^1x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy=\frac{23}{15}.$$

【例 12.8】计算曲线积分 $I=\int_L\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$,

其中 $L$ 分别为:(1) 圆$(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 的正向;

(2) 沿曲线 $y=x^2$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,\pi^2)$ 的一段弧.

【解】
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

(1) 显然,在$(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant2$ 内,有$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,

故
$$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$

(2)$y$ 轴($x=0$)上的点除外，均有$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故$\int_{L(\varepsilon,0)}^{(\pi,\pi^2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路径无关，而

$$\int_{L(\varepsilon,0)}^{(\pi,\pi^2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\varepsilon^\pi\mathrm{d}x+\int_0^{\pi^2}\left(\sin\frac{y}{\pi}+\frac{y}{\pi}\cos\frac{y}{\pi}\right)\mathrm{d}y=\pi-\varepsilon,$$

故
$$\int_{L(0,0)}^{(\pi,\pi^2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{L(\varepsilon,0)}^{(\pi,\pi^2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to0}(\pi-\varepsilon)=\pi.$$

**【例 12.9】**计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中

(1)$L$ 为圆周 $x^2+y^2-2y=0$ 的正向；(2)$L$ 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

**【解】**$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right)=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right)=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}.$$

(1) 在圆 $x^2+(y-1)^2\leqslant1$ 中，$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故 $I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

(2) 在椭圆$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{y^2}{2^2}=1$中除椭圆中心(1,0)外恒有$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，于是由定理 5 有

$$I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_*}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中 $L_*$ 为$(x-1)^2+y^2=1$的正向，令 $x-1=\cos\theta, y=\sin\theta$，则

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta(-\sin\theta)-\cos\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=-2\pi.$$

**【例 12.10】**计算曲线积分

$$I=\oint_L\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,\text{其中 }L\text{ 为沿椭圆}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{ 的正方向(见图 12-5)}.$$

**【解】**
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

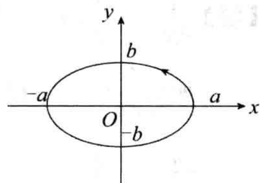


图 12-5

因为在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1$ 内，$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，

例如在(0,0)处$\frac{\partial P}{\partial y}$与$\frac{\partial Q}{\partial x}$均无意义.

所以曲线积分不仅与路径有关，且不能用格林公式，由定理 5 有

$$I=\oint_L\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

其中，$0<\varepsilon<1$，令 $x=\varepsilon\cos t, y=\varepsilon\sin t$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\varepsilon(\cos t-\sin t)}{\varepsilon^2}\cdot(-\varepsilon\sin t)+\frac{\varepsilon(\cos t+\sin t)}{\varepsilon^2}\cdot(\varepsilon\cos t)\right]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

**【例 12.11】**计算曲线积分 $I=\int_{\widehat{AMB}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y$,

其中，$\widehat{AMB}$ 为连接点 $A(\pi,2)$ 与点 $B(3\pi,4)$ 的线段$\overline{AB}$ 之下方的任意路线(见图 12-6)，且该路线与线段$\overline{AB}$ 所围图形面积为 2.

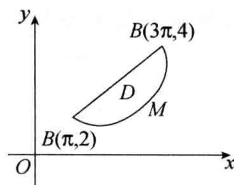



图 12-6

**【解】** $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}[\varphi(y)\cos x-\pi y]=\varphi'(y)\cos x-\pi$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}[\varphi'(y)\sin x-\pi]=\varphi'(y)\cos x.$

因为 $\varphi(y)$ 是抽象函数，

所以碰到这类问题一般是加边使曲线封闭，再用格林公式，为此

$$I=\int_{\widehat{AMB}}+\int_{\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=\oint_{\widehat{AMBA}}-\int_{\overline{BA}}.$$

$$\oint_{\widehat{AMBA}}P\mathrm{d}+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi(\text{由题设}).$$

因为$\overline{BA}$： $y=\dfrac{x}{\pi}+1$,

$$\text{所以}\int_{\overline{BA}}=\int_{3\pi}^{\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x-\pi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\right]\mathrm{d}x+\left[\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x-\pi\right]\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{3\pi}^{\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x\mathrm{d}x+\int_{3\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x\mathrm{d}x-\int_{3\pi}^{\pi}(\pi+1+x)\mathrm{d}x\right.$$

$$=\int_{3\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x\mathrm{d}x+\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x\Big|_{3\pi}^{\pi}-\int_{3\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x\mathrm{d}x-\left[(\pi+1)x+\frac{1}{2}x^2\right]_{3\pi}^{\pi}$$

$$=2\pi(1+3\pi),$$

故 $$I=2\pi-2\pi(1+3\pi)=-6\pi^2.$$

**【例 12.12】** 计算 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，$L$ 为由点$(a,0)$ 到点$(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$，$y\geqslant0$(见图 12-7).

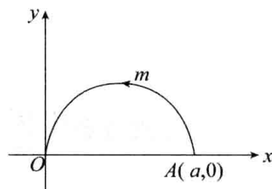



图 12-7

**【解】** $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x\sin y-my)=\mathrm{e}^x\cos y-m$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\cos y-m)=\mathrm{e}^x\cos y$,

$$I=\int_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}=\oint_{\widehat{AMOA}}-\int_{\overline{OA}}.$$

$$\oint_{\widehat{AMOA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{m}{8}\pi a^2,$$

$$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a0\cdot\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x-m)\cdot0=0,$$

故 $\quad I=\dfrac{m}{8}\pi a^2.$

**【例 12.13】** 计算空间曲线积分

$$I=\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中，曲线 $L$ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0,h>0)$ 的交线，从 $x$ 轴正向看去，曲线是逆时针方向(见图 12-8).

**【解法一】** 化为参数的定积分计算，对于这种封闭的曲线要充分利用 $[0,2\pi]$ 上三角函数簇的正交性.

令 $x=a\cos t, y=a\sin t$，则

$$z=h\left(1-\frac{x}{a}\right)=h\left(1-\frac{a\cos t}{a}\right)=h(1-\cos t),$$

于是 $I=\int_0^{2\pi}[a\sin t-h(1-\cos t)]\cdot(-a\sin t)+[h(1-\cos t)-a\cos t]\cdot a\cos t+(a\cos t-a\sin t)\cdot h\sin t\mathrm{d}t=-2\pi a(a+h).$

**【解法二】** $I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}$

$$=-2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint\limits_{D_{xy}}\{1,1,1\}\cdot\{\frac{h}{a},0,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint\limits_{D}(\frac{h}{a}+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi a(a+h).$$

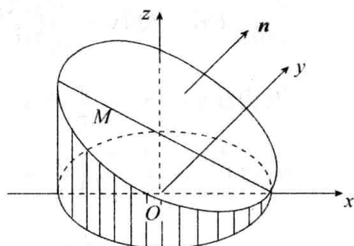


图 12-8

**【例 12.14】** 选择 $a,b$ 使 $\frac{(y^2+2xy+ax^2)\mathrm{d}x-(x^2+2xy+by^2)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$ 为某一函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

**【解】**

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y+2x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4y(y^2+2xy+ax^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2y+2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x(x^2+2xy+by^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

由全微分条件 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故

$$(a+1)x^2y+(b+1)xy^2=0.$$

$$\Rightarrow a=-1,b=-1,$$

所以 $$\mathrm{d}u=\frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x-\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y.$$

选折线 $(1,1)\to(x,1)\to(x,y)$ 为积分路径，则

$$u=\int_1^x\frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x-\int_1^y\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^x\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}+2\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}-\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-2x\int_1^y\frac{(x+y)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{1}{1+x^2}\Big|_1^x+\frac{x}{1+x^2}\Big|_1^x+\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}-\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-$$

$$2x^2\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}-2x\int_1^y\frac{y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

故
$$u(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C.$$

**【例 12.15】** 设曲线 $L$ 是正向圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$，$\varphi(x)$ 是连续的正函数，证明：

$$\oint_L \frac{x}{\varphi(y)}\mathrm{d}y - y\varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant 2\pi.$$

**【解】** 设 $L$ 所围成的闭区域为 $D$，由格林公式得

$$\oint_L \frac{x}{\varphi(y)}\mathrm{d}y - y\varphi(x)\mathrm{d}x = \iint_D \left[\frac{1}{\varphi(y)} + \varphi(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为区域 $D$ 关于直线 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D \varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是
$$\oint_L \frac{x}{\varphi(y)}\mathrm{d}y - y\varphi(x)\mathrm{d}x = \iint_D \left[\frac{1}{\varphi(y)} + \varphi(y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\geqslant 2\iint_D \sqrt{\varphi(y)\cdot\frac{1}{\varphi(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

## 题型三　对面积的曲面积分的计算

提示 解法：化为投影域上的二重积分的计算.

**解题程序：**

(1) 画出曲面 $\Sigma$；

(2) 由曲面 $\Sigma$ 的方程，例如 $z=z(x,y)$，写出其曲面微分

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(3) 计算在投影面上的二重积分.

**【例 12.16】** 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 三点为顶点的球面三角形（$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 均为大圆弧），若球面密度为 $\rho=x^2+z^2$，求此球面三角形块的质量（见图 12-9）.

**【解】** 设此球面三角形块的质量为 $M$，于是

$$M = \iint_\Sigma \rho\mathrm{d}S = \iint_\Sigma (x^2+z^2)\mathrm{d}S.$$

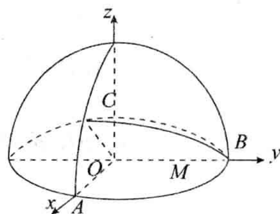


图 12-9

由被积函数 $f(x,y,z)=x^2+z^2$ 可知，取 $\Sigma$ 在 $xOz$ 平面上投影合适.

因为 $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$，

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2-z^2}},$$

所以 $M = \iint_{D_{xz}} \frac{x^2+z^2}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho \xlongequal{\text{令}\sqrt{1-\rho^2}=u} -\frac{\pi}{4}\int_1^0 \frac{u(1-u^2)}{u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-u^2)\mathrm{d}u = \frac{\pi}{6}.$$

**【例 12.17】** 计算曲面积分 $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，

其中，$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & z \geqslant \sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & z < \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$. （见图 12-10）

**【解】** 球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 被上半锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 分成两部分：

$\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2=t^2, z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$，

$\Sigma_2 : x^2+y^2+z^2=t^2, z < \sqrt{x^2+y^2}$.

$F(t) = \iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} 0 \cdot \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，

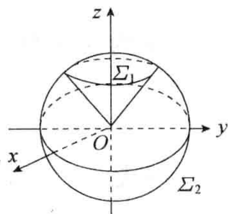


图 12-10

用球面坐标 $\mathrm{d}S = t^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，　$x^2+y^2=t^2\sin^2\varphi$，

于是　$F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\sin^2\varphi \cdot t^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}(8-5\sqrt{2})\pi t^4$.

**【例 12.18】** 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma$ 是球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$.

**【解】** 由于对称性有　$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$，

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S = 0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}S = 0.$$

故　$I = \iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2+2abxy+2acxz+$

$2bcyz+2adx+2bdy+2cdz)\mathrm{d}S$

$$=d^2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S+(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S = 4\pi R^2d^2+(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S$$

$$=4\pi R^2d^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = 4\pi R^2d^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)R^2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\pi R^2d^2+\frac{4\pi}{3}(a^2+b^2+c^2)R^4.$$

## 题型四　对坐标的曲面积分的计算

**提示** 解法有三种：

(1) 利用奥－高公式：

① 若 $P,Q,R$ 在闭曲面 $\Sigma$ 所围成的空间域 $\Omega$ 中有连续的一阶偏导数，则

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\text{其中},\Sigma\text{ 取外侧}.$$

② 若 $\Sigma$ 非闭而 $P,Q,R$ 比较复杂，$P,Q,R$ 在 $\Sigma$ 加面 $\Sigma^*$ 后（$\Sigma+\Sigma^*$ 为闭）所构成的空间域 $\Omega$ 中有一阶连续偏导，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint\limits_{\Sigma^*}=\iiint\limits_{\Omega}-\iint\limits_{\Sigma^*}.$$

（2）通过投影化为二重积分

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma}Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma}R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint\limits_{D_{zx}}Q(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

“$\pm$”号的确定：

若 $\Sigma$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $x$ 轴的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}})$ 为锐角，则右边第一个积分前取“+”，否则取“−”；

若 $\Sigma$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $y$ 轴的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}})$ 为锐角，则右边第二个积分前取“+”，否则取“−”；

若 $\Sigma$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $z$ 轴的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{z}})$ 为锐角，则右边第三个积分前取“+”，否则取“−”.

曲面的前侧取“+”，后侧取“−”；右侧“+”，左侧“−”；上侧“+”，下侧“−”；外侧取“+”，里侧取“−”.

（3）矢量的点积法

设曲面 $\Sigma$ 的方程为 $z=f(x,y)$，规定 $\Sigma$ 的法矢量方向为 $\{-f'_x,-f'_y,1\}$，

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0\cdot\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\left\{\frac{-f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\frac{-f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}\right\}\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{-f'_x,-f'_y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{将}\Sigma\text{在}xOy\text{面投影}}\pm\iint\limits_{D_{xy}}\{P,Q,R\}\cdot\{-f'_x,-f'_y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

“+”，“−”号的确定：若题设中曲面 $\Sigma$ 的侧与 $\{-f'_x,-f'_y,1\}$ 相同，取“+”，否则取“−”.

同样，若曲面 $\Sigma$ 的方程为 $x=\varphi(y,z)$［或 $y=\psi(x,z)$］有类似的公式.

注 1° 若曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上投影为一个区域，则用方法(3)简便.

2° 若曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影为一条线，且 $P,Q,R$ 具有一阶连续的偏导，则通常是加曲面 $\Sigma_*$，使 $\Sigma+\Sigma_*$ 封闭，用奥高公式.

3° 若曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影为一条线，$P,Q,R$ 以及它们的一阶偏导数不连续情况下，用方法(2)处理.

【例 12.19】计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，$\Sigma$ 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\x=0\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 $y$ 轴旋转一周所成的曲面，它的法矢量与 $y$ 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

【解】$\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\x=0\end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转的旋转面方程为 $y-1=z^2+x^2$，见图 12-11.

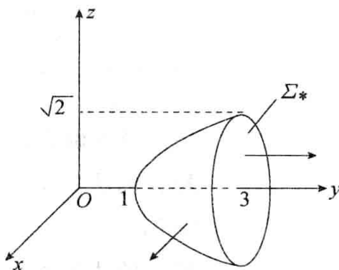



图 12-11

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_*}-\iint\limits_{\Sigma_*},$$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_*}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(8y+1-4y-4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xz}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{1+z^2+x^2}^{3}\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{1+\rho^2}^{3}\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho-\rho^3)\mathrm{d}\rho=2\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_*}=2\iint\limits_{\Sigma_*}(1-3^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-32\pi.$$

故 $\quad I=2\pi-(-32\pi)=34\pi.$

【例 12.20】计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中，$\Sigma$ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧(见图 12-12).

【解】$\Sigma_1:x+z=2$，

$\Sigma_2:x^2+y^2=4,\Sigma_3:z=0$，

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_3}.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}=\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(-1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

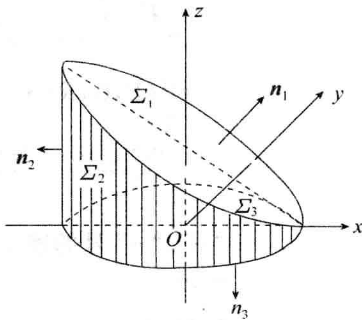



图 12-12

$$\iint\limits_{\Sigma_1}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}\{0,-y,z+1\}\cdot\{1,0,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}(3-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(3-\rho\cos\theta)\rho\mathrm{d}\rho=12\pi.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi.$$

故 $I=0-12\pi+4\pi=-8\pi.$

**【例 12.21】**计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中,$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

**【解】**$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_*}-\iint\limits_{\Sigma_*}$,其中 $\Sigma_*$ 为 $z=0,x^2+y^2\leqslant a^2$,取下侧.

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_*}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_*}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6}{5}\pi a^5.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_*}=\iint\limits_{\Sigma_*}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=-a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^a=-\frac{1}{4}\pi a^5.$$

所以 $I=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5.$

**【例 12.22】**计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中,$\Sigma$ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体表面外侧.

**【解】**$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(2z+z-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

**【例 12.23】**计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$,其中,$\Sigma$ 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R,z=-R(R>0)$ 所围立体表面的外侧(见图 12-13).

**【解】**曲面 $\Sigma$ 是封闭的,但 $P,Q,R$ 及其一阶偏导数在曲面 $\Sigma$ 所围成的区域中不连续,所以奥一高公式不能用!

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}=I_1+I_2+I_3,$$

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{R^2}{R^2+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R^2}{R^2+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{R^2}{R^2+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R^2}{R^2+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_1+I_2=0.$$

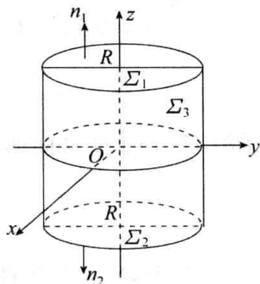


图 12-13

$$I_3=\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_3\text{前}}+\iint\limits_{\Sigma_3\text{后}}\left(\begin{matrix}\Sigma_3\text{ 前}:x=\sqrt{R^2-y^2}\\ \Sigma_3\text{ 后}:x=-\sqrt{R^2-y^2}\end{matrix}\right)$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3\text{前}}=\iint\limits_{\Sigma_3\text{前}}\left\{\frac{x}{x^2+y^2+z^2},0,\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right\}\cdot\left\{1,\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}},0\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_3\text{前}}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3\text{后}}=\iint\limits_{\Sigma_3\text{后}}\left\{\frac{x}{x^2+y^2+z^2},0,\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right\}\cdot\left\{1,\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}},0\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\iint\limits_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

所以 $I_3=2\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y=8\int_0^R\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y$

$$=8\,\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^R\cdot\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{1}{2}R\pi^2,$$

故 $\quad I=\frac{1}{2}R\pi^2.$

**【例 12.24】** 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$\Sigma$: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1,z=2$ 所截部分的外侧(见图 12-14).

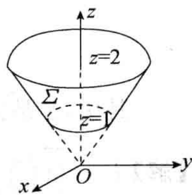


图 12-14

**【解】** $I=\iint\limits_{\Sigma}\{y,-x,z^2\}\cdot\left\{\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^2\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{15}{2}\pi.$$

**【例 12.25】** 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中,$\Sigma$ 为曲线 $\begin{cases}z=a^y\\ x=0\end{cases}$ $(0\leqslant y\leqslant 2,a>0,a\neq 1)$ 绕 $z$ 轴旋转一周所成曲面的下侧.

**【解法一】** $\Sigma$ 的方程:$z=a^{\sqrt{x^2+y^2}}$,$(x^2+y^2\leqslant 4)$,添加一个平面 $\Sigma_1:z=a^2$,则 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 构成闭曲面 $\Sigma_*$,其所围区域记为 $\Omega$,于是

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\oiint\limits_{\Sigma_*}-\iint\limits_{\Sigma_1}.$$

$$\oiint\limits_{\Sigma_*}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\xlongequal{\text{柱坐标}}2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{a^\rho}^{a^2}z\,\mathrm{d}z$$

$$=4\pi\int_0^2\frac{1}{2}(a^4-a^{2\rho})\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^2(a^4\rho-a^{2\rho}\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi a^4-2\pi\int_0^2\rho a^{2\rho}\mathrm{d}\rho=4\pi a^4-2\pi\left[\frac{a^4}{\ln a}-\frac{a^4}{(2\ln a)^2}+\frac{1}{(2\ln a)^2}\right],$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\xlongequal[\mathrm{d}z=0]{\Sigma_1:z=a^2}\iint\limits_{D_{xy}}(1-a^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-a^4)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi(1-a^4),$$

故
$$I=4\pi(2a^4-1)-2\pi\left[\frac{a^4}{\ln a}-\frac{a^4}{(2\ln a)^2}+\frac{1}{(2\ln a)^2}\right].$$

**【解法二】** $z=a^{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z'_x=a^{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\ln a\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z'_y=a^{\sqrt{x^2+y^2}}\ln a\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$$\boldsymbol{n}=\left\{-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\ln a\cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\ln a\cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}.$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\{4zx,-2z,1-z^2\}\cdot\left\{-\frac{x\ln a\cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y\ln a\cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{因为 }z=a^{\sqrt{x^2+y^2}}}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2^2}\left[\frac{(4x^2-2y)\ln a\cdot a^{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}+a^{2\sqrt{x^2+y^2}}-1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{化为极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left[\frac{(4\rho^2\cos^2\theta-2\rho\sin\theta)\ln a\cdot a^{2\rho}}{\rho}+a^{2\rho}-1\right]\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal[\text{的正交性}]{\text{由三角函数族}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 4\rho^2\cos^2\theta\cdot\ln a\cdot a^{2\rho}\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(a^{2\rho}-1)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi\int_0^2 4\rho^2\ln a\cdot a^{2\rho}\mathrm{d}\rho+2\pi\int_0^2(a^{2\rho}-1)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi(2a^4-1)-2\pi\left[\frac{a^4}{\ln a}-\frac{a^4}{(2\ln a)^2}+\frac{1}{(2\ln a)^2}\right].$$

## 题型五　曲面面积的计算

| 计算方法 | 适用范围 | 基本形式 |
|---|---|---|
| 利用二重积分 | 已知曲面 Σ 的方程及其在坐标面上的投影域 | 设 $\Sigma:z=f(x,y)$（与平行于 $z$ 轴的直线只交于一点）在 $xOy$ 平面上的投影域为 $D_{xy}$，则 Σ 的面积 $A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，Σ 的其他形式有类似公式 |

**【例 12.26】** 求曲面 $x^2=y^2+z^2$ 包含在 $x^2+y^2+z^2=2z$ 内的面积.

【解】两曲面的交线为
$$\begin{cases}x^2=y^2+z^2,\\x^2+y^2+z^2=2z,\end{cases}$$

它在 $yOz$ 平面上的投影曲线方程为
$$\begin{cases}y^2+z^2=x,\\x=0.\end{cases}$$

曲面 $x^2=y^2+z^2$ 在 $yOz$ 平面上的投影域为 $y^2+z^2\leqslant z$.

$$x'_y=\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\qquad x'_z=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

由图形的对称性,故所求面积为

$$A=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}\,dydz=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{2}\,dydz=2\sqrt{2}\iint\limits_{D_{yz}}dydz$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

【例 12.27】求曲线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 由 $x=0$ 至 $x=a$ 的一段曲线绕 $y$ 轴旋转所得旋转面面积.

【解】旋转面方程:
$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}}+e^{-\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}}),$$

该曲面在 $xOz$ 平面上的投影域 $D_{xz}:x^2+z^2\leqslant a^2$,

$$y'_x=\frac{x}{2\sqrt{x^2+z^2}}(e^{\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}}-e^{-\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}}),$$

$$y'_z=\frac{z}{2\sqrt{x^2+z^2}}(e^{\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}}-e^{-\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}}),$$

无论从 $D_{xz}$ 的表达式,还是从 $dS=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,dxdz$ 的形式都可看出用极坐标较方便,

令 $x=\rho\cos\theta,z=\rho\sin\theta$,

于是
$$\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}=\frac{1}{2}(e^{\frac{\rho}{a}}+e^{-\frac{\rho}{a}}),$$

故
$$A=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{2}(e^{\frac{\rho}{a}}+e^{-\frac{\rho}{a}})\rho d\rho=2\pi a^2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

## 第 3 节 思维定势及综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势** 曲线积分的积分曲线 $L$ 关于坐标轴对称,要立刻想到利用被积函数的对称性简化积分.

【例 12.28】设 $l$ 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,其周长记为 $a$,则$\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)ds=$ ________.

【分析】利用曲线积分的概念及积分曲线的对称性化简曲线积分后再进行计算.

【解】
$$\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_l \left(2xy+12\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\right)\mathrm{d}s$$
$$=2\oint_l xy\mathrm{d}s+12\oint_l \mathrm{d}s,$$

因为 $l$ 关于 $x$ 轴对称，而且 $xy$ 关于 $y$ 为奇函数，所以$\oint_l xy\mathrm{d}s=0$.

此外，$12\oint_l \mathrm{d}s=12a$，因此$\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=12a$.

**【例 12.29】** 计算$\int_L (x^2+y^3)\mathrm{d}s$，其中 $L:x^2+y^2\leqslant a^2$.

【解】
$$\int_L (x^2+y^3)\mathrm{d}s=\int_L x^2\mathrm{d}s+\int_L y^3\mathrm{d}s.$$

由于 $L$ 的"轮换对称性"，有$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s$.

又 $L$ 关于 $x$ 轴对称，且 $f(x,y)=y^3$ 关于 $y$ 为奇函数，所以$\int_L y^3\mathrm{d}s=0$.

故$\int_L (x^2+y^3)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{2}\int_L \mathrm{d}s=\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a=\pi a^3$.

## 二、综合题解析

**【例 12.30】** 设曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$.

计算 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$.

【解】
$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy,\frac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x),$$

因为$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，所以 $y\varphi'(x)=2xy\Rightarrow\varphi(x)=x^2+C$，

又 $\varphi(0)=0$，所以 $C=0$，故 $\varphi(x)=x^2$.

于是
$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+yx^2\mathrm{d}y=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

**【例 12.31】** 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线簇 $y=\alpha\sin x(\alpha>0)$ 中，求一条曲线 $L$，使沿该曲线从 $O$ 到 $A$ 的积分$\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

【解】$I(\alpha)=\int_0^\pi [1+\alpha^3\sin^3 x+(2x+\alpha\sin x)\alpha\cos x]\mathrm{d}x=\pi-4\alpha+\frac{4}{3}\alpha^3$.

令
$$I'(\alpha)=4(\alpha^2-1)=0\Rightarrow\alpha=1,(\alpha=-1\text{ 舍去})$$

$\alpha=1$ 是 $I(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 内唯一的驻点. 又因为 $I''(\alpha)\Big|_{\alpha=1}=8>0$，所以 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=1$ 处取得最小值，故所求曲线为 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

**【例 12.32】** 设 $f(\pi)=1$，试求 $f(x)$，使曲线积分
$$\int_{\widehat{AB}} [\sin x-f(x)]\,\frac{y}{x}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$$
与路径无关，并求当 $A,B$ 两点坐标分别为 $(1,0)$，$(\pi,\pi)$ 时曲线积分值.

**【解】**
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\sin x-f(x))\frac{y}{x}\right]=(\sin x-f(x))\cdot\frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[f(x)]=f'(x).$$

因为曲线积分与路径无关,所以 $f'(x)\equiv(\sin x-f(x))\dfrac{1}{x}$.

整理得一阶线性方程 $\quad f'(x)+\dfrac{1}{x}f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$,

解之得
$$f(x)=\frac{1}{x}(C-\cos x).$$

把 $f(\pi)=1$ 代入上式,得 $C=\pi-1$.

故
$$f(x)=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x).$$

$$\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}\left[\sin x-\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)\right]\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^\pi 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^\pi\frac{1}{\pi}(\pi-1-\cos\pi)\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}y=\pi.$$

## 习 题 十 二

**1.** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导函数,求 $I=\displaystyle\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$,其中 $L$ 是从点 $A(3,\dfrac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.

**2.** 计算 $I=\displaystyle\int_{L(0,0)}^{(1,2)}(\mathrm{e}^y+x)\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y$,其中 $L$ 为过 $(0,0)$,$(0,1)$,$(1,2)$ 三点的圆周.

**3.** 计算 $I=\displaystyle\int_{L(\widehat{AMB})}(\mathrm{e}^x\sin y+8y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-7x)\mathrm{d}y$,$L_{(\widehat{AMB})}$ 是上半圆周,$A$,$B$ 的坐标分别为 $(1,0)$ 和 $(7,0)$.

**4.** 计算$\displaystyle\int_{\widehat{ABC}}(a_1x+a_2y+a_3)\mathrm{d}x+(b_1x+b_2y+b_3)\mathrm{d}y$,其中 $a_i$,$b_i(i=1,2,3)$ 为常数,$A(-1,0)$,$B(0,1)$,$C(1,0)$,$AB$ 为 $x^2+y^2=1$ 上的一段弧,$BC$ 为 $y=1-x^2$ 上的一段弧.

**5.** 计算 $I=\displaystyle\int_{L(A)}^{L(B)}(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y})\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\mathrm{d}y$,其中 $L$ 为连接 $A(\pi,1)$ 与 $B(\pi,2)$ 的曲线弧段.

**6.** 计算 $I=\displaystyle\int_{\widehat{AB}}\frac{(x-c)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}(c>0)$,其中 $\widehat{AB}$ 是沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的正向从 $A(a,0)$ 到 $B(0,b)$ 的一段弧.

**7.** 计算 $I=\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_L(\mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos 2xy-3y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin 2xy-b^2)\mathrm{d}y(b>0)$,其中 $L$ 是依次连接 $A(a,0)$,$B\left(a,\dfrac{\pi}{a}\right)$,$E(0,\dfrac{\pi}{a})$,$O(0,0)$ 的有向折线(已知$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

**8.** 设平面 $z=y$ 与椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 相截,求其在 $z\geqslant0$,$y\geqslant0$ 及 $xOy$ 平面之间的椭圆柱面

的侧面面积.

**9.** 计算 $I=\int_{\widehat{AB}}[\Phi(y)e^x-my]dx+[\Phi'(y)e^x-m]dy$,其中 $\Phi(y)$ 和 $\Phi'(y)$ 为连续函数,$\widehat{AB}$ 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路径,但与直线段 $AB$ 围成的图形有定面积 $S$.

**10.** 计算 $I=\int_{\widehat{AMB}}(e^x\sin y-ay)dx+(e^x\cos y-bx)dy$,其中 $\widehat{AMB}$ 是通过点 $A(a,0)$,$M\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)$,$B(b,0)$ 的半圆周($a>b>0$).

**11.** $\oint_L 3ydx-xzdy+yz^2dz$,其中 $L$ 是圆周 $x^2+y^2=2z,z=2$,若从 $z$ 轴正向看去,这个圆周取逆时针方向.

**12.** 计算 $I=\iint_\Sigma z\,dS,\Sigma:x^2+y^2+z^2=R^2$.

**13.** 计算 $I=\iint_\Sigma \frac{e^x}{\sqrt{y^2+z^2}}dydz$,$\Sigma$ 为锥面 $x^2-y^2-z^2=0$ 及平面 $x=1,x=2$ 所围立体的外侧.

**14.** 求 $u=u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 在 $P(3,4,5)$ 处沿曲线

$$\begin{cases}2x^2+2y^2-z^2=25\\x^2+y^2=z^2\end{cases}$$

在 $P(3,4,5)$ 处的切线方向的方向导数.

## 参 考 答 案

**1.** $-4$. **2.** $e^2-\frac{7}{2}$. **3.** $\frac{135}{2}\pi$. **4.** $(a_2-b_1)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)+2a_3$. **5.** $\pi$.

**6.** $\frac{1}{|a-c|}-\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}(a\neq c)$. **7.** $3\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **8.** $9+\frac{15}{4}\ln 5$.

**9.** $ms+\Phi(y_2)e^{x_2}-\Phi(y_1)e^{x_1}-\frac{m}{2}(y_2-y_1)\cdot(x_2+x_1)-m(y_2-y_1)+(mx_1y_2-my_1x_2)$.

**10.** $\frac{\pi}{8}(a-b)^3$ **11.** $-20\pi$ **12.** 0 **13.** $2\pi e^2$.

**14.** 略.

# 第十三章　函数方程与不等式证明

## 第1节　函　数　方　程

### 一、利用函数表示法与用何字母表示无关的"特性"求解方程

【例 13.1】设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

【解】令 $\frac{1}{x}=t, x=\frac{1}{t}$，则 $f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$.

故
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\quad(x\neq 0).$$

【例 13.2】设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 $a,b,c$ 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求解 $f(x)$ 并证明它是奇函数.

【解】
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$$

令 $x=\frac{1}{t}$，则原式 $\Rightarrow af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$，

即
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

由上述联立的方程组，得
$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

又因为 $f(-x)=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

【例 13.3】设 $f(x)$ 满足关系式
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x),(a^2\neq 1)$$
其中 $\varphi(x)$ 当 $x\neq 1$ 时是有定义的已知函数，求 $f(x)$.

【解】
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x),$$

令 $t=\frac{x}{x-1}$，则 $x=\frac{t}{t-1}$

$$\Rightarrow\quad f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right),$$

即
$$f(x)=af\left(\frac{x}{x-1}\right)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

解由上述等式联立的方程组，得

$$f(x)=\frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right].$$

## 二、利用极限求解函数方程

**【例 13.4】** 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界，且满足方程 $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$，求 $f(x)$.

**【解】**

$$f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2,$$

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)-\frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right)=\frac{1}{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)^2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^2,$$

将以上诸式相加，得

$$f(x)-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=x^2\left[1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{3(n-1)}}\right]$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+x^2\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}\left[1-\left(\frac{1}{2^3}\right)^n\right].$$

因为当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2^n}\to 0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界，

所以

$$f(x)=x^2\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{8}{7}x^2.$$

**【例 13.5】** 设 $f(x)$ 为多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$，求 $f(x)$.

**【解】** 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$，可知应设 $f(x)=2x^3+x^2+bx+c$.

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$，可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x^3+x^2+bx+c)=0$，

可得 $c=0$.

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+bx}{x}=b=3,$$

故

$$f(x)=2x^3+x^2+3x.$$

**【例 13.6】** 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$.

**【解】** 由

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}-1\right]}=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hf(x)}}=e^{\frac{x}{f(x)}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}}$$

$$=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}},$$

得 $e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}=e^{\frac{1}{x}}$，

即 $$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2},\ln f(x)=-\frac{1}{x}+\ln C,$$

得 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，　得 $C=1$，故 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

## 三、利用导数的定义求解方程

**【例 13.7】** 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f'(0)$ 存在，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，求 $f(x)$.

**【解】** 由于 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，　①

令 $y=0$，则 $f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$. 由 ① 可得

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x,$$

对 $y\to0$ 时，对上式取极限，于是有

$$f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\left(\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x\right)=f'(0)+2x,$$

即 $f'(x)=f'(0)+2x$.

积分得　$f(x)=f'(0)x+x^2+C$.

将 $f(0)=0$ 代入上式 $\Rightarrow C=0$，故 $f(x)=f'(0)x+x^2$.

## 四、利用变上限积分的可导性求解方程

**【例 13.8】** 求满足下列方程

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \text{ 的可微函数 } f(x).$$

**提示** 对抽象的复合函数，在运算之前一定要做变量替换使其成为 $f(u)$ 这种形式.

**【解】** 因为 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 }u=x-t}\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

所以原方程 $\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

两边对 $x$ 求导，得

$$f(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,\quad ②$$

再对 $x$ 求导，得 $f'(x)=f(x)$，积分得 $f(x)=Ce^x$.

又由 ② 可得，$f(0)=1$，代入上式 $\Rightarrow C=1$，于是所求函数为 $f(x)=e^x$.

**【例 13.9】** 已知 $\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=nf(x)$，且 $f'(x)$ 存在，求解 $f(x)$.

**【解】** 因为 $\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a\xlongequal{\text{令 }u=ax}\int_0^x f(u)\frac{\mathrm{d}u}{x}$，所以原方程 $\Rightarrow\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=nxf(x)$.

两边对 $x$ 求导，得 $f(x)=nf(x)+nxf'(x)$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-n}{nx},\Rightarrow\ln f(x)=\frac{1-n}{n}\ln x+\ln C,$$

故 $$f(x)=Cx^{\frac{1-n}{n}}.$$

**【例 13.10】** 设对于在 $x>0$ 上可微的函数 $f(x)$ 及其反函数 $g(x)$，满足方程

$$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8),$$

求解 $f(x)$.

【解】方程两边对 $x$ 求导，得 $g[f(x)]\cdot f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$，即

$$xf'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

当 $x > 0$ 时，有 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$，积分得

$$f(x) = \sqrt{x} + C,$$

又当 $f(x) = 0$ 时，$x^{\frac{3}{2}} - 8 = 0, x = 4$，即 $f(4) = 0, C = -2$，所以 $f(x) = \sqrt{x} - 2$.

【例 13.11】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续导数，且满足

$$f(t) = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + t^4,\text{求 } f(x).$$

【解】显然 $f(0) = 0$，因为 $f(t)$ 为偶函数，因此只需求出 $t > 0$ 时 $f(t)$ 的表达式.

当 $t \geqslant 0$ 时，$f(t) = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t \rho^3 f(\rho)\mathrm{d}\rho + t^4 = 4\pi\int_0^t \rho^3 f(\rho)\mathrm{d}\rho + t^4$,

$$f'(t) = 4\pi t^3 f(t) + 4t^3.$$

解出满足初值条件 $f(0) = 0$ 的一阶线性方程，得

$$f(t) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4} - 1)(t \geqslant 0),$$

故在 $(-\infty, +\infty)$ 内，
$$f(x) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4} - 1).$$

## 五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解

【例 13.12】已知 $f(x)$ 是连续函数且满足方程

$$f(x) = 3x - \sqrt{1 - x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x,\text{求 } f(x).$$

【解】令 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = l$，则 $f(x) = 3x - \sqrt{1 - x^2}\, l$,

$$f^2(x) = 9x^2 + l^2 - l^2x^2 - 6lx\sqrt{1 - x^2},$$

于是 $l = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (9x^2 + l^2 - l^2x^2 - 6lx\sqrt{1 - x^2})\mathrm{d}x = 3 + \frac{2}{3}l^2 - 2l$

$$\Rightarrow 2l^2 - 9l + 9 = 0 \quad\Rightarrow\quad l_1 = 3, l_2 = \frac{3}{2},$$

故
$$f(x) = 3x - 3\sqrt{1 - x^2} \quad\text{及}\quad f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1 - x^2}.$$

【例 13.13】设 $f(u)$ 在 $(-\infty < u < +\infty)$ 内可导，且 $f(0) = 0$,

又 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$，求 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的表达式.

【解】令 $\ln x = t$，则 $x = \mathrm{e}^t$,

$$f'(t)=\begin{cases}1, & 0<e^t\leqslant 1\\ e^{\frac{1}{2}t}, & e^t>1\end{cases}=\begin{cases}1, & t\leqslant 0\\ e^{\frac{1}{2}t}, & t>0\end{cases}.$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$f(t)=t+C_1$，当 $t>0$ 时，$f(t)=2e^{\frac{1}{2}t}+C_2$，

由原函数的连续性有

$$\lim_{t\to 0}f(t)=C_1,\quad \lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{t\to 0^+}(2e^{\frac{1}{2}t}+C_2)=2+C_2,$$

又 $f(0)=0$，所以 $C_1=0=2+C_2\Rightarrow C_1=0, C_2=-2$，

故 $$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ 2e^{\frac{1}{2}x}-2, & x>0.\end{cases}$$

## 六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$

### 1. 含有导数条件的函数方程的求解

**【例 13.14】** 设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 确定，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，

且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.

**【分析】** 根据参数方程的求导公式和已知条件联立建立微分方程，然后求解即得.

**【解】** 由题设可得 $\begin{cases}x'=2+2t\\ y'=\psi'(t)\end{cases}$，

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

又 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，所以

$$\frac{3}{4(1+t)}=\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

即 $\dfrac{\psi''(t)(1+t)-\psi'(t)}{(1+t)^2}=3$，即 $\left[\dfrac{\psi'(t)}{1+t}\right]'=3$，两边积分得

$$\frac{\psi'(t)}{1+t}=3t+C_1\Rightarrow\psi'(t)=3t(1+t)+C_1(1+t),$$

两边再次积分得 $$\psi(t)=t^3+\frac{1}{2}(3+C_1)t^2+C_1t+C_2.$$

将 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$ 代入上两式得 $C_1=0, C_2=0$，于是

$$\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2.$$

### 2. 含有偏导数条件的函数方程的求解

**【例 13.15】** 设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f$ 二阶可导，且 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$，求 $f(x)$（其中 $a>0$，$b>0$）.

**【解】** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+xf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+2yf'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{y}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)+2f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2f'\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} + 2f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right).$$

因为$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a} = -by^2$，所以$-\frac{y}{a^2}f''\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{2a}{y^2}f''\left(\frac{a}{y}\right) = -by^2$.

令$\frac{y}{a} = u$，则

$$\Rightarrow \frac{u}{a}f''(u) + \frac{2}{au^2}f''\left(\frac{1}{u}\right) = a^2bu^2,$$

$$u^3f''(u) + 2f''\left(\frac{1}{u}\right) = a^3bu^4. \quad ③$$

再令$\frac{1}{u} = t$，即$u = \frac{1}{t}$，

$$\frac{1}{t^3}f''\left(\frac{1}{t}\right) + 2f''(t) = a^3b\frac{1}{t^4}, \Rightarrow 2u^3f''(u) + f''\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{a^3b}{u}. \quad ④$$

解联立方程组 ③,④ 得

$$f''(u) = -\frac{1}{3}a^3bu + \frac{2}{3}a^3b\frac{1}{u^4},$$

$$f'(u) = -\frac{1}{6}a^3bu^2 - \frac{2}{9}a^3bu^{-3} + C_1,$$

$$f(u) = -\frac{1}{18}a^3bu^3 + \frac{1}{9}a^3bu^{-2} + C_1u + C_2,$$

故

$$f(x) = -\frac{1}{18}a^3bx^3 + \frac{1}{9}a^3bx^{-2} + C_1x + C_2.$$

**【例 13.16】**设$u = u(\sqrt{x^2+y^2})$具有连续的二阶偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2$，试求函数$u$的表达式.

**【解】**令$r = \sqrt{x^2+y^2}$，则$u = u(r)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{r}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{r - x\cdot\frac{x}{r}}{r^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{x}{r}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r},$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{y}{r}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

于是

$$左式 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + u = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + u,$$

原方程$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + u = r^2$， ⑤

特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm\mathrm{i}$,

非齐次方程的一个特解 $u^* = \frac{1}{D^2+1}r^2 = (1-D^2)r^2 = r^2 - 2$,

故,方程 ⑤ 的通解为

$$
\begin{aligned}
u &= C_1\cos r + C_2\sin r + r^2 - 2 \\
&= C_1\cos\sqrt{x^2+y^2} + C_2\sin\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 - 2.
\end{aligned}
$$

### 3. 满足全微分方程(或曲线积分与路径无关)条件$\left(\text{即}\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$的函数方程求解*

**【例 13.17】** 设函数 $Q(x,y)$ 在 $xOy$ 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分$\int_L 2xy\,dx + Q(x,y)dy$ 与路径无关,并对任意 $t$ 恒有

$$
\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx + Q(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx + Q(x,y)dy, \text{求 } Q(x,y).
$$

**【解】** 由曲线积分与路径无关的条件有

$$
\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{即}\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,
$$

$$
\Rightarrow\quad Q(x,y) = x^2 + C(y), \text{其中 } C(y) \text{ 为待定函数}.
$$

又

$$
\begin{aligned}
\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx + Q(x,y)dy &= \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx + [x^2 + C(y)]dy \\
&= \int_0^t 2x\cdot 0\,dx + \int_0^1 [t^2 + C(y)]dy = t^2 + \int_0^1 C(y)dy,
\end{aligned}
$$

$$
\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx + Q(x,y)dy = \int_0^t [1^2 + C(y)]dy = t + \int_0^t C(y)dy,
$$

由题设条件有

$$
t^2 + \int_0^1 C(y)dy = t + \int_0^t C(y)dy,
$$

两边对 $t$ 求导,得

$2t = 1 + C(t), \Rightarrow C(t) = 2t - 1$,从而 $C(y) = 2y - 1$,

故 $$Q(x,y) = x^2 + 2y - 1.$$

**【例 13.18】** 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数,$f(0) = 0, f'(0) = 1$,且$[xy(x+y) - f(x)y]dx + [f'(x) + x^2y]dy = 0$ 为一个全微分方程,求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

**【解】** 方程为全微分方程的充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

即 $x^2 + 2xy - f(x) = f''(x) + 2xy \Rightarrow f''(x) + f(x) = x^2$,

特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$,非齐次方程的一个特解为

$$
f^*(x) = \frac{1}{D^2+1}x^2 = (1-D^2)x^2 = x^2 - 2,
$$

故 $$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2.$$

将 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 代入求出 $C_1 = 2, C_2 = 1$,

于是 $$f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2.$$

原方程 $\Rightarrow [xy^2 - (2\cos x + \sin x)y + 2y]dx + (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2y)dy = 0$,利用分项组合法

$$
(xy^2dx + x^2ydy) + d[(-2\sin x + \cos x)y] + 2(xdy + ydx) = 0
$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2y^2) + \mathrm{d}[(-2\sin x + \cos x)y] + 2\mathrm{d}(xy) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2y^2 + (-2\sin x + \cos x)y + 2xy = C.$$

**【例 13.19】** 求具有连续二阶导数的函数 $f(x)$，使

$$\oint_L (\ln x - f'(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y = 0,$$

其中 $L$ 为 $xOy$ 平面上第一象限内任一光滑闭曲线，且 $f(1) = f'(1) = 0$.

**【解】** 因为 $L$ 为 $xOy$ 平面上第一象限内的任一光滑闭曲线，又

$$\oint_L (\ln x - f'(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y = 0,$$

于是，该曲线积分与路径无关，因而

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{[\ln x - f'(x)]\frac{y}{x}\right\} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(f'(x)),$$

即
$$\frac{\ln x - f'(x)}{x} \equiv f''(x),$$

$$\Rightarrow xf''(x) = \ln x - f'(x),$$

$$\Rightarrow x^2f''(x) + xf'(x) = x\ln x \qquad \text{——欧拉方程.}$$

于是，令 $x = \mathrm{e}^t, t = \ln x$，有

$$[\mathrm{D}(\mathrm{D}-1) + \mathrm{D}]f = t\mathrm{e}^t,$$

$$\mathrm{D}^2 f = t\mathrm{e}^t,$$

特征方程为 $\lambda^2 = 0, \lambda_{1,2} = 0$.

设 $f^*$ 为非齐次方程的一个特解，则

$$f^* = \frac{1}{\mathrm{D}^2}t\mathrm{e}^t = (t-2)\mathrm{e}^t,$$

故，欧拉方程的通解为 $f = C_1 + C_2 t + (t-2)\mathrm{e}^t$，

于是 $f(x) = C_1 + C_2\ln x + (\ln x - 2)x$，

将 $f(1) = f'(1) = 0$ 代入，得 $C_1 = 2, C_2 = 1$，故

$$f(x) = 2 + \ln x + (\ln x - 2)x.$$

## 第 2 节　不等式的证明

不等式的证明方法很多，这里仅讲几种常用的方法.

### 一、引入参数法

#### 1. 判别式法（适用于积分式中含有 $f^2(x)$ 或 $f'^2(x)$ 的情形）

**【例 13.20】** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，$f(a) = f(b) = 0$，且 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 1$，证明

$$\left\{\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x\right\}\left[\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x\right] > \frac{1}{4}.$$

**【证】** 引入参数 $t$，考查 $f'(x) + txf(x)$.

由题设知，上式在 $[a,b]$ 上对任何实数 $t$ 都不能恒为“0”，事实上，若不然，假设有实数 $t$，

使得

$$f'(x)+txf(x)\equiv 0,$$

于是求得方程的通解为 $f(x)=Ce^{-\frac{t}{2}x^2}$.

由 $f(a)=f(b)=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$,因此,$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$.

与假设$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$矛盾,故$[f'(x)+txf(x)^2]>0$,

于是 $\int_a^b[f'(x)+txf(x))]^2\mathrm{d}x>0$,

即 $$t^2\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x>0.$$

因为 $t^2$ 的系数$\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x\neq 0$,所以关于 $t$ 的二次三项式的判别式必小于零.即

$$4\left[\int_a^b x^2f_2(x)\mathrm{d}x\right]\left\{\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right\}-\left[2\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right]^2>0,$$

亦即 $$\left\{\int_a^b[f'(x)^2\mathrm{d}x]\right\}\left[\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x\right]>\left[\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\int_a^b x\mathrm{d}[f^2(x)]\right\}^2=\left[\frac{x}{2}f^2(x)\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

**2. 利用三角函数法(适用于函数的绝对值小于 1 的情形)**

**【例 13.21】**设函数 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$内可积,且$|f(x)|<1$,$|g(x)|<1$,试证

$$\int_a^b\{f(x)g(x)\pm\sqrt{[1-f^2(x)][1-g^2(x)]}\}\mathrm{d}x\leqslant b-a.$$

**【解】**因为$|f(x)|<1$,$|g(x)|<1$,

所以可令 $f(x)=\sin u,g(x)=\sin v$,于是

$$\begin{aligned}&|f(x)g(x)\pm\sqrt{(1-f^2(x))(1-g^2(x))}|\\&=|\sin u\sin v\pm\sqrt{(1-\sin^2u)(1-\sin v)}|\\&=|\sin u\sin v\pm\cos u\cos v|=|\cos(u\pm v)|\leqslant 1,\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}&\int_a^b[f(x)g(x)\pm\sqrt{(1-f^2(x))(1-g^2(x))}]\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b|f(x)g(x)\pm\sqrt{(1-f^2(x))(1-g^2(x))}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b\mathrm{d}x=b-a.\end{aligned}$$

## 二、利用微分中值定理

**提示** 该法适用于:经过简单变形,不等式的一端可写成$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$或$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$,或欲证命题是区间内"至少"一点 $\xi$(或 $x_0$)使命题成立.

证题程序:

(1) 在$[a,b]$上由题意作两函数 $f(t),g(t)$;

(2) 写出微分中值公式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\quad 或 \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};$$

(3) 根据需要对 $f'(\xi),g'(\xi)$ 进行放缩.

**【例 13.22】** 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内可导,且 $f(a)=f(b)$,证明在 $(a,b)$ 内至少存在一个 $\xi$,使 $f'(\xi)>0$.

**【证】** 因为 $f(a)=f(b)$ 且 $f(x)$ 不恒为常数,

所以至少存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)\neq f(a)=f(b)$.

不妨设 $f(c)>f(a)=f(b)$,显然 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上满足拉格朗日定理条件,于是至少存在一个 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

同理可证 $f(c)<f(a)=f(b)$ 的情形.

**【例 13.23】** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内二阶可导,且 $f(a)=f(b)=0,f(c)>0$, $a<c<b$,则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)<0$.

**【证】** 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理条件,可知存在一个 $\eta_1\in(a,c)$ 使得

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\eta_1),$$

又因为 $f(c)>0,f(a)=0,c-a>0$,所以 $f'(\eta_1)>0,\eta_1\in(a,c)$,

同理有
$$f'(\eta_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

因为 $f(c)>0,f(b)=0,b-c>0$,所以 $f'(\eta_2)<0,\eta_2\in(c,b)$

又因为 $f'(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上连续,在 $(\eta_1,\eta_2)$ 可导,再由拉格朗日定理知存在一个 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$,使

$$\frac{f'(\eta_2)-f'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=f''(\xi),$$

因为 $f'(\eta_2)-f'(\eta_1)<0,\eta_2-\eta_1>0$,所以 $f''(\xi)<0$.

**【例 13.24】** 证明:当 $x>0$ 时,证明:$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

**【分析】** 因为 $x>0$,所以 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1}<1$. 因此可用拉格朗日中值定理证.

**【证】** 令 $f(x)=\ln t$,当 $x>0$ 时,显然它在 $[1,1+x]$ 满足拉格朗日中值定理的条件,于是 $\exists\xi\in(1,1+x)$ 使

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1}=\frac{1}{\xi},1<\xi<1+x,$$

因为
$$\ln(1+x)-\ln 1=\ln(1+x),\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi}<1,$$

所以
$$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1,即\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

**【例 13.25】** 设 $a>\mathrm{e},0<x<y<\frac{\pi}{2}$,求证:$a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a$.

**【分析】** 原不等式等价于

$$\frac{a^y - a^x}{\cos y - \cos x} < -a^x \ln a,$$

由不等式左端的形式可知，用柯西中值定理证明命题可能会成功.

【证】令 $f(t) = a^t, g(t) = \cos t$，由题设条件可知，$f(t), g(t)$ 在 $[x, y](0 < x < y)$ 上满足柯西中值定理条件，于是有

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即 $$\frac{a^x - a^y}{\cos x - \cos y} = \frac{a^\xi \ln a}{-\sin\xi}, 0 < x < \xi < y < \frac{\pi}{2},$$ 故

$$a^y - a^x = (\cos x - \cos y) a^\xi \ln a \cdot \frac{1}{\sin\xi} > (\cos x - \cos y) a^\xi \ln a > (\cos x - \cos y) a^x \ln a.$$

【例 13.26】设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$，且 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实常数，试证：

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

【证】

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx, f(0) = 0,$$

$$f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx.$$

显然 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 或 $[x, 0]$ 上满足拉格朗日定理的条件，于是有 $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$，$\xi$ 在 0 与 $x$ 之间.

因此，$|f(x)| = |x||f'(\xi)|$

$$= |x||a_1 \cos\xi + 2a_2 \cos 2\xi + \cdots + na_n \cos n\xi|,$$

即 $$|a_1 \cos\xi + 2a_2 \cos 2\xi + \cdots + na_n \cos n\xi| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \frac{|\sin x|}{|x|},$$

两边取 $x \to 0$ 的极限，因为 $\xi$ 在 0 与 $x$ 之间，所以当 $x \to 0$ 时，$\xi \to 0$，故

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant \lim_{x \to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

【例 13.27】设 $f''(x) < 0, f(0) = 0$，证明：对任何 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 有

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

【分析】因为 $f(x)$ 可导，又 $f(0) = 0$，可知一定可用拉格朗日中值定理证明.

【证】由拉格朗日中值定理有

$$f(x_1) = f(x_1) - f(0) = x_1 f'(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < x_1,$$

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) = x_1 f'(\xi_2), x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2,$$

不妨设 $x_1 \leqslant x_2$，从而 $\xi_1 < \xi_2$，因为 $f''(x) < 0$，所以 $f'(x)$“↘”，又因为 $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$，

故 $$f(x_1 + x_2) - f(x_2) < x_1 f'(\xi_1) = f(x_1),$$

即 $$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

## 三、利用函数的单调增减性(重点)

提示 该法适用于某区间上成立的函数不等式，对于数值不等式通常是通过做辅助函数完成的.

证题程序：

(1) 移项(有时需要作简单的恒等变形)，使不等式一端为“0”，另一端即为所作辅助函数 $f(x)$；

(2) 求 $f'(x)$ 并验证 $f(x)$ 在指定区间的增减性；

(3) 求出区间端点的函数值(或极限值)，作比较即得所证.

**文字不等式的证明方法：**

将其转化为函数不等式，然后再利用函数的单调增减性证明.

转为函数不等式的具体作法如下：

利用观察法，观察文字(如 $a,b$) 出现的次数，若哪个大于或等于 2，则将该文字设为 $x$，则文字不等式就转化为了函数不等式.

**【例 13.28】** 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

**【证】** 只证 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$. 显然 $\sin x>\frac{2}{\pi}x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$. 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$.

因为 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$，(因为 $\tan x>x$)

所以 $f(x)$“↘”，又 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$，

故，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

即 $\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}>0$. 于是 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$.

**【例 13.29】** 已知 $\alpha\in(-1,+\infty)$，$t$ 在 0 与 $\alpha$ 之间，求证：$\left|\frac{\alpha-t}{1+t}\right|\leqslant|\alpha|$.

**【证】** 令 $f(t)=\frac{\alpha-t}{1+t}-\alpha$，

因为 $f'(t)=\frac{-1-\alpha}{(1+t)^2}<0$，所以 $f(t)$“↘”. 且 $f(0)=0$，$f(\alpha)=-\alpha$，

所以 $-\alpha\leqslant\frac{\alpha-t}{1+t}-\alpha\leqslant 0$，或 $0\leqslant\frac{\alpha-t}{1+t}-\alpha\leqslant-\alpha$.

即 $0\leqslant\frac{\alpha-t}{1+t}\leqslant\alpha$，或 $\alpha\leqslant\frac{\alpha-t}{1+t}\leqslant 0$，故 $\left|\frac{\alpha-t}{1+t}\right|\leqslant|\alpha|$.

**【例 13.30】** 设 $f(x)$，$g(x)$ 二阶可导，当 $x>0$ 时，$f''(x)>g''(x)$ 且 $f(0)=g(0)$，$f'(0)=g'(0)$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>g(x)$.

**【证】** 令

$$F(x)=f(x)-g(x),$$
$$F'(x)=f'(x)-g'(x),$$
$$F''(x)=f''(x)-g''(x).$$

因为当 $x>0$ 时，$f''(x)>g''(x)$，所以当 $x>0$ 时，$F''(x)>0$，即 $F'(x)$ 单调递增.

又 $f'(0)=g'(0)$，即 $F'(0)=0$. 所以 $F'(x)>F'(0)=0$，因之 $F(x)$ 单调递增.

又因为 $f(0)=g(0)$，即 $F(0)=0$，故 $F(x)>F(0)=0$.

即 $f(x)-g(x)>0$，亦即 $f(x)>g(x)$.

**【例 13.31】** 证明：当 $x>0$ 时，$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

**【证】** 令 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}$.  因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 单调递减.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$,

所以当 $x > 0$ 时,$f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} > 0$,即 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

【例 13.32】设 $b > a > 0$,证明:$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$.

提示 一般地讲,文字不等式的证明是化为函数不等式,通过函数的单调性来得出结果.

【分析】当 $b > a > 0$ 时,$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b} \iff (\ln b - \ln a)(a+b) > 2(b-a)$. 令 $b = x$.

【证】令 $f(x) = (\ln x - \ln a)(a+x) - 2(x-a)$,$(x \geqslant a)$

因为 $f'(x) = \frac{1}{x}(a+x) + (\ln x - \ln a) - 2$, $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2} \geqslant 0$,$(x \geqslant a)$

所以 $f'(x)$"↗". 又 $f'(a) = 0$,于是 $f'(x) \geqslant 0$,$(x \geqslant a)$.

因而 $f(x)$"↗",又 $f(a) = 0$,故当 $b > a > 0$ 时,有 $f(b) > f(a) = 0$.

即 $(\ln b - \ln a)(a+b) - 2(b-a) > 0$,

亦即
$$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}.$$

凡涉及积分不等式的命题,读者可见第四章.

【例 13.33】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x) > 0$,证明:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

【证】令 $b = x$,作辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t - (x-a)^2$,于是

$$F'(x) = f(x)\int_a^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t + \frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - 2(x-a)$$
$$= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)}\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)}\mathrm{d}t - \int_a^x 2\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^x \left[\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2\right]\mathrm{d}t \geqslant 0. \left[\text{因为 } f(x) > 0\text{,所以}\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geqslant 2\right].$$

所以 $F(x)$ 单调增加,于是,

当 $b \geqslant a$ 时,有 $F(b) \geqslant F(a) = 0$,即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

## 四、利用函数的极值与最值

提示 适用范围也是在某区间上成立的不等式,证明的方法基本上与第三部分所讲相似,不过这里与所作的辅助函数 $F(x)$ 比较的不是函数的端点值,而是极值与最值.

【例 13.34】设 $0 \leqslant x \leqslant 1$,$p > 1$,证明不等式:
$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

【证】令 $F(x) = x^p + (1-x)^p$,

$F'(x) = px^{p-1} + p(1-x)^{p-1}(-1) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$,

$$F''(x) = p(p-1)x^{p-2} + p(p-1)(1-x)^{p-2}.$$

令 $F'(x) = 0$,得 $x = \frac{1}{2}$,

$$F''\left(\frac{1}{2}\right) = p(p-1)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-2}\right] > 0,(因为\ p > 1)$$

故,$F(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取极小值.

因为
$$F(1) = F(0) = 1, F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}},$$

所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值为 1,最小值为 $\frac{1}{2^{p-1}}$,

故
$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

**【例 13.35】**试证:若 $m > 0, n > 0$,则

$$x^m(a-x)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n},$$

**【证】**令 $F(x) = x^m(a-x)^n$,

$$F'(x) = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1},$$
$$F''(x) = m(m-1)x^{m-2}(a-x)^n - 2mnx^{m-1}(a-x)^{n-1} + n(n-1)x^m(a-x)^{n-2}.$$

令 $F'(x) = 0$,得 $x = \frac{ma}{m+n}$,

因为
$$F''\left(\frac{ma}{m+n}\right) = m(m-1)\left(\frac{ma}{m+n}\right)^{m-2}\left(\frac{na}{m+n}\right) - 2mn\left(\frac{ma}{m+n}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{m+n}\right)^{n-1} + n(n-1)\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\left(\frac{na}{m+n}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{-m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}} < 0,$$

所以 $F\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 是 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的极大值,因为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上只有唯一的一个极大值,所以 $F\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 最大.

故,$F(x) \leqslant F\left(\frac{ma}{m+n}\right)$,即 $x^m(a-x)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$.

**【例 13.36】**求证:若 $x, y, z$ 为满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 的正数,则

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

**【证】**令 $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 8)$,

$$解联立方程组\begin{cases} F'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 3y^2 + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 3z^2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8, \end{cases}$$

得 $x = y = z = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$,由题意可知驻点为 $P\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$,

$$F''_{x^2}|_P=(6x+2\lambda)|_P=3x|_P=2\sqrt{6},$$

$$F''_{y^2}|_P=2\sqrt{6},F''_{z^2}|_P=2\sqrt{6},F''_{xy}=F''_{xz}=F''_{yz}=0,$$

因为 $d^2F|_P=F''_{x^2}|_P dx^2+F''_{y^2}|_P dy^2+F''_{z^2}|_P dz^2>0$,

所以 $W=x^3+y^3+z^3$ 在 $P\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ 处取极小值,由于极小值唯一,即为最小值

故 $$(x^3+y^3+z^3)|_P=3\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3=16\sqrt{\frac{2}{3}}\leqslant x^3+y^3+z^3.$$

## 五、利用函数图形的凹凸性

**【例 13.37】** 利用函数图形的凹凸的定义,证明下列不等式:

(1) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$;

(2) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2},(x>0,y>0,x\neq y)$.

**【证】** (1) 令 $f(t)=e^t$,

因为 $f''(t)=e^t>0$,

所以 $f(t)=e^t$ 在 $(x,y)$ 或 $(y,x)$ 区间内是凹的,

于是 $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$,即 $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$.

(2) 令 $f(t)=t\ln t,(t>0)$

$$f'(t)=\ln t+1,f''(t)=\frac{1}{t}>0.$$

故 $f(t)=t\ln t$ 在 $(x,y)$ 或 $(y,x)$,$x>0,y>0$ 是凹的,于是

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即 $$\frac{1}{2}[x\ln x+y\ln y]>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

亦即 $$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

## 六、利用泰勒展开式

**提示** 该法适用于题设中函数 $f(x)$ 具有二阶和二阶以上可导,且最高阶导数的大小或上下界可知的命题.

**证题程序:**

(1) 写出比最高阶导数低一阶的函数的泰勒展开式;

(2) 恰当选择等式两边 $x$ 与 $x_0$(不要认为展开点一定以 $x_0$ 为最合适,有时以 $x$ 为佳);

(3) 根据所给的最高阶导数的大小或界对展开式进行放缩.

**【例 13.38】** 设 $\varphi(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内二阶可导,且 $\varphi''(x)\geqslant 0$,则

$$\varphi\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1\varphi(x_1)+p_2\varphi(x_2)+\cdots+p_n\varphi(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 均为正数,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$.

【证】令 $x_0=\dfrac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$,

由于 $\varphi(x)$ 在 $(a,b)$ 内二阶可导,因此 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处可展成一阶泰勒公式:

$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{\varphi''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$,$\xi$ 在 $x$ 与 $x_0$ 之间.

因为 $\qquad \varphi''(x)\geqslant 0,x\in(a,b)$,所以 $\varphi''(\xi)\geqslant 0$,

于是 $\qquad \varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)$.

分别令 $x$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,同时分别乘以正数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 得

$$p_1\varphi(x_1)\geqslant p_1\varphi(x_0)+p_1\varphi'(x_0)(x_1-x_0),$$
$$p_2\varphi(x_2)\geqslant p_2\varphi(x_0)+p_2\varphi'(x_0)(x_2-x_0),$$
$$\vdots$$
$$p_n\varphi(x_n)\geqslant p_n\varphi(x_0)+p_n\varphi'(x_0)(x_n-x_0).$$

将以上几个不等式左右分别相加得

$p_1\varphi(x_1)+p_2\varphi(x_2)+\cdots+p_n\varphi(x_n)\geqslant(p_1+p_2+\cdots+p_n)\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)[(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)-x_0(p_1+p_2+\cdots+p_n)]=(p_1+p_2+\cdots+p_n)\varphi(x_0)$,(因为 $x_0=\dfrac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$,最后一项为零).

故 $\quad \varphi\left(\dfrac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\leqslant\dfrac{p_1\varphi(x_1)+p_2\varphi(x_2)+\cdots+p_n\varphi(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$.

**【例 13.39】**设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$, 证明 $f(x)>x.(x\neq0)$

【证】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,可知 $f(0)=0$. 又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$.

因为 $f(x)$ 二阶可导,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可展成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{x^2}{2!}f''(\xi),$$

由于 $f''(x)>0$,所以 $f''(\xi)>0$,于是

$$f(x)>f(0)+f'(0)x=x,$$

即 $f(x)>x$.

**【例 13.40】**设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续,$f(0)=f(1)=0$,并且当 $x\in(0,1)$ 时,$|f''(x)|\leqslant A$,求证:$|f'(x)|\leqslant\dfrac{A}{2}$,$x\in[0,1]$.

【证】因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数,所以 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式.

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$,$\xi$ 在 $x$ 与 $x_0$ 之间,

取 $x=0,x_0=x$,则泰勒公式为

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},0<\xi_1<x\leqslant1 \qquad ①$$

取 $x=1,x_0=x$,则泰勒公式为

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)\cdot\frac{(1-x)^2}{2!},0<\xi_2<x\leqslant1 \qquad ②$$

② − ① 得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$=\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2][\text{因为 } f(1)=f(0)=0],$$

又因为 $|f''(x)|\leqslant A,\quad x\in(0,1)$,

所以
$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1),$$

但当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$2x^2-2x+1\leqslant 1$,故 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

## 七、杂例

**【例 13.41】** 证明不等式:$\ln(\prod_{i=1}^{n-1}i^i)\leqslant\int_2^n x\ln x\mathrm{d}x\leqslant\frac{n^2}{2}\ln n-\frac{n^2}{4}+1$.

**【证】** 先证
$$\int_2^n x\ln x\mathrm{d}x\leqslant\frac{n^2}{2}\ln n-\frac{n^2}{4}+1.$$

由分部积分法有

$$\int_2^n x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_2^n-\int_2^n\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_2^n=\frac{n^2}{2}\ln n-2\ln 2-\frac{n^2}{4}+1<\frac{n^2}{2}\ln n-\frac{n^2}{4}+1.$$

再证 $\ln(\prod_{i=1}^{n-1}i^i)\leqslant\int_2^n x\ln x\mathrm{d}x$.

因为
$$\ln(\prod_{i=1}^{n-1}i^i)=\ln[1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot(n-1)^{n-1}]$$
$$=2\ln 2+3\ln 3+\cdots+(n-1)\ln(n-1),$$

又
$$\int_2^n x\ln x\mathrm{d}x=\int_2^3 x\ln x\mathrm{d}x+\int_3^4 x\ln x\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n x\ln x\mathrm{d}x,$$

令
$$f(x)=x\ln x,f'(x)=\ln x+1>0(\text{当 } x\geqslant 2\text{ 时}),$$

可知在$[2,n]$内,$f(x)$单调递增,于是有

$$\int_2^3 x\ln x\mathrm{d}x>2\ln 2,$$

$$\int_3^4 x\ln x\mathrm{d}x>3\ln 3,$$

$$\vdots$$

$$\int_{n-1}^n x\ln x\mathrm{d}x>(n-1)\ln(n-1),$$

故 $\int_2^n x\ln x\mathrm{d}x\geqslant\ln(\prod_{i=1}^{n-1}i^i)$,(等号仅当 $n=2$ 时成立).综上所述命题得证.

**【例 13.42】** 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,求证:$\exists c,0\leqslant c\leqslant 1$,使得 $|f(c)|\geqslant 4$.

**【分析】** $|f(c)|\geqslant 4\Leftrightarrow\frac{1}{4}|f(c)|\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{1}{4}|f(c)|\geqslant\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

**【证】**
$$1=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\quad(\text{因为}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0)$$

$$=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)|f(x)|\mathrm{d}x,$$

因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,所以 $|f(x)|$ 在$[0,1]$上连续,于是必存在一个 $c,0\leqslant c\leqslant 1$,使

$$|f(c)|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

因此 $$1\leqslant|f(c)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=|f(c)|\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right]=\frac{1}{4}|f(c)|,$$

故 $|f(c)|\geqslant 4.$

**【例 13.43】** 设 $P,Q,R$ 在 $L$ 上连续,$L$ 为光滑弧段,弧长为 $l$,证明:

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\leqslant Ml,\text{其中 }M=\max_{(x,y,z)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\}.$$

**提示** 凡涉及弧的长度的曲线积分一定要化为对弧长的曲线积分.

令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}=\cos\alpha,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}=\cos\beta,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}=\cos\gamma$,则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

于是 $$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L\left(P\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\right)\mathrm{d}l$$

$$=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}l$$

$$=\int_L\{P,Q,R\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\mathrm{d}l$$

$$=\int_L\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\cos\theta\mathrm{d}l,$$

其中,$\theta$ 为矢量$\{P,Q,R\}$与$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$的夹角.

故 $$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|=\left|\int_L\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\mathrm{d}l\right|$$

$$\leqslant\int_L\sqrt{P^2+Q^2+R^2}|\cos\theta|\mathrm{d}l\leqslant M\int_L\mathrm{d}l=Ml,$$

其中,$|\cos\theta|\leqslant 1,M=\max_{(x,y,z)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\}$.

## 习 题 十 三

**1.** 证明不等式

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}\qquad(a>1,n\geqslant 1).$$

**2.** 若 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,0<p<1$,证明:

$$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p.$$

**3.** 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续导数,满足 $0<f'(x)<1$,并且 $f(0)=0$,求证:

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x.$$

**4.** 求证:$|a|^p+|b|^p\leqslant 2^{1-p}(|a|+|b|)^p,(0<p<1)$.

5. 求证：若 $x+y+z=6$，则 $x^2+y^2+z^2\geqslant 12$，其中 $x,y,z$ 皆非负.

6. 证明：

(1) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上是增加的，且其上 $f''(x)>0$，则

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(2) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上是增加的，且其上 $f''(x)<0$，则

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)f(b).$$

7. 证明：

(1) $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}<\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$；

(2) $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$.

8. 设 $f''(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}\max_{a<x<b}|f''(x)|.$$

9. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且当 $x\in[a,b]$ 时，$f''(x)<0$，试证：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x>\frac{1}{2}|f(a)+f(b)|.$$

10. 设 $x>0$. 证明：$\dfrac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$.

11. 若 $f'(x)$ 在$[0,2\pi]$上连续，且 $f'(x)\geqslant 0$，则对任意正整数 $n$，有

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2[f(2\pi)-f(0)]}{n}.$$

12. 设在$(a,b)$内 $f''(x)>0$，$a<x_1<x_2<b$，$0<\alpha<1$，试证：

$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)>f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]$.

13. 设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在光滑曲线 $c$ 上可积，$L$ 为曲线弧 $c$ 的弧长，

而 $M=\max\limits_{(x,y)\in c}\sqrt{P^2+Q^2}$，试证：$\left|\int_c P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant LM$.

14. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$f(0)=3$，且对于$[0,1]$上的一切 $x$ 和 $y$ $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$

成立，试证：$\dfrac{5}{2}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{7}{2}$.

参 考 答 案

1. 对 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$ 在$[n,n+1]$上利用拉氏定理.

2. 作 $f(x)=x^p$，$f(0)=0$，$f''(x)<0$，利用拉氏定理.

3. 作 $F(x)=[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]^2-\int_0^x[f(t)]^3\mathrm{d}t$.

$F'(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(t)]$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，

令 $g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(t)$，利用导数证明：当 $x>0$ 时，$g(x)>0$.

4. 利用凹凸性证明：作 $f(t)=t^p(t>0)$，$f''(t)=p(p-1)t^{p-2}<0$，

有
$$\frac{f(|a|)+f(|b|)}{2}\leqslant f(\frac{|a|+|b|}{2}).$$

**5.** 利用多元条件极值证明.

**6.** 利用泰勒公式证明.

**7.** 利用结论：如 $f''(x)>0$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_if(x_i)>f(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i)$；

如 $f''(x)<0$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_if(x_i)<f(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i)$，其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$.

(1) 令 $f(x)=x^2,p_i=\dfrac{1}{n}$；(2) 令 $f(x)=\ln x,p_i=\dfrac{1}{n}$，再去掉对数即可.

**8.** 先证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$，或利用泰勒公式证明.

**9.** 利用泰勒公式，有

$$f(b)=f(x)+f''(x)(b-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2<f(x)+f'(x)(b-x),$$

两边对 $x$ 积分，

$$\begin{aligned}(b-a)f(b)&<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)(b-x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(x)(b-x)\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(a)(b-a),\end{aligned}$$

所以，$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|>\left|(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right|=(b-a)\dfrac{|f(a)+f(b)|}{2}$.

**10.** 令 $x=\dfrac{1}{t}$，原不等式化为：$\dfrac{2t}{t+2}<\ln(t+1)<\dfrac{t}{\sqrt{t+1}}(t>0)$，作辅助函数利用单调性证明.

**11.** 利用分部积分有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x&=-\frac{1}{n}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{f(0)-f(2\pi)}{n}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因为，$f'(x)\geqslant 0$，所以，$f(2\pi)\geqslant f(0)$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|&\leqslant\frac{f(2\pi)-f(0)}{n}+\frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{f(2\pi)-f(0)}{n}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|f'(x)\cos nx|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{f(2\pi)-f(0)}{n}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{2[f(2\pi)-f(0)]}{n}.\end{aligned}$$

**12.** 利用拉氏定理证明，$f'(x)$ 单调增加，$x_1<\alpha x_1+(1-\alpha)x_2<x_2$；

(1) $f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]-f(x_1)=(1-\alpha)(x_2-x_1)f'(\xi_1)$，

(2) $f(x_2)-f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]=\alpha(x_2-x_1)f'(\xi_2)$，

$$\xi_2>\xi_1,\quad f'(\xi_2)>f'(\xi_1),$$

则 (2) 式左边乘以 $(1-\alpha)$ 大于 (1) 式左边乘以 $\alpha$，整理即得要证明的结论.

**13.** 略.

**14.** 令 $y=0$，得 $3-x\leqslant f(x)\leqslant 3+x$，两边积分即可.

# 第二篇 线性代数

## 第一章 行 列 式

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、排列与逆序

**1. n 级排列**

由 $n$ 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 $n$ 级排列. $n$ 级排列共有 $n!$ 个.

**2. 逆序**

在一个 $n$ 级排列中,如果一个较大数排在一个较小数之前,就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 或 $\tau$ 表示排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数.

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为偶数,则称它为偶排列;如果排列的逆序数为奇数,则称它为奇排列.

**3. 对称**

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,交换任意两数 $i_t$ 与 $i_s$ 的位置,称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性. 任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序,并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

**提示** 任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数可如下计算:

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后边比 $i_1$ 小的数的个数 $+ i_2$ 后边比 $i_2$ 小的数的个数 $+ \cdots +$
$i_{n-1}$ 后边比 $i_{n-1}$ 小的数的个数.

**【例 1.1】** 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1)5 3 2 1 4; (2)$n(n-1)\cdots 3\times 2\times 1$; (3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

**【解】** (1)$\tau(5\ 3\ 2\ 1\ 4) = 4+2+1+0 = 7$ 为奇排列.

(2)$\tau[n(n-1)\cdots 2\times 1] = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$,

由于 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需根据 $n$ 而定,故讨论如下:

当 $n = 4k$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n = 4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n = 4k+2$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 $k$ 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 $n$ 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序，后 $n$ 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序，只有前 $n$ 个数与后 $n$ 个数之间才构成逆序.

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

奇偶性情况与(2) 完全一致.

**【例 1.2】** 设排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 $k$，则 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为________.

**【解】** 设 $x_1x_2\cdots x_n$ 的关于 $x_1$ 的逆序为 $m_1$，则其顺序有 $(n-1)-m_1$；$x_1x_2\cdots x_n$ 的关于 $x_2$ 的逆序为 $m_2$，则其顺序有 $(n-2)-m_2$；……$x_1x_2\cdots x_n$ 的关于 $x_n$ 的逆序为 $m_n$，则其顺序有 $(n-n)-m_n$，而 $m_1+m_2+\cdots+m_n=k$，于是

$$\begin{aligned}\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)&=[(n-1)-m_1]+[(n-2)-m_2]+\cdots+[(n-n)-m_n]\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1-(m_1+m_2+\cdots+m_n)\\&=\frac{n(n-1)}{2}-k\end{aligned}$$

**【例 1.3】** 选择 $i,j,k$ 使 $21i36jk97$ 为偶排列.

**【解】** $i,j,k$ 可供选择的数字为 4,5,8，设 $i=4,j=5,k=8$

则 $\tau(214\ 365\ 897)=1+0+1+0+1+0+1+1+0=5$ 为奇排列，由交换一个 $n$ 级排列中的任何两个数字，则改变一个排列的奇偶性可知：$i=5,j=4,k=8$、$i=4,j=8,k=5$、$i=8,j=5,k=4$ 都是偶排列.

## 二、$n$ 阶行列式的定义

由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

称为 $n$ 阶行列式. 其值是所有取自不同行不同列的 $n$ 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号由 $n$ 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，对应项取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，对应项取负号，即

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中，$D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $n$ 级排列求和；$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

注 $n$ 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 $n$ 级排列.

**【例 1.4】** 填空题.

(1) 在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取________；

(2) 四阶行列式中,带负号且包含因子 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 的项为________;

(3) 如果 $n$ 阶行列式中,负项的个数为偶数,则 $n \geqslant$ ________;

(4) 如果 $n$ 阶行列式中等于零的元素个数大于 $n^2-n$,那么此行列式的值为________;

(5) 在函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中,$x^3$ 的系数是________.

**【解】**(1) 正,(2)$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$,(3)3,(4)0 (5)$-1$.

**【分析】**(1) 适当调整该项元素位置,使第一个下标按自然顺序排列,则第二个下标排列为 25134,其逆序数为 4,故取正号.或由 $\tau(13542)+\tau(21435)=6$ 也知该项符号为正.

(2) 由行列式的定义可知,包含因子 $a_{23}$ 和 $a_{31}$ 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$,其中 $i,j$ 为 2,4 或 4,2,又此项符号为负,所以 $i31j$ 为奇排列,从而 $i=4,j=2$.

(3)$n$ 阶行列式中,共有 $n!$ 项,其中正、负项各占一半,若负项的个数为偶数,必有 $n \geqslant 4$.

(4)$n$ 阶行列式中,共有 $n^2$ 个元素,若等于零的元素个数大于 $n^2-n$,那么不等于零的元素个数就小于 $n$,又 $n$ 阶行列式的每一项是 $n$ 个不同元素的乘积,所以必定为零,从而此行列式的值也为零.

(5) 根据行列式的定义,仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 四个元素相乘才能出现 $x^3$ 项,这时该项排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$,$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$,故含 $x^3$ 的项系数为 $-1$.

**【例 1.5】**选择题.

(1) 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带有正号的一项,则 $i,j$ 之值为

(A)$i=1,j=3$. (B)$i=2,j=3$.

(C)$i=1,j=2$. (D)$i=2,j=1$. 【 】

(2) 下列各项中,为某五阶行列式中带有正号的项是

(A)$a_{13}a_{44}a_{32}a_{41}a_{55}$. (B)$a_{21}a_{32}a_{41}a_{15}a_{54}$.

(C)$a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$. (D)$a_{15}a_{31}a_{22}a_{44}a_{53}$. 【 】

(3) 设 $D=|a_{ij}|$ 为 $n$ 阶行列式,则第二对角线上元素的乘积 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 在行列式中的符号为

(A) 正. (B) 负. (C)$(-1)^n$. (D)$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 【 】

**【解】**(1)C, (2)D, (3)D.

**【分析】**(1) 由行列式的定义知,每一项应取自不同行不同列的五个元素之积,因此 $i,j$ 只能取 1,2,故可立即排除(A),(B),当 $i=1,j=2$ 时,$a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}=a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}$,且 $\tau(13542)=4$ 为偶排列,故(C) 为正确答案.当 $i=2,j=1$ 时,此项应取负号,不正确.

(2)(A) 中有取自同一行的元素 $a_{44},a_{41}$;(B) 中有取自同一列的元素,均不是行列式的项,(C),(D) 虽均为五阶行列式的一项,但(C) 应取负号,故只有(D) 正确.

(3) 因为 $\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,故(D) 为正确答案.

### 三、行列式的基本性质

**性质 1** 行列式的行和列互换后,行列式的值不变.

**性质 2** 行列式的两行(列)互换,行列式改变符号.

**推 论** 如果行列式有两行(或两列)完全相同,则行列式的值等于零.

**性质 3** 数乘行列式等于用这个数乘该行列式中的某一行(或列).

**推 论** 若行列式中有一行(或列)元素全为零,则该行列式的值为零.

**性质 4** 行列式中若有两行(或两列)元素对应成比例,则该行列式的值为零.

**性质 5** 如果行列式的某一行(或列)的所有元素都可表示为两项之和,则该行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(或列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**性质 6** 将行列式某行(或列)的 $k$ 倍加到另一行(或列),其值不变.

注 (1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵,一般地

$$|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|\pm|\boldsymbol{B}|.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵,一般地 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,但 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵,则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$,请特别注意 $|k\boldsymbol{A}|\neq k|\boldsymbol{A}|$.

(4) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$,特别地,若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,则当 $n$ 为奇数时,$|\boldsymbol{A}|=0$.

**【例 1.6】** 填空题.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $3\times3$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $4\times4$ 矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=1$,$|\boldsymbol{B}|=-2$,则 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $3\times3$ 矩阵,$|\boldsymbol{A}|=-2$,把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$,其中 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 列,则 $|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=$ ________.

(3) 设 $\alpha,\beta,\gamma$ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根,则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=$ ________.

**【解】**(1) $-8$, (2) $6$, (3) $0$.

**【分析】**(1)

$$||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|^3|\boldsymbol{A}|=(-2)^3\cdot1=-8.$$

注意 $||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=(-2)\cdot1=-2$ 是错误的.

(2) 此题需要综合应用行列式的性质.

$|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=|\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|+|-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$,对于 $|-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$,第一列和最后一列对应元素成比例,故其值为零,而

$$|\boldsymbol{A}_3,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=-|\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-3|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-3|\boldsymbol{A}|=6.$$

(3) 由根与系数的关系知 $\alpha+\beta+\gamma=0$,于是

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

**【例 1.7】**选择题.

(1) 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 等于

(A)5.　　(B)4.　　(C)50.　　(D)40.　　【　】

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4]$，其中 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,3,4)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 列，则 $|-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_4,-\boldsymbol{A}_3|$ 等于

(A) $-2$.　　(B)2.　　(C)1.　　(D)0.　　【　】

(3) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$\boldsymbol{A}$ 中 3 个列向量以 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 表示，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 等于

(A) $|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$.　　(B) $|-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_3|$.

(C) $|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1|$.　　(D) $|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3|$.　　【　】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|$ 等于

(A)4.　　(B) $-4$.　　(C)16.　　(D) $-16$.　　【　】

(5) $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵，$k$ 是非零常数，则 $|(k\boldsymbol{A})^*|$ 等于

(A) $k|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　(B) $|k||\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　(C) $k^{n(n-1)}|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　(D) $k^{n-1}|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.　　【　】

(6) 行列式 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$ 等于

(A)1000.　　(B) $-1000$.　　(C)2000.　　(D) $-2000$.　　【　】

**【解】**(1)D，(2)B，(3)D，(4)D，(5)C，(6)C.

**【分析】**(1) 这里首先应区分矩阵相加是对应元素相加，而行列式相加(或拆分)，只有一行(列)不同，其余各行(列)都相同时才能相加(或拆分). 另外应注意 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$. 正确计算如下：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4| = 8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4| \\ &= 8[|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|] = 8[4+1] = 40,\end{aligned}$$

故选(D).

(2) 利用行列式的性质有

$$\begin{aligned}|-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_4,-\boldsymbol{A}_3| &= (-1)^4|\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_3| \\ &= |\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_3| = -|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_3| \\ &= |\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4| = |\boldsymbol{A}| = 2,\end{aligned}$$

故(B)为正确答案.

(3) 同(1)，(2)题类似，有

$$|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1| = -|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3| = -|\boldsymbol{A}|,$$

$$|-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_3| = (-1)^3|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3| = -|\boldsymbol{A}|,$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1| &= |2(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3),\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1| \\ &= 2|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2| \\ &= 2[|\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|+|\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|]\end{aligned}$$

$$=2[|\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|+|\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|]$$
$$=2|\boldsymbol{A}_3,-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2|=2|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2|$$
$$=2|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=2|\boldsymbol{A}|.$$

这里先把后两列加到第一列；提取公因子之后，又把第一列的$(-1)$倍加到第二、三列；最后利用行列式的加法性质.

$$|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3|=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2|+|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$$
$$=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3|+|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$$
$$=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=|\boldsymbol{A}|.$$

故(D)为正确答案.

(4) $|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|=|-2\boldsymbol{A}|=(-2)^3|\boldsymbol{A}|=-8\times 2=-16$. 故选(D).

(5) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$, $|(k\boldsymbol{A})^*|=|k^{n-1}\boldsymbol{A}^*|=(k^{n-1})^n\cdot|\boldsymbol{A}^*|=k^{n(n-1)}\cdot|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 故选(C).

(6) 把第二列的$(-1)$倍加到第一列，$(-2)$倍加到第三列得

$$\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&100&4\\-1&200&-5\\1&300&0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3&1&4\\-1&2&-5\\1&3&0\end{vmatrix}=2000.$$

**【例 1.8】** 选择题.

(1) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n(n\geqslant 2)$阶方阵，则必有

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$. (B) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.

(C) $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|$. (D) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$. 【 】

(2) 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶方阵，则$|\boldsymbol{A}|=0$的必要条件是

(A) 两行(列)元素对应成比例. (B) 必有一行为其余行的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$中有一行元素全为零. (D) 任一行为其余行的线性组合. 【 】

**【解】**(1)B， (2)B.

**【分析】**(1) 一般地 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})|=(-1)^n|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$；

$$||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{B}|,\ ||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|^n|\boldsymbol{A}|,$$

故$||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|\neq||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|$；只有$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$正确.

(2)(A),(C),(D) 均为$|\boldsymbol{A}|=0$的充分条件，而非必要条件，故选(B).

## 四、行列式按行(列)展开定理

将$n$阶行列式中元素$a_{ij}$所在的第$i$行和第$j$列的元素划掉，剩余的元素按原位置次序所构成的$n-1$阶行列式，称为元素$a_{ij}$的余子式，记为$M_{ij}$.

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j-1}&a_{1j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{(i-1)1}&a_{(i-1)2}&\cdots&a_{(i-1)j-1}&a_{(i-1)j+1}&\cdots&a_{(i-1)n}\\a_{(i+1)1}&a_{(i+1)2}&\cdots&a_{(i+1)j-1}&a_{(i+1)j+1}&\cdots&a_{(i+1)n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n(j-1)}&a_{n(j+1)}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

$a_{ij}$的代数余子式记为$A_{ij}$，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

设$D=|(a_{ij})_{n\times n}|$为$n$阶行列式，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} D, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} D, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

其中,$A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式.

注 行列式的任何一行(或列)的所有元素分别与它们所对应的代数余子式的乘积之和为行列式的值;行列式的任何一行(或列)的元素与另一行(或列)的对应元素的代数余子式的乘积之和必为零.

**【例 1.9】** 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

求 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = ?$,其中 $\boldsymbol{A}_{4j}$ 为元素 $a_{4j}(j = 1,2,3,4)$ 的代数余子式.

**【分析】** 根据行列式或按一行(一列)展开公式,有

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 1 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 1 \cdot A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

从而转化为一个四阶行列式的计算.此题若直接计算四个代数余子式,则计算较繁且容易出现差错.

**【解】** $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 1 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 1 \cdot A_{44}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(有两行元素对应相同)}$$

**【例 1.10】** 设 $n$ 阶行列式 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$,求 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的代数余子式之和.

**【解】** 如直接求 $|\boldsymbol{A}|$ 的每一元素的代数余子式,则计算较繁琐,可利用 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的性质求解.$|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的代数余子式,即 $\boldsymbol{A}^*$ 中的所有元素.

而
$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{bmatrix},$$

$|A|$ 中的所有元素的代数余子式之和,即 $A^*$ 的所有元素之和为 $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\dfrac{n(n+1)}{2\cdot n!}$.

## 五、重要公式与结论

(1) 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,则 $\det A$(或 $|A|$) 表示对应的行列式,记为

$$|A|=|A^{T}|=|A'|\ (\text{“T”,“'”均表示转置})$$

(2) 设方阵 $A$ 可逆,则 $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

(3) 设 $A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵,$A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式.

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},$$

则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

(4) $|kA|=k^n|A|$, ($A$ 为 $n$ 阶方阵).

(5) $\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=|A||B|$, $\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|$, $\begin{vmatrix}O&B\\A&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$,

其中,$A$ 为 $m$ 阶方阵,$B$ 为 $n$ 阶方阵.

例如:$D_1=\begin{vmatrix}4&2\\1&2\end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&2\\2&1&-1\end{vmatrix}$,

则 $|A|=\begin{vmatrix}O&D_1\\D_2&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times3}|D_1||D_2|=-54$

(6) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

**【例 1.11】** 计算 $|A|=\begin{vmatrix}25&29&14&-11\\1&-1&2&3\\1&1&4&9\\1&-1&8&27\end{vmatrix}$

**【解】** $|A|=\begin{vmatrix}25&29&14&-11\\1&-1&2&3\\1^2&(-1)^2&2^2&3^2\\1^3&(-1)^3&2^3&3^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}28&28&28&28\\1&-1&2&3\\1^2&(-1)^2&2^2&3^2\\1^3&(-1)^3&2^3&3^3\end{vmatrix}$

$$=28\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&2&3\\1^2&(-1)^2&2^2&3^2\\1^3&(-1)^3&2^3&3^3\end{vmatrix}=28\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)=-1\ 344$$

## 第2节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 抽象行列式的计算

提示 抽象行列式计算要考核的不单纯是行列式的计算，而是通过给出与行列式相关联的方阵、伴随阵、逆矩阵、向量，在指定运算下所构成的行列式的计算，达到考核这些概念的运算性质、行列式的性质等目的. 因此这些概念及性质务必非常熟悉.

【例 1.12】设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{8}$，计算 $\left|\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-8\boldsymbol{A}^*\right|$.

【解】$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{8}\boldsymbol{A}^{-1}$，于是 $\left|\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-8\boldsymbol{A}^*\right|=|3\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}|=|2\boldsymbol{A}^{-1}|=2^3\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=64.$

【例 1.13】若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{3\times3}$，又 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$，且 $|\boldsymbol{A}|=5$. 再设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3,5\boldsymbol{a}_2)$，求 $|\boldsymbol{B}|$.

【解】方法一：考虑行列式性质则有

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}|&=|(\boldsymbol{a}_1,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3,5\boldsymbol{a}_2)|+|(2\boldsymbol{a}_2,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3,5\boldsymbol{a}_2)|\\
&=|(\boldsymbol{a}_1,3\boldsymbol{a}_1,5\boldsymbol{a}_2)|+|(\boldsymbol{a}_1,4\boldsymbol{a}_3,5\boldsymbol{a}_2)|+0\\
&=0+20|(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)|+0=-20|\boldsymbol{A}|=-100.
\end{aligned}
$$

方法二：考虑矩阵或行列式实施列或行初等变换，

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}|&=5|(\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)|=5|(\boldsymbol{a}_1,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)|\\
&=5|(\boldsymbol{a}_1,4\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)|=20|(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)|=-20|\boldsymbol{A}|=-100.
\end{aligned}
$$

方法三：考虑矩阵运算，则由题设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{AC}$，又由

$$
\det\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{vmatrix}=-20,
$$

有

$$
|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AC}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|=-100.
$$

### 题型二 低阶行列式的计算

提示 根据行或列元素的特点，或者化为上(下)三角形行列式，或者根据行列展开定理即降阶法求解. 凡与矩阵、伴随矩阵、逆矩阵以及与向量相关联的问题，与抽象行列式的有关问题作类似处理. 在行列式化为上下三角行列式的变换过程中避免将元素变为分数，若原行列式中有很多元素为分数，则先利用行列式的性质将各元素化为整数.

【例 1.14】计算下列行列式

$$
(1)D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}.\qquad(2)D=\begin{vmatrix}2+x&2&2&2\\2&2-x&2&2\\2&2&2+y&2\\2&2&2&2-y\end{vmatrix}.
$$

【解】(1) $D \xlongequal{[1]\leftrightarrow[3]} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{(1)\times(-2)+(3) \\ (4)-(1)}]{(1)+(2)} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\quad} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[(4)+(3)]{(4)\times 2+(2)} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(2)\leftrightarrow(4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{(4)-(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

注 $[j]$ 表示 $j$ 列；$(i)$ 表示 $i$ 行；$(i)\leftrightarrow(j)$ 表示两行对调；$[i]\leftrightarrow[j]$ 表示两列对调.

(2) $D \xlongequal[(-1)\times(4)+(3)]{(-1)\times(2)+(1)} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & y & y \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix} \xlongequal[(-1)\times[3]+[4]]{(-1)\times[1]+[2]} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -y \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} x\begin{vmatrix} -x & 2 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 2 & -y \end{vmatrix} = x(xy^2) = x^2y^2.$$

【例 1.15】计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

【解】$D \xlongequal[\text{第 1 列}]{\text{各列加到}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{各行减第一行}} x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4.$$

【例 1.16】设 $F(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$,

求：(1) $x^4$ 的系数；(2) $x^3$ 的系数；(3) 常数项.

【解】(1) 含 $x^4$ 的项务必为 $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$，可见 $x^4$ 的系数为 1.

(2) 含 $x^3$ 的项为：$-a_{11}(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})-a_{22}(x-a_{11})(x-a_{33})(x-a_{44})-a_{33}(x_1-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{44})-a_{44}(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})$

可见 $x^3$ 的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

(3) 常数项,即为 $x=0$ 时的 $F(x)$ 的值.

$$F(0)=\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

**【例 1.17】** 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,求(1) $A_{31}+A_{32}+A_{33}$; (2) $A_{34}+A_{35}$.

**【解】** 将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第三行的元素依次换成 5,5,5,3,3. 则第二行与第三行的对应元素相等,于是行列式的值等于 0. 按第三行展开,则有

$$5(A_{31}+A_{32}+A_{33})+3(A_{34}+A_{35})=0, \quad ①$$

同理,将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第三行的元素换成第四行的对应元素,按第三行展开则有

$$2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+A_{34}+A_{35}=0, \quad ②$$

解 ①,② 联立方程组,得

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}=0, A_{34}+A_{35}=0.$$

## 题型三　n 阶行列式的计算

### 1. 利用行列式定义计算(适用于行列式中有较多元素为零的情形)

**【例 1.18】** 计算下列行列式(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

**【解】** (1) 此行列式刚好只有 $n$ 个非零元素 $a_{1\,n-1},a_{2\,n-2},\cdots,a_{n-1\,1},a_{nn}$,故非零项只有一项:$a_{1\,n-1}a_{2\,n-2}\cdots a_{n-1\,1}a_{nn}$,又 $\tau[(n-1)(n-2)\cdots 1n]=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 1997\cdot 1998$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1998!$$

(2) 由行列式的定义知，此行列式的非零项只有两项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1n}a_{n1}$，故

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a \cdot a \cdot \cdots \cdot a + (-1)^{\tau(23\cdots n1)} b \cdot b \cdot \cdots \cdot b$$

$$= a^n + (-1)^{n-1} b^n.$$

**2. 各行(或列)加到同一行(或列)中去(适用于各行(或列)诸元素之和相等的情形)**

**【例 1.19】** 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

**【解】** $D_n \xlongequal[\text{第一行}]{\text{各行加到}} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[\text{各列减第一列}]{\text{从第二列开始}} [a+(n-1)b] \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

**【例 1.20】** 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$.

**【解】** $D_n \xlongequal[\text{第一列}]{\text{各列加到}} \begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

$$= [x+(n-2)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{各行减第一行}]{\text{从第二行开始}}[x+(n-2)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\0 & x-2a & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & x-2a & \ddots & a\\0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}.$$

**3. 各行(列)加减同一行(列)的倍数(适用于施行加减后某一行(列)诸元素有公因子或变为三角形形式的情形)**

**【例 1.21】** 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

**【解】** $D_n\xlongequal[\text{到各列上}]{\text{第二列乘}(-1)\text{加}}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\0 & 2 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 2 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}_{n\times n}=(-1)\begin{vmatrix}2 & 0 & \cdots & 0\\2 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\2 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}$

$$=-2(n-2)!.$$

**【例 1.22】** 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n\\1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}$.

**【解】** 当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2\\1+x_2y_1 & 1+x_2y_2\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(y_2-y_1)$,

当 $n\geqslant 3$ 时,$D_n\xlongequal[\text{第一行}]{\text{各行减法}}\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n\\y_1(x_2-x_1) & y_2(x_2-x_1) & \cdots & y_n(x_2-x_1)\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\y_1(x_n-x_1) & y_2(x_n-x_1) & \cdots & y_n(x_n-x_1)\end{vmatrix}$,

因为从第二行以后各行成比例,所以 $D_n=0$.

**4. 某行(或列)加上其余各行(或列)的一定倍数(适用于施行这种变换后行列式立即呈上(或下)三角形式的情形)**

**【例 1.23】** 计算 $D_n=\begin{vmatrix}\lambda_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\a_1 & \lambda_2+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\\vdots & \ddots & & & \vdots\\a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_n+a_n\end{vmatrix}$ $(\lambda_i\neq 0)$

**【解】** $D_n=\begin{vmatrix}\lambda_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\-\lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \ddots & & & \vdots\\-\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{各列}\times\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\text{加到第一列}]{\text{第二列开始}}$

$$=\begin{vmatrix} \lambda_1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{\lambda_1 a_i}{\lambda_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\prod_{i=2}^{n}\left(\lambda_1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{\lambda_1 a_i}{\lambda_i}\right)\lambda_i$$

### 5. 观察一次因式法

【例 1.24】计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

【解】当 $x=\pm1$ 时，第一、二行对应元素相同，所以 $D_4=0$，可见 $D_4$ 中含有因式 $(x-1)(x+1)$；当 $x=\pm2$ 时，第三、四行对应元素相同，所以 $D_4=0$，可见 $D_4$ 中含有 $(x-2)(x+2)$ 因式.

由于 $D$ 中关于 $x$ 的最高次数为 4，所以

$$D_4=A(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

$D_4$ 中含 $x^4$ 的项为

$$1\cdot(2-x^2)\cdot1\cdot(9-x^2)-2\cdot(2-x^2)\cdot2\cdot(9-x^2),$$

比较上面两式中 $x^4$ 的系数，得 $A=-3$，

故
$$D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

【例 1.25】解方程 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}=0.$

【解】当 $x=0,1,2,\cdots,(n-2)$ 时，由于有两列对应元素相同，左边行列式的值为 0，因此左边行列式可写成

$$(-1)^{n-1}x(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-n+2),$$

于是原方程变为
$$(-1)^{n-1}x(x-1)\cdot\cdots\cdot(x-n+2)=0,$$

所以方程的解为
$$x_1=0,x_2=1,\cdots,x_{n-1}=n-2.$$

### 6. 所求行列式某一行(或某一列)至多有两个非零元素

一般按此行(或此列)展开即可求解.

【例 1.26】计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

【解】第一行，第一列均只有两个非零元素，不妨按第一列展开，得

$$D_n=xD_{n-1}+a_n\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n$$

由此递推得

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n = x[xD_{n-2} + a_{n-1}] + a_n \\ &= x^2 D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &\ \vdots \\ &= x^{n-1}D_1 + x^{n-2}a_2 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\ &= a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

类似地,形如

(1) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.  (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2\cos\theta & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.  (4) $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & \ddots & \iddots & & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & & \iddots & \ddots & & \\ & b & & & a & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$.

等行列式均可按此方法求解.

注 按此方法求解时,往往会得到一个一般的递推关系式

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2},$$

至此可用两种方法求出 $D_n$ 的表达式:

1° 先计算 $D_1, D_2, D_3$ 等,找出递推规律,再用数学归纳法进行证明;

2° 把关系式 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ 看做一差分方程,求出特征方程 $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ 的两个根 $\lambda_1, \lambda_2$,则 $D_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$,或 $D_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \quad (\lambda_1 = \lambda_2)$,再由 $D_1, D_2$ 定出常数 $C_1, C_2$.

**【例 1.27】**计算三对角行列式 $D_n$ 之值.

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

**【解】**按第一列展开得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\beta\begin{vmatrix}\alpha&0&0&\cdots&0&0\\\beta&\alpha+\beta&\alpha&\cdots&0&0\\0&\beta&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\alpha+\beta&\alpha\\0&0&0&\cdots&\beta&\alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}\quad(n\geqslant 3),$$

即有递推关系式 $\qquad D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$

为了得到 $D_n$ 的一般表达式，采用上述方法 1° 求解

因为(假设 $\alpha\neq\beta$)，

$$D_1=\alpha+\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\\\beta&\alpha+\beta\end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha&0\\\beta&\alpha+\beta&\alpha\\0&\beta&\alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta},$$

不妨设 $\quad D_{n-1}=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，则有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

$$=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta},$$

根据数学归纳法即知 $\qquad D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$

若 $\alpha=\beta$，可直接计算得 $D_n=(n+1)\alpha^n$.

## 第 3 节　思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　若由题设条件要求确定参数的取值，则可联想到是否有某行列式为零.

**【例 1.28】**已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 $a,b$ 的值.

**【解】** $\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&3&9\\0&-6&-12\\0&10&20\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&9\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

可见 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，

于是 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，

从而
$$|[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-a+3b=0.$$

即 $a=3b$.

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，

于是
$$|[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3]|=\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=2b-10=0,$$

得 $b=5, a=3b=15$.

## 二、综合题解析

**【例 1.29】** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{B}|=-1$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

**【分析】** $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

**【证】** 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵，所以
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}.$$

于是
$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|&=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|,\end{aligned}$$

即
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,(|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0.$$

因为 $|\boldsymbol{A}|/|\boldsymbol{B}|=-1$，所以 $|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|\neq 0$，从而有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

**【例 1.30】** 设整数系数方程组
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$
对任意 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均有整数解，证明其系数行列式必为 $\pm1$.

**【证】** 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n},i,j=1,2,\cdots,n;\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则原方程组即为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 取 $\boldsymbol{b}$ 分别为 $n$ 阶单位矩阵 $E$ 的各列：$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}};\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}};\cdots;\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，所得解依次记为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{\varepsilon}_j,j=1,2,\cdots,n$,
$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n],$$

也即
$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=\boldsymbol{E},$$

其中，$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=\boldsymbol{A}^{-1}$，按题设 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 一样是整数矩阵，从而 $|\boldsymbol{A}^{-1}|$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 都是整数，又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$，有
$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1,$$

于是只能 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

**【例 1.31】** 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1&x-1&2x-1\\1&x-2&3x-2\\1&x-3&4x-3\end{vmatrix}$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

**【证】** 由题设知 $f(x)$ 是关于 $x$ 的不多于三次的多项式，故它在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 且

$$f(0)=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&-2&-2\\1&-3&-3\end{vmatrix}=0;f(1)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=0.$$

由罗尔中值定理可知,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$.

**【例 1.32】**若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{3\times3}$,又$a,b,c$为$\boldsymbol{A}$的三个相异特征根,又$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$,求$|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}|$.

**【解】**由 $|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$,故只须计算 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

由题设有 $2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$,即

$$(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^2,$$

故
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\frac{|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|^2}{|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|}=\frac{[(a-1)(b-1)(c-1)]^2}{(2a-1)(2b-1)(2c-1)}.$$

注 由解题过程可看出,例中 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 的值与 $\boldsymbol{B}$ 无关,尽管如此,鉴于题设等式知 $\boldsymbol{B}$ 并非任意.

**【例 1.33】**设 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称阵,$\boldsymbol{D}$ 为对角元全大于零的对角阵,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|\neq0$,且还有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$.

**【证】**(1) 反证.若$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|=0$,则$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}=0$有非零解.设$\boldsymbol{X}_1$是其一个非零解,进而有$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}_1=0$,故$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_1+\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DX}_1=0$.因为$\boldsymbol{A}$为实反对称阵,所以$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_1=0$,最终得$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DX}_1=0$.但是$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$a_i>0$,所以$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DX}_1>0$,矛盾.所以,$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|\neq0$.

(2) 反证.令 $f(x)=|x\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|$,$x\in[0,1]$.

假设$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|<0$,因为$f(0)=|\boldsymbol{D}|>0$,$f(1)=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|<0$,由零值定理可知,存在$x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=|x_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|=0$.但是

$$|x_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|=x_0^n\left|\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{D}}{x_0}\right|,$$

其中,$\dfrac{\boldsymbol{D}}{x_0}$ 为对角元全大于零的对角阵,由(1) 知 $\left|\boldsymbol{A}+\dfrac{\boldsymbol{D}}{x_0}\right|\neq0$,矛盾,故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$.

## 习　题　一

**1. 填空题.**

(1) 四阶行列式中带负号且包含因子 $a_{12}$ 和 $a_{21}$ 的项为________.

(2) 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可经________次对换后变为排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$.

(3) 在五阶行列式中,$(-1)^{\tau(15423)+\tau(23145)}a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}=$________$a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$.

(4) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&1&-1\\-x&-x&x\\1&2&x\end{vmatrix}$ 中,$x^3$ 的系数是________.

(5) 设 $a,b$ 为实数,则当 $a=$________,且 $b=$________时,$\begin{vmatrix}a&b&0\\-b&a&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=0$.

(6) 在 $n$ 阶行列式 $D=|(a_{ij})_{n\times n}|$ 中,当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$,则 $D=$________.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $4\times4$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $5\times5$ 矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=-2$,则 $|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=$________,$|-|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=$________.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $3\times3$ 矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-2$，把 $\boldsymbol{A}$ 按行分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 行，则行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1\\ 3\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1\end{vmatrix}=$ ________.

(9) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

**2. 选择题.**

(1) 设 $|\boldsymbol{A}|=|(a_{ij})_{n\times n}|$ 为 $n$ 阶行列式，则 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1n}a_{n1}$ 在行列式中符号为

A. 正. B. 负. C. $(-1)^n$. D. $(-1)^{n-1}$. 【 】

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*|$ 等于

A. $|\boldsymbol{A}|^2$. B. $|\boldsymbol{A}|^n$. C. $|\boldsymbol{A}|^{2n}$. D. $|\boldsymbol{A}|^{2n-1}$. 【 】

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次矩阵的初等变换后所得到的矩阵，则有

A. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. B. $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$.

C. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则一定有 $|\boldsymbol{B}|=0$. D. 若 $|\boldsymbol{A}|>0$，则一定有 $|\boldsymbol{B}|>0$. 【 】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m$ 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|$ 等于

A. $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. B. $-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

C. $(-1)^{m+n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. D. $(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

(5) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_2\\ 3\boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为三维行向量，且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=18$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则行列式 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$ 等于

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. 【 】

**3. 计算证明题.**

(1) 设
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{vmatrix},$$

计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=?$，其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 $a_{4j}$ 的代数余子式.

(2) 计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$ 的 $n$ 阶行列式.

(3) 计算 $n$ 阶行列式
$$D_n=\begin{vmatrix}x_1+1&x_1+2&\cdots&x_1+n\\x_2+1&x_2+2&\cdots&x_2+n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_n+1&x_n+2&\cdots&x_n+n\end{vmatrix}\quad(n\geqslant2).$$

(4) 设 $a,b,c$ 是互异的实数，证明：

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$$ 的充要条件是 $a+b+c=0$.

(5) 证明:奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

(6) 设
$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1\\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1\end{vmatrix}.$$

证明:可以找出数 $\delta(0<\delta<1)$,使 $f'(\delta)=0$ (提示用罗尔定理证).

(7) 试证:如果 $n$ 次多项式 $f(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n$ 对 $n+1$ 个不同的 $x$ 值都是零,则此多项式恒等于零.(提示:用范德蒙行列式证明)

(8) 设 $F(x)=\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}$,求 $F'(x)$.

## 参 考 答 案

**1.** (1)$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$; (2)$\dfrac{n(n-1)}{2}$; (3)$-$; (4)$-2$; (5)0,0; (6)$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;

(7)64,32; (8)6; (9)$-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

**2.** (1)D (2)D (3)C (4)D (5)B

**3.** (1) 将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 4 行元素均换为 1,则
$$\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}+\boldsymbol{A}_{44}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6.$$

(2) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$,从最后一行起,每行减去前一行,再在所得的行列式中每列加上第 $n$ 列即得.

(3) 用拆分法计算.当 $n>2$ 时,$D_n=0$;当 $n-2$ 时,$D_2=x_1-x_2$.

(4) 计算行列式的值即可推得结论.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $2n+1$ 阶反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,故 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|$,即 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{2n+1}|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$,得 $2|\boldsymbol{A}|=0$,从而 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(6) 略.

(7) 略.

(8)$F'(x)=6x^2$.

# 第二章　矩　　阵

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、矩阵的概念

**1. 定义**

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 也称为 $n$ 阶方阵. $|\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

**2. 几类特殊矩阵**

(1) 单位矩阵：主对角线上元素都是1，其余元素全为零的方阵称为单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{I}$).

(2) 对角矩阵：主对角线上元素为任意常数，而主对角线外的元素都是零的方阵. 若主对角线上的元素相等，则称为数量矩阵.

(3) 三角矩阵：主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角矩阵；主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角矩阵，上、下三角矩阵统称三角矩阵.

(4) 矩阵的转置：矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的行与列的元素位置交换，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$.

转置的性质

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\quad (k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

(5) 对称矩阵：如果 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；如果 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

对称矩阵的特点及反对称矩阵的特点

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特点：$\boldsymbol{A}$ 中的元素关于主对角线对应相等；反对称矩阵特点：$\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素均为0，其余元素关于主对角线互为相反数.

(6) 正交矩阵：设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，如果有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

(7) 可交换矩阵：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 称为可交换矩阵.

**3. 矩阵的关系**

等价关系：若存在满秩阵 $P,Q$，使 $B=PAQ$，则称矩阵 $A$ 与 $B$ 等价，记为 $A\cong B$

合同关系：若存在满秩阵 $P$，使 $B=P^{\mathrm{T}}AP$，则称矩阵 $A$ 与 $B$ 合同.

相似关系：若存在可逆阵 $P$，使 $B=P^{-1}AP$，则称矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，记为 $A\sim B$.

## 二、矩阵的运算

(1) 矩阵的相等:相等的矩阵必须具有相同的行数与列数,两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 相等是指对应位置的元素分别相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(2) 矩阵的和与差,设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵,则定义

$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

(3) 数乘矩阵:数乘矩阵时,将数乘到矩阵的每个元素上,即

$$k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法和数乘运算满足下列运算规律:

1° 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

2° 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$, $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

3° 分配律 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B},(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

以上 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,$k,l$ 为数.

(4) 矩阵乘法:设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

矩阵乘法满足下列运算规律:

1° 结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

2° 分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$.

3° 数与乘积的结合律 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$.

(5) 方阵的幂:对方阵 $\boldsymbol{A}$,定义 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{k\text{个}\boldsymbol{A}\text{相乘}}$. 称 $\boldsymbol{A}^k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 次幂. 特别地,若存在整数 $m$,使 $\boldsymbol{A}^m=0$,称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵.

方阵的幂满足下列运算规律:

$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}^{k+m},(\boldsymbol{A}^k)^m=\boldsymbol{A}^{km}$,$k,m$ 为正整数.

注 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{E}_m$ 和 $\boldsymbol{E}_n$ 分别为 $m$ 阶和 $n$ 阶单位矩阵,则有

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}_n=\boldsymbol{A}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶方阵,则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$,特别地,$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.

(3)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$; 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,从而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$; $|\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$,这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵.

(4)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 一般不成立,从而$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 等一般也不成立(当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时,即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时,上述公式成立).

(5)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,由此易证对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 均为对称矩阵.

【例 2.1】填空

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^2\right|=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$,则当且仅当 $\boldsymbol{B}^2=$ ________ 时,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

(3)$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 的充分必要条件是________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=[1,2,3],\boldsymbol{B}=[1,1,1]$,则$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^k=$ ________.

【解】(1) $\frac{1}{4}$，(2)$\boldsymbol{E}$，(3)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，(4)$6^{k-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$.

【分析】(1) $\left|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^2\right|=\left|\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^2\right|=\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot|\boldsymbol{A}|^2=\frac{1}{4}$.

(2)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\right]^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

(3)$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\Leftrightarrow 0=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\Leftrightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(4)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^k=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}$

$$=6^{k-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}=6^{k-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}.$$

本题的关键是要注意 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是矩阵，但 $\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=6$ 却是一个数. 若先计算 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$，再求 $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}^k$，则计算是相当复杂的.

【例 2.2】选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶矩阵，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 的充分必要条件是

(A)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.　(B)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.　(C)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.　(D)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　【　】

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶对称矩阵，则下面四个结论中不正确的是

(A)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.　(B)$\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

(C)$\boldsymbol{A}^m+\boldsymbol{B}^m$($m$ 为正整数) 也是对称矩阵.　(D)$\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$ 也是对称矩阵.　【　】

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.　(B) $|\boldsymbol{B}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(C)$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.　(D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$.　【　】

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，则有

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.　(B) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|$.

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.　(D)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.　【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，则下列结论成立的是

(A)$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.　(B) $|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$.　(D)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=1$.　【　】

【解】应选(1)C，(2)B，(3)B，(4)C，(5)C.

【分析】(1) 矩阵运算与代数运算的差异主要有两点：不满足交换律与消去律，换句话说，一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 因此遇到乘法运算时，必须特别注意这两点. (A)，(B)，(D) 均是等式$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 成立的充分条件，但非必要条件，故(C) 为正确答案.

(2) 逐项计算转置看是否为对称矩阵即可. 因$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，但一般地 $\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{AB}$，

故(B) 为应选答案.

(3) 同(1) 分析,(A),(C),(D) 均不正确. 另外,$AB=O$,有 $|AB|=|A||B|=0$,从而有 $|A|=0$ 或 $|B|=0$,即(B) 为正确答案. 注意 $A,B$ 指矩阵,而 $|A|$ 与 $|B|$ 指行列式,其值为数,两者是有本质差别的.

(4) 由矩阵行列式性质,有 $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$,可知(C) 为正确答案.

(5)(A) 必要而非充分,例如 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{bmatrix}\neq O$,$B=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}\neq O$,但 $AB=O$;(B) 充分而非必要,$A=O\Rightarrow|A|=0$,反之不成立,如 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$,则有 $|A|=0$,但 $A\neq O$;(D) 必要而非充分,$A=E\Rightarrow|A|=1$,反之不成立,如 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$,$|A|=1$,但 $A\neq E$;只有(C) 是正确的,因为 $|AB|=|A||B|=0\Leftrightarrow|A|=0$ 或 $|B|=0$.

【例 2.3】选择题

(1) 设 $A,B,C$ 为 $n$ 阶方阵,若 $AB=BA$,$AC=CA$,则 $ABC$ 等于

(A)$ACB$.　　(B)$CBA$.　　(C)$BCA$.　　(D)$CAB$.　　【　　】

(2) 设 $A,B,C$ 均为 $n$ 阶方阵,且 $AB=BC=CA=E$,则 $A^2+B^2+C^2$ 等于

(A)$3E$.　　(B)$2E$.　　(C)$E$.　　(D)$O$.　　【　　】

【解】应选(1)C, (2)A.

【分析】(1)$ABC=(BA)C=B(AC)=BCA$, (C) 为正确答案.

(2)
$$E=(AB)(CA)=A(BC)A=A^2,$$
$$E=(BC)(AB)=B(CA)B=B^2,$$
$$E=(CA)(BC)=C(AB)C=C^2,$$

所以 $A^2+B^2+C^2=3E$,(A) 为正确选项.

## 三、逆矩阵的概念

### 1. 逆矩阵的定义

对于一个 $n$ 阶方阵 $A$,如果存在一个 $n$ 阶方阵 $B$,使得 $AB=BA=E$,则称 $A$ 为可逆矩阵,并称 $B$ 为 $A$ 的逆矩阵,记为 $A^{-1}$.

### 2. 逆矩阵的性质

(1) 若 $A$ 可逆,则 $A^{-1}$ 唯一.

(2) 若 $A$ 为可逆矩阵,则 $A^{\mathrm{T}}$,$A^{-1}$ 均可逆,且有 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$,$(A^{-1})^{-1}=A$.

(3) 若 $A,B$ 为同阶可逆矩阵,则 $AB$ 也可逆,且有 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(4) 若 $A$ 可逆,且 $k\neq0$,则 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

注 ① 可逆矩阵一定是方阵,但并不是所有方阵都有逆矩阵.

② 方阵 $A$ 可逆的充分必要条件是 $A$ 非奇异,即 $|A|\neq0$.

③ 若 $A$ 为 $n$ 阶矩阵,如果存在 $n$ 阶矩阵 $B$,使得 $AB=E$,则 $BA=E$. 即在计算或证明时,只要有 $AB=E$ 或 $BA=E$,就可得出 $A,B$ 互为逆矩阵的结论($A^{-1}=B$,$B^{-1}=A$).

【例 2.4】设 $A^k=O$,证明:$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

【证】因为

$$\begin{aligned}&(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})\\=&E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k)\\=&E-A^k=E,\end{aligned}$$

所以 $$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

## 四、利用伴随矩阵求逆矩阵

设 $A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，定义 $A^*=(A_{ji})$ 为矩阵 $A$ 的伴随矩阵.

当 $A$ 非奇异，即 $|A|\neq 0$，有 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

一般来说，当 $A$ 是低阶矩阵时($n\leqslant 3$)，可以考虑利用伴随矩阵 $A^*$ 求 $A$ 的逆，但应特别注意：

(1)$A^*=(A_{ji})=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$，其中 $A_{ij}$ 是元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，$a_{ij}$ 与 $A_{ij}$ 在 $A$ 与 $A^*$ 中的位置是不同的.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

(2)$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 是代数余子式，符号 $(-1)^{i+j}$ 不能忘记.

(3)$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，注意最后还要把 $A^*$ 乘以 $\frac{1}{|A|}$.

特别地，当 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 且 $ad-bc\neq 0$ 时，$A^*=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$，相当于主对角线元素换位，次对角线元素变号，即可得到 $A^*$，从而

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

【例 2.5】设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

【解】由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 知， $A^*=|A|A^{-1}$，

从而 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.

而 $|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}=2$，故 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$.

## 五、矩阵的初等变换与求逆

### 1. 矩阵的初等变换

对矩阵施行以下三种变换称为矩阵的初等变换：

(1) 交换矩阵的两行(列)；

(2) 以一个非零的数 $k$ 乘矩阵的某一行(列)；

(3) 把矩阵的某一行(列) 的 $k$ 倍加到另一行(列).

对单位矩阵施行一次第 $i(i=1,2,3)$ 种初等变换后得到的矩阵叫第 $i$ 种初等矩阵. 初等矩阵为可逆矩阵,且逆矩阵仍为初等矩阵.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左(右) 乘第 $i(i=1,2,3)$ 种初等矩阵,就相当于对 $\boldsymbol{A}$ 的行(列) 进行一次同种的初等变换.

初等变换的性质

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过行(或列) 的初等变换变成 $\boldsymbol{B}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行(或列) 向量仍等价

① 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

② 初等变换不改变矩阵的秩

(2) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则存在有限个初等方阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$,使得:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 作一次行的初等变换,相当于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘以一个 $m$ 阶初等方阵,对 $\boldsymbol{A}$ 作一次列的初等变换,相当于矩阵右乘以一个 $n$ 阶初等方阵.

### 2. 用初等变换求逆矩阵

方阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可表示为若干个同阶初等矩阵的乘积. 欲求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,首先要由 $\boldsymbol{A}$ 作出一个 $n\times 2n$ 矩阵,即

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}),$$

其次,对这个矩阵施以行初等变换(且只能用行初等变换),将它的左半部的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵,那么原来右半部的单位矩阵就同时化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$,即

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行初等变换}}(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1}),$$

或者

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列初等变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}.$$

### 3. 等价矩阵

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次变换化为 $\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$. 任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总是可经过有限次行(列) 初等变换化为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形.

$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵且有相同的秩.

$\qquad\quad\Leftrightarrow\quad$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

【例 2.6】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 则必有

(A)$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$. (B)$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$. (C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. (D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 【　】

【解】$\boldsymbol{B}$ 可看做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 先将第一行的各元素加到第三行的对应元素上，再将第一行与第二行对调的初等行变换，即 $\boldsymbol{A}$ 左乘以 $\boldsymbol{P}_2$，再左乘以 $\boldsymbol{P}_1$，得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$，故可知(C) 入选.

## 六、分块矩阵及其求逆

用水平和铅直虚线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素分割成若干个小块，每一小块称为矩阵的一个子块或子矩阵，则原矩阵是以这些子块为元素的分块矩阵.

进行分块矩阵的加、减、乘法与转置运算时，可将子矩阵当做通常矩阵的元素看待.

不过，在进行分块矩阵乘法运算时，应当注意左分块矩阵的列的分法必须与右分块矩阵行的分法一致.

对于零元素特别多的矩阵，可以考虑用分块矩阵求逆. 特别地，设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为可逆方阵，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}.$$

## 七、矩阵的秩及其求法

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $r(\boldsymbol{A})$. 对于任一 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在 $m$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$(一系列初等行变换)，$n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$(一系列初等列变换)，使

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},\text{其中 } \boldsymbol{E}_r \text{ 为 } r \text{ 阶单位矩阵.}$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r$.

有关矩阵秩的重要公式与结论：

(1)$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$.

(3)$r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(4)$r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$；若 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

# 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

## 题型一　求逆矩阵

**提示** 求逆矩阵的常见方法：

(1) 伴随矩阵法：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，(适用于 $n\leqslant 3$ 的矩阵求逆).

(2) 初等变换求逆：$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{行}} (\boldsymbol{E} \vdots \boldsymbol{A}^{-1})$.

(3) 分块求逆.

(4) 利用定义：$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

**【例 2.7】**(1) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1} =$ ________.

(2) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵为 ________.

**【解】**(1)$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**方法一：**初等变换法：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

故

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**方法二：**分块矩阵法：$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$,

因为 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$，所以 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 由 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$. 而 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$，因此由

$$(\boldsymbol{A}^{-1} \vdots \boldsymbol{E}) = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

有 $$A=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$，于是 $$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

**【例 2.8】** 设 $$A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$，其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，求 $A^{-1}$.

**【解】** $$A=\left[\begin{array}{c|cccc}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ \hline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix},$$

其中 $$C=(a_n),B=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\end{bmatrix},$$

$$C^{-1}=(a_n^{-1}),B^{-1}=\begin{bmatrix}a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1}\end{bmatrix},$$

又 $$\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix},$$

故 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{bmatrix}.$$

**【例 2.9】** 已知 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $2A(A-E)=A^3$，求 $(E-A)^{-1}$.

**【解】** 设法分解出因子 $E-A$. 由 $2A(A-E)=A^3$，得 $A^3-2A^2+2A=O$，

把上式改写为 $$A^3-2A^2+2A+E=E,$$

即 $$(E-A)(A^2-A+E)=E,$$

故 $$(E-A)^{-1}=A^2-A+E.$$

**【例 2.10】** 已知矩阵 $A$ 满足关系式 $A^2+2A-3E=O$，求 $(A+4E)^{-1}$.

【解】设法分解出因子 $A+4E$，由 $A^2+2A-3E=O$，有

$$(A+4E)(A-2E)+8E-3E=O\Rightarrow(A+4E)(A-2E)=-5E,$$

$$(A+4E)\left(\frac{2}{5}E-\frac{1}{5}A\right)=E,$$

得
$$(A+4E)^{-1}=\frac{2}{5}E-\frac{1}{5}A.$$

## 题型二 求矩阵的高次幂 $A^m$

提示 方法一：用矩阵乘法的结合律．若 $A=\alpha\beta^T$，其中 $\alpha,\beta$ 为 $n$ 维列向量，则

$A^m=\alpha\beta^T\cdot\alpha\beta^T\cdot\cdots\cdot\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\cdot\cdots\cdot(\beta^T\alpha)\beta^T=(\beta^T\alpha)^{m-1}\cdot\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)^{m-1}A$，其中 $\beta^T\alpha$ 为数．

若 $P^{-1}AP=B$，则 $A=PBP^{-1}$，于是

$$\begin{aligned}A^m&=PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdot\cdots\cdot PBP^{-1}\\&=PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)\cdot\cdots\cdot B(P^{-1}P)BP^{-1}=PB^mP^{-1}.\end{aligned}$$

方法二：先求出 $A^2,A^3,\cdots$ 再用数学归纳法求 $A^m$．

方法三：根据 $A$ 的特点，用初等变换或对 $A$ 进行分解后再进行计算．

设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，$A^m=$

解法 1：利用二项式定理

$A^n=(B+C)^n=B^n+nB^{n-1}C+\cdots$

条件：①$B,C$ 相乘满足交换律：$BC=CB$ ②$C^m=0$，$m$ 很小的正整数

解法 2：将 $A$ 写成列与行乘积形式

$A=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n)$，条件 $R(A)=1$

解法 3：特征值法

$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

【例 2.11】已知矩阵 $A=PQ$，其中 $P=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$Q=[2,-1,2]$，求矩阵 $A,A^2,A^{100}$．

【分析】计算方阵的高次幂是一种常见的题型，除用数学归纳法外，还应注意结合方阵本身的特征进行讨论．本题的关键是注意 $PQ$ 为矩阵，而 $QP$ 为数，利用矩阵乘法的结合律 $A^2=PQ\cdot PQ=P(QP)Q=2PQ$ 达到简化的目的．

【解】$A=PQ=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}[2,-1,2]=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix}$，　$QP=[2,-1,2]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2$，

$A^2=PQ\cdot PQ=P(QP)Q=2PQ=2A$，　$A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2A^2=2^2\cdot A$．

一般地，设 $A^{k-1}=2^{k-2}A$，于是根据数学归纳法，有 $A^k=2^{k-1}\cdot A$，

则
$$A^k=A^{k-1}\cdot A=2^{k-2}A\cdot A=2^{k-2}A^2=2^{k-1}A.$$

【例 2.12】已知 $AP=PB$，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix},$$

求 $A$ 及 $A^5$.

【解】先求出 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$,因 $AP=PB$,故

$$A=PBP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}.$$

$$A^5=\underbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}_{5个A}=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdot\cdots\cdot(PBP^{-1})$$

$$=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}.$$

【例 2.13】设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,求 $A^n$.

【解】**方法一:**用数学归纳法.

因为 $$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

一般地,设 $A^{n-1}=\begin{bmatrix}1&0&n-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则

$$A^n=A^{n-1}\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&n-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

由数学归纳法知 $$A^n=\begin{bmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

**方法二:**因为 $A$ 是初等矩阵,$A^n=E\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}_{n个A}$,相当于对 $E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 施行 $n$ 次列

初等变换(把第一列加到第三列),故

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

**方法三:**利用对角阵和主对角线为零的上三角阵幂的特点进行计算.

令 $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

其中 $$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$ 则

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{E}^n+n\cdot\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2!}\boldsymbol{E}^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+n\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{n-1}+\boldsymbol{B}^n.$$

因为 $\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{B}^k=0(k\geqslant 2)$,

故有 $$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{E}^n+n\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

## 题型三　有关初等矩阵的命题

**提示** 要求熟悉初等矩阵的性质:初等矩阵均为可逆矩阵且 $\boldsymbol{E}^{-1}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$,$\boldsymbol{E}^{-1}[i(k)]=\boldsymbol{E}^{-1}\left[i\left(\frac{1}{k}\right)\right]$,$\boldsymbol{E}^{-1}[i,j+i(k)]=\boldsymbol{E}[i,j+i(-k)]$. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行(列)变换,相当于左(右)乘同类型的初等矩阵.

**【例 2.14】**设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{pmatrix}$,$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

且 $P^mAQ^n=B$,则

(A)$m=5,n=6$　　(B)$m=6,n=5$

(C)$m=5,n=5$　　(D)$m=6,n=6$　　【　】

**【解】**B是A经过交换第一、二行,再交换二、三列所得结果,且 $P^2=Q^2=E$,因此当 $m,n$ 均为奇数时,有 $P^m=P$,$Q^n=Q$,从而 $P^mAQ^n=PAQ=B$,故选(C).

**【例 2.15】**设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $\boldsymbol{B}^*$.　(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $-\boldsymbol{B}^*$.　(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

【　】

**【解】**由题设,存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{12}$(交换 $n$ 阶单位矩阵的第1行与第2行所得),使得 $\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,于是

$$\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}_{12}^*=\boldsymbol{A}^*\left|\boldsymbol{E}_{12}\right|\cdot\boldsymbol{E}_{12}{}^{-1}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}_{12},$$

即 $A^* E_{12} = -B^*$，可见应选(C).

【例 2.16】设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$，

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $A$ 可逆，则 $B^{-1}$ 等于

(A) $A^{-1}P_1P_2$.　　(B) $P_1A^{-1}P_2$.

(C) $P_1P_2A^{-1}$.　　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

【解】通过观察易见，矩阵 $B$ 是通过交换矩阵 $A$ 的第 2、第 3 列和交换第 1、第 4 列后得到的. 即 $B = AP_2P_1$，于是 $B^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}$，故应选(C).

## 题型四　解矩阵方程

提示 (1) 先化简，将给出的关系式变为

$$AX = B \quad 或\ XA = B \quad 或\ AXC = B.$$

(2) 再通过左乘或右乘可逆矩阵将以上形式分别变为

$$X = A^{-1}B \quad 或\ X = BA^{-1} \ 或\ X = A^{-1}BC^{-1}.$$

注 若 $A$ 不可逆，则一般转化为解方程组.

【例 2.17】设 $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，

矩阵 $X$ 满足关系式：$X(E - C^{-1}B)^{T}C^{T} = E$，求 $X$.

【解】$X(E - C^{-1}B)^{T}C^{T} = X[C(E - C^{-1}B)]^{T} = X(C - B)^{T}$，

于是原关系式变为　$X(C - B)^{T} = E$，

所以　$X = [(C - B)^{T}]^{-1}$.

而 $C - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$(C - B)^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，

又 $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$，

故
$$X=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

**【例 2.18】**设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 $X$ 满足 $AX+E=A^2+X$,试求矩阵 $X$.

**【解】**由于 $AX+E=A^2+X$,即

$$(A-E)X=A^2-E=(A-E)(A+E),$$

因为 $A-E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$是可逆矩阵,所以

$$X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}.$$

**【例 2.19】**设矩阵 $A$ 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$,且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,其中 $E$ 为四阶单位矩阵,求矩阵 $B$.

**【解】方法一:**因为 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 有 $|A|^3=8$, 得 $|A|=2$.

又$(A-E)BA^{-1}=3E$,有$(A-E)B=3A$.

从而 $A^{-1}(A-E)B=3E$,由此得$(E-A^{-1})B=3E$,

即$\left(E-\dfrac{1}{|A|}A^*\right)B=3E$,亦即$(2E-A^*)B=6E$.

又 $2E-A^*$ 为可逆矩阵,于是

$$B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}.$$

**方法二:**由 $|A^*|=|A|^{n-1}$,得 $|A|=2$.

又由 $AA^*=|A|E$,对 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,先右乘 $A$,再左乘 $A^*$,得

$$A^*AB=A^*B+3A^*A,$$
$$|A|B=A^*B+3|A|E,$$

即
$$(2E-A^*)B=6E.$$

于是
$$B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

## 题型五　求矩阵的秩

**提示** 求矩阵秩的基本方法有：① 定义法；② 初等变换法(可以行列初等变换并用)；③ 利用向量组求秩法.

**【例 2.20】** 求下列矩阵的秩：

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}.\qquad(2)\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&9\\5&6&7&8&9&10\end{bmatrix}.$$

**【解】**(1)
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)-(1)}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(5)-(2)]{(3)-(2)}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=5$.

$$(2)\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&9\\5&6&7&8&9&10\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{一行依次减前一行}]{\text{从最后一行开始,后}}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{B})=2$.

**【例 2.21】** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}$，且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$ ________.

【解】因为秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，故行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，可解得 $k=-3,k=1$. 当 $k=1$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，不合题意，故 $k=-3$.

注 作为填空题，若已排除 $k=1$，则 $k=-3$ 不必代入验算.

【例 2.22】设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，$A=\begin{pmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{pmatrix}$，求 $r(A)$

【解】$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+(n-1)&1&1&\cdots&1\\a+(n-1)&a&1&\cdots&1\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\a+(n-1)&1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$

$$=[a+(n-1)]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&a-1&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-1\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)](a-1)^{n-1}$$

(1) 当 $a\neq 1-n$ 且 $a\neq 1$ 时，$|A|\neq 0\Rightarrow R(A)=n$

(2) 当 $a=1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1&1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=1$

(3) 当 $a=1-n$ 时，$|A|=0$，$A$ 的 $n-1$ 阶顺序主子式

$$\begin{vmatrix}1-n&1&1&\cdots&1\\1&1-n&1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1-n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1&\cdots&1\\-1&1-n&1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\-1&1&1&\cdots&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&1&1&\cdots&1\\0&-n&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n^{n-2}\neq 0$$

$r(A)=n-1$

## 题型六　关于矩阵对称、反对称命题的证明

提示 用矩阵的对称与反对称的定义.

【例 2.23】设 $A$ 是对称矩阵，$B$ 是反对称矩阵，则 $AB$ 是反对称矩阵 $\Leftrightarrow AB = BA$.

【证】"$\Rightarrow$" 即已知 $A = A^{T}, B = -B^{T}$，且 $AB = -(AB)^{T}$，要证 $AB = BA$.

因为 $(AB)^{T} = B^{T}A^{T} \xlongequal[B^{T}=-B]{\text{因为 } A^{T}=A} -BA$，又 $AB = -(AB)^{T}$，

所以 $-BA = -AB \Rightarrow AB = BA$.

"$\Leftarrow$" 即已知 $A = A^{T}, B = -B^{T}, AB = BA$，要证 $AB = -(AB)^{T}$.

因为 $AB = BA$，所以 $(AB)^{T} = (BA)^{T}$，$(BA)^{T} = A^{T}B^{T} \xlongequal[B^{T}=-B]{\text{因为 } A^{T}=A} -AB$，

于是 $(AB)^{T} = -AB$，　即 $AB = -(AB)^{T}$.

【例 2.24】证明任何一个 $n$ 阶方阵都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

【证】本题与高数中证明任何一个函数可表示成一个奇函数与偶函数之和的构造法类似.

设 $A^{T}$ 为矩阵 $A$ 的转置.

令 $B = \dfrac{A + A^{T}}{2}$，因为 $B^{T} = \dfrac{1}{2}(A^{T} + (A^{T})^{T}) = \dfrac{1}{2}(A^{T} + A) = B$—— 对称矩阵.

令 $C = \dfrac{A - A^{T}}{2}$，因为 $C^{T} = \left(\dfrac{A - A^{T}}{2}\right)^{T} = \dfrac{1}{2}(A^{T} - A) = -\dfrac{1}{2}(A - A^{T})$—— 反对称矩阵.

显然有 $A = B + C$，故命题得证.

## 题型七　关于方阵 A 可逆的证明

提示 思路之一：验证方阵 $A$ 所对应行列式 $|A| \neq 0$，适用于矩阵 $A$ 已给出具体元素的形式.

思路之二：求一个与 $A$ 同阶的方阵 $B$，若 $AB = E$(或 $BA = E$)，即可证 $A$ 可逆.

适用于矩阵 $A$ 为抽象的形式.

思路之三：反证法.

【例 2.25】设 $A, B$ 均为 $n$ 阶方阵，$E$ 为 $n$ 阶单位阵，证明：

(1) 若 $A + B = AB$，则 $A - E$ 可逆.

(2) 若 $E - AB$ 可逆，则 $E - BA$ 可逆，并求其逆.

【证】(1) $A + B = AB \Rightarrow A = (A - E)B \Rightarrow (A - E) + E = (A - E)B$

$\Rightarrow (A - E)(B - E) = E$，$|A - E||B - E| = 1$，$|A - E| \neq 0$.

故 $A - E$ 可逆.

(2) 用反证法：若 $E - BA$ 不可逆，则 $|E - BA| = 0$，于是存在一个 $X \neq 0$，使

$$(E - BA)X = 0 \Rightarrow X = BAX.$$

令 $Y = AX$，则 $X = BY \Rightarrow Y \neq 0$(否则 $X = 0$).

又 $(E - AB)Y = Y - ABY = Y - AX = 0$，这与 $(E - AB)$ 可逆矛盾. 故 $E - BA$ 可逆.

【另证】因为 $E - AB$ 可逆，所以存在 $n$ 阶可逆矩阵 $C$，使

$C(E - AB) = (E - AB)C = E \Rightarrow CAB = ABC = C - E$,

从而 $B(ABC)A = B(C - E)A \Rightarrow E + BCA - BA - BABCA = E$,

即 $(E - BA)(E + BCA) = E$，故 $E - BA$ 可逆，且 $(E - BA)^{-1} = E + BCA$.

【例 2.26】设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆,证明:

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$,

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

【证】(1) 因为 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})[\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})]^{-1}$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{E}$,

所以 $$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}.$$

同理可证 $$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

(2) 由(1)的结果,有

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim\sim\sim}{(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}}\boldsymbol{A}^{-1}]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\underset{\sim\sim\sim}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}^{-1}]$

$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}]\boldsymbol{A}^{-1}$

$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}]\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$,

故 $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

## 题型八 与 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有关联的命题的证明

提示 一般用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 进行讨论.

【例 2.27】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,证明:当 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$ 时,$\boldsymbol{A}$ 可逆.

【证】因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$,所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=0$,设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,\cdots,n)$,

于是 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=0(i=1,\cdots,n)\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_i=0\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

这与 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵矛盾,故 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,即 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

【例 2.28】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$.

【证】因为 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,所以

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}.$$

【例 2.29】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵 $(n\geqslant3)$,证明:$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

【证】由公式 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E}$,有 $(\boldsymbol{A}^*)^*\cdot\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{E}$,

又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$,所以 $(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{E}$.

(1) 若 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|},$$

即 $$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $|\boldsymbol{A}^*|=0$,则 $|\boldsymbol{A}|=0$.(若不然 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,则 $|\boldsymbol{A}^*|\neq0$ 矛盾!)

当 $n>2$ 时,$r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant1$,于是 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*]=0$,故 $(\boldsymbol{A}^*)=\boldsymbol{O}$.

因此 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

【例 2.30】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为整数,证明:$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素均为整数 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

【证】"$\Rightarrow$" $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$, $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素均为整数,所以 $|\boldsymbol{A}^{-1}|$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 均为整数.

故 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

"$\Leftarrow$" 因为 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为整数,所以伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的元素均为整数,

又 $A^{-1}=|A|^{-1}A^*$，$|A|=\pm 1$，故 $A^{-1}$ 的元素均为整数.

【例 2.31】设矩阵 $A$ 可逆，且 $A$ 的每行元素之和均等于常数 $a$，试证：

(1)$a\neq 0$；(2)$A^{-1}$ 的每行元素之和都等于$\frac{1}{a}$.

【证】(1)$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

若 $a=0$，则 $|A|=0$，这与 $A$ 可逆即 $|A|\neq 0$ 矛盾，故 $a\neq 0$.

(2) 令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$A^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$E=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，

因为 $A^{-1}A=E$，所以 $A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{e}_j$，$(j=1,2,\cdots,n)$.

于是 $A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1+A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_n=A^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n$,

即 $A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. 又 $A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_n)\begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_n)a$,

所以$(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n)a=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$，故$(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n)=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix}$.

## 题型九　关于矩阵秩的命题的证明

### 1. 关于矩阵秩的不等式的证明

提示 思路之一：通常是通过矩阵的初等变换化为矩阵最简型，再进行分析.

思路之二：利用分块矩阵的乘法，结合齐次方程组进行分析.

【例 2.32】设 $A,B$ 均为 $n$ 阶方阵，证明：$r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$.

【证】设 $r(A)=r$，$r(B)=s$，则有

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix},P_2BQ_2=\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

于是 $$P_1ABQ_2=P_1AQ_1(Q_1^{-1}P_2^{-1})P_2BQ_2.$$

令 $C=Q_1^{-1}P_2^{-1}=(c_{ij})_{n\times n}$,

则 $$P_1ABQ_2=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}=C_*,$$

又可知任一矩阵每减少一行(或列)，其秩减少不超过 1，而 $r(C)=n$，

故 $r=(AB)=r(C_*)\geqslant n-(n-r)-(n-s)=r+s-n$.

【例 2.33】设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $r(AB)\leqslant\min[r(A),r(B)]$.

【证】设 $r(A)=r$，$r(B)=s$,

则存在 $m$ 阶可逆矩阵 $P_1$ 及 $s$ 阶可逆矩阵 $Q_1$，使

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}.$$

同理,存在 s 阶可逆矩阵 $P_2$ 及 $n$ 阶可逆矩阵 $Q_2$,使

$P_2BQ_2=\begin{bmatrix}E_s & O\\ O & O\end{bmatrix}$. 于是 $P_1ABQ_2=P_1AQ_1(Q_1^{-1}P_2^{-1})P_2BQ_2$,令 $C=Q_1^{-1}P_2^{-1}=(c_{ij})_{s\times s}$,

则 $$P_1ABQ_2=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{s1} & \cdots & c_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_s & O\\ O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1s} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} & \\ & 0 & & 0\end{bmatrix},$$

故 $$r(AB)=r(P_1ABQ_2)=r\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{r1} & \cdots & c_{rs}\end{bmatrix}\leqslant\min(r,s)=\min[r(A),r(B)].$$

**【例 2.34】** 设 $A$ 与 $B$ 均为 $n$ 阶方阵,若 $AB=O$,则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

**【证】** 设矩阵 $B$ 的列向量为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,则由分块矩阵的乘法

有 $$A\cdot B=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=(0,0,\cdots,0),$$

于是 $$A\beta_j=0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

可见 $B$ 的列向量是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

设 $r(A)=r$,则此方程组的基础解系所含向量的个数为 $n-r$ 个.

于是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的秩 $\leqslant n-r$,即 $r(B)\leqslant n-r$,故 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

**2. 关于矩阵秩的等式的证明**

提示 $$r(A)=r(B)\Leftrightarrow r(A)\leqslant r(B)\text{ 且 }r(A)\geqslant r(B).$$

$$r(A)+r(B)=n\Leftrightarrow\begin{cases}AB=O\Rightarrow r(A)+r(B)\leqslant n,\\ A+B=kE\Rightarrow r(A)+r(B)\geqslant n,\\ \text{其中 }k\neq 0\text{ 为常数.}\end{cases}$$

**【例 2.35】** 设 $A,B$ 均为 $n$ 阶方阵,$ABA=B^{-1}$,$E$ 为 $n$ 阶单位阵,证明:

$$r(E-AB)+r(E+AB)=n.$$

**【证】** 因为 $ABA=B^{-1}\Rightarrow ABAB=E\Rightarrow(E-AB)(E+AB)=O$,

所以 $$r(E-AB)+r(E+AB)\leqslant n. \quad ①$$

又 $$(E-AB)+(E+AB)=2E,$$

所以 $$r(E-AB)+r(E+AB)\geqslant r(2E)=n, \quad ②$$

由 ①,②,得 $$r(E-AB)+r(E+AB)=n.$$

自我练习:设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,且 $A^2-A=2E$,$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵,则 $r(2E-A)+r(E+A)=n$.

**【例 2.36】** 已知 $Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$,$P$ 为三阶非零矩阵,且满足 $PQ=O$,则 $r(P)=($ $)$.

(A) $t=6$ 时,$P$ 的秩必为 1. (B) $t=6$ 时,$P$ 的秩必为 2.

(C) $t\neq 6$ 时,$P$ 的秩必为 1. (D) $t\neq 6$ 时,$P$ 的秩必为 2.

**【解】** 因为 $P,Q$ 均为三阶方阵,又 $PQ=O$,

所以 $r(P)+r(Q)\leqslant 3$.

当 $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{Q})=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$ 的秩 $=1$，于是 $r(\boldsymbol{P})\leqslant 2$，

当 $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{Q})=2$，于是 $r(\boldsymbol{P})\leqslant 1$，

又 $r(\boldsymbol{P})\geqslant 1$（$\boldsymbol{P}$ 为三阶非零方阵），故 $r(\boldsymbol{P})=1$，即(C)入选.

## 第 3 节　思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势 1**　题设条件与代数余子式 $A_{ij}$ 或 $\boldsymbol{A}^*$ 有关，则立即联想到用行列式按行(列)展开定理及 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

**【例 2.37】** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$，其行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$，又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 $\lambda_0$，属于 $\lambda_0$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$，求 $a,b,c$ 和 $\lambda_0$ 的值.

**【解】** 题设与 $\boldsymbol{A}^*$ 有关，利用公式 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 化简.

由已知，有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow \boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}.$$

而 $|\boldsymbol{A}|=-1$，于是 $\lambda_0\boldsymbol{A\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$，

即
$$\lambda_0\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

也即
$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1, & ①\\ \lambda_0(-5-b+3)=1, & ②\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & ③\end{cases}$$

由式 ① 和式 ③，解得 $\lambda_0=1$，将 $\lambda_0=1$ 代入式 ② 和式 ①，得 $b=-3,c=a$. 再由 $|\boldsymbol{A}|=-1$，有

$$\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1,$$

得 $a=2,b=-3,c=2,\lambda_0=1$.

**思维定势 2**　若涉及 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否可交换，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则立即联想到用逆矩阵的定义去分析.

**【例 2.38】** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆；(2) 证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

**【证】** (1) 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，

有 $AB-A-B+E=E \Rightarrow (A-E)(B-E)=E$,

故 $A-E$ 可逆,且$(A-E)^{-1}=B-E$.

(2) 由(1) 知,$A-E$ 与 $B-E$ 互为逆矩阵,于是由逆矩阵的定义知

$$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E),$$

即 $AB=BA$.

**思维定势3** 若题设 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $f(A)=0$,要证 $aA+bE$ 可逆,则先分解出因子 $aA+bE$ 再说.

【例 2.39】已知 $A,B$ 为三阶矩阵,且满足 $2A^{-1}B=B-4E$,其中 $E$ 是三阶单位矩阵.

(1) 证明:矩阵 $A-2E$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,求矩阵 $A$.

【解】(1) 从 $2A^{-1}B=B-4E$ 中设法分解出因子 $A-2E$.

$$\begin{aligned}2A^{-1}B=B-4E &\Rightarrow 2B=AB-4A\\&\Rightarrow AB-4A-2B=O\\&\Rightarrow AB-2B-(4A-8E)=8E\\&\Rightarrow (A-2E)B-4(A-2E)=8E\\&\Rightarrow (A-2E)(B-4E)=8E,\end{aligned}$$

即
$$(A-2E)\cdot\frac{1}{8}(B-4E)=E,$$

故 $A-2E$ 可逆,且$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

(2) 由(1) 知 $A-2E=8\cdot(B-4E)^{-1}\Rightarrow A=2E+8\cdot(B-4E)^{-1}$

$$=2E+8\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

## 二、综合题解析

【例 2.40】设 $X,Y$ 是独立同分布的离散型随机变量,分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

,求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&1&X+2\\-2&-2&Y\end{bmatrix}$$的秩为 2 的概率.

【解】对 $A$ 施行初等变换 $A\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&4&X-4\\0&0&X+Y\end{bmatrix}$,

因为 $r(A)=2$,所以 $X+Y=0$. 又 $X+Y$ 的分布律为

| $X+Y$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|

| $P$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |
|---|---|---|---|---|---|

所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2 的概率为

$$P\{X+Y=0\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

【例 2.41】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$n<m$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=b$ 有唯一解. 证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可逆.

【证】因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，即 $\exists\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{Ax}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}_0)=\boldsymbol{0}$.

所以 $\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，与已知相矛盾.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可逆.

【例 2.42】设 $n$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $n$ 维列向量 $(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $n$ 维非零列向量，且与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 均正交，则 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta})$ 可逆.

【证】证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆即证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. 令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+k_n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0},$$

两边左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，即

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+k_n\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq0$，

所以 $k_n\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，即 $k_n=0$，有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{0}$，

又因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关.

因为 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. 即 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

## 习 题 二

**1. 填空题.**

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 4 维列向量，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}]$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}|=$ ________.

(2) 若对任意的 $n\times1$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$，均有 $\boldsymbol{AX}=0$，则 $\boldsymbol{A}=$ ________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m$ 阶方阵，存在非零的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，则存在两个不相等的 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 的充分条件是________.

(5) $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}[b_1b_2\cdots b_n]=$ ________.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$ ________.

(7) 若 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

(8) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})=$ ________.

(9) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ ________，$[(-2\boldsymbol{A})^*]^{-1}=$

________.

(10) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

**2. 选择题.**

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则

A. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.　　B. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

C. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.　　D. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

【　】

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶可逆矩阵，则 $\left|-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}\right|$ 等于

A. $(-2)^{2n}\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|^{-1}$.　　B. $(-2)^{n}\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|^{-1}$.

C. $-2\,|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\,|\boldsymbol{B}|$.　　D. $-2\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|^{-1}$.　【　】

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶方阵，下面结论正确的是

A. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆.　　B. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆.

C. 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆.　　D. 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆.　【　】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，下列正确的是

A. 对 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

B. 对 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

C. 对 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，若 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

D. 对任意非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}>0$.　【　】

(5) 设 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{AB}=$

A. $\boldsymbol{O}$.　　B. $-\boldsymbol{E}$.　　C. $\boldsymbol{E}$.　　D. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.　【　】

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & a_{33}-a_{23}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，

设有 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{P}_2=$

A. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　B. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　C. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　D. $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

【　】

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，则 $(-\boldsymbol{A})^*$ 等于

A. $-\boldsymbol{A}^*$.　　B. $\boldsymbol{A}^*$.　　C. $(-1)^n\boldsymbol{A}^*$.　　D. $(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.　【　】

(8) 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异 $(n\geqslant 2)$，$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

A. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$.　　B. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$.

C. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.　　D. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$.　【　】

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 $r_1$，则

A. $r > r_1$. B. $r < r_1$.

C. $r = r_1$. D. $r$ 与 $r_1$ 的关系依 $C$ 而定. 【 】

(10) 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶非零矩阵,且 $AB = 0$,则 $A$ 和 $B$ 的秩

A. 必有一个等于零. B. 都小于 $n$.

C. 一个小于 $n$,一个等于 $n$. D. 都等于 $n$. 【 】

**3. 计算证明题.**

(1) 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. 求 ①$AB - BA$;②$A^2 - B^2$;③$B^TA^T$.

(2) 求下列矩阵的逆矩阵:

① $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;② $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;③ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;④ $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) 已知三阶矩阵 $A$ 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i (i = 1,2,3)$,其中 $\alpha_1 = (1,2,2)^T$,$\alpha_2 = (2,-2,1)^T$,$\alpha_3 = (-2,-1,2)^T$,试求矩阵 $A$.

(4) $k$ 取什么值时,矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆,并求其逆.

(5) 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,且有自然数 $m$,使 $(E+A)^m = 0$,则 $A$ 可逆.

(6) 设 $B$ 为可逆矩阵,$A$ 是与 $B$ 同阶的方阵,且满足 $A^2 + AB + B^2 = O$,证明:$A$ 和 $A+B$ 都是可逆矩阵.

(7) 若 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵,且 $E + AB$ 可逆,则 $E + BA$ 也可逆,且 $(E+BA)^{-1} = E - B(E+AB)^{-1}A$.

(8) 设 $A,B$ 是 $n$ 阶方阵,已知 $|B| \neq 0$,$A - E$ 可逆,且 $(A-E)^{-1} = (B-E)^T$,求证:$A$ 可逆.

(9) 设 $A,B,A+B$ 为 $n$ 阶正交矩阵,试证:$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

(10) 设 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵,试证明:$\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = |AB - E|$.

(11) 设 $A$ 为主对角元素均为零的四阶实对称可逆矩阵,$E$ 为四阶单位矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}, (k > 0, l > 0)$$

① 试计算 $|E + AB|$,并指出 $A$ 中元素满足什么条件时,$E + AB$ 可逆;

② 当 $E + AB$ 可逆时,试证明 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

(12) 计算下列各题:

① $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$; ② $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

(13) 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，求 $A^n$.

(14) 假设 $A$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，证明：①$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$；　②$(A^T)^*=(A^*)^T$；　③$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$；　④$[(A^{-1})^T]^*=[(A^*)^T]^{-1}$.

(15) $A$ 是 $n$ 阶方阵，满足 $A^m=E$，其中 $m$ 为正整数，$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，今将 $A$ 中 $n^2$ 个元素 $a_{ij}$ 用其代数余子式 $A_{ij}$ 代替，得到的矩阵记为 $A_0$，证明 $A_0^m=E$.

(16) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，

① 证明：$n\geqslant 3$ 时，$A^n=A^{n-2}+A^2-E$（$E$ 为三阶单位矩阵）；

② 求 $A^{100}$.

(17) 当 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时，$A^6=E$，求 $A^{11}$.

(18) 已知 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵，且满足 $A^2=A,B^2=B$ 与 $(A-B)^2=A+B$，试证：$AB=BA=O$.

(19) 设 $A,B,C$ 均为 $n$ 阶矩阵，$|E-A|\neq 0$，如果 $C=A+CA,B=E+AB$，求证：$B-C=E$.

(20) 设 $A$ 为 $n$ 阶非奇异矩阵，$\alpha$ 为 $n$ 维列向量，$b$ 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix}E & O\\ -\alpha^TA^* & |A|\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & b\end{bmatrix},$$

① 计算并化简 $PQ$；

② 证明：矩阵 $Q$ 可逆的充要条件是 $\alpha^TA^{-1}\alpha\neq b$.

## 参　考　答　案

**1.** (1)56；　(2)0；　(3) $|A|=0$；　(4) $|A|=0$；

(5) $\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$；　(6) $\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$；　(7) $-\frac{1}{3}(A+2E)$；

(8) $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$；　(9) $\begin{bmatrix}3 & 9 & 4\\ -2 & -5 & -2\\ -2 & -7 & -3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 3\end{bmatrix}$，$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 3\end{bmatrix}$；

(10) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 19 & -30 & 3 & -5\\ -7 & 11 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

**2.** (1)D　(2)A　(3)B　(4)A　(5)C　(6)B　(7)D　(8)C　(9)C　(10)B

**3.** (1)① $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -17 & -17 & 3 \\ 9 & -18 & 16 \end{bmatrix}$；② $\begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ -15 & -15 & 9 \\ -3 & 26 & -13 \end{bmatrix}$；③ $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 17 \\ -5 & 1 & -3 \\ 5 & 11 & 22 \end{bmatrix}$.

(2) ① $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；　② $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

③ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；　④ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

(4) 当 $k \neq 0$ 时可逆. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ -1 & \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix}$.

(5) 因 $E$ 与 $A$ 可交换，且能证明 $(E+A)^m$ 可用二项式定理展为

$$(E+A)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i A^i E^{m-i} = (\sum_{i=1}^{m} C_m^i A^{i-1})A + E = 0.$$

令 $B = -\sum_{i=1}^{m} C_m^i A^{i-1}$，有 $BA = E$，所以 $A$ 可逆，且 $A^{-1} = -\sum_{i=1}^{m} C_m^i A^i - 1$.

(6) ～ (10) 略.

(11) ① $E+AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ka_{13} & la_{14} \\ 0 & 1 & ka_{23} & la_{24} \\ 0 & 0 & 1 & la_{34} \\ 0 & 0 & ka_{34} & 1 \end{bmatrix}$，$|E+AB| = 1 - kla_{34}^2$.

当 $a_{34}^2 \neq \frac{1}{kl}$ 时，$E+AB$ 为可逆矩阵.

②$(E+AB)^{-1}A = [A^{-1}(E+AB)]^{-1} = (A^{-1}+B^{-1})$，由于 $A, B$ 都是对称矩阵，$A^{-1}+B$ 也是对称矩阵，故 $(E+AB)^{-1}A$ 也是对称矩阵.

(12)① $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} E, & \text{当 } n \text{ 为偶数}, \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}. \end{cases}$　② $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(13) $\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}$.

(14) 略.

(15) 由已知 $A^m = E$, $|A^m| = 1$, $|A| \neq 0$,则 $A$ 为可逆矩阵, $A_0 = (A^*)^T = [|A|A^{-1}]^T$ $= |A|(A^T)^{-1}$,

故 $A_0^m = [|A|(A^T)^{-1}]^m = |A|^m[(A^m)^T]^{-1} = 1 \cdot [(E)^T]^{-1} = E.$

(16) 略.

(17) 因为 $|A| = 1$,所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

由 $A^6 = E$,有 $A^{11} = A^{12} \cdot A^{-1} = (A^6)^2 A^{-1} = EA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(18) 略. (19) 略.

(20) 利用 $AA^* = A^*A = |A|E$.

# 第三章　向　　量

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、向量的概念与运算

**1. 向量的概念**

$n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$记作

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

称为 $n$ 维行向量.其中 $a_i$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 $i$ 个分量.

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix},$$

称为 $n$ 维列向量,$\boldsymbol{\beta}$ 可改写成 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$.

**2. 向量的运算**

向量相等:两个 $n$ 维向量当且仅当它们各对应分量都相等时,才是相等的.即如果 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

零向量:所有分量均为零的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$.

负向量:$n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的各分量的相反数组成的 $n$ 维向量,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{\alpha}$,即

$$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n).$$

向量的运算:设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,则

1° $\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)$,

2° $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$.

### 二、向量间的线性关系

**1. 线性组合**

对于给定向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使关系式

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

成立,则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解,相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 是否可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示.

注 (1) 零向量是任何一组向量的线性组合.

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 都是此向量组的线性组合.

(3) 任何一个 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是 $n$ 维基本单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$ 的线性组合，且

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

### 2. 线性相关与线性无关

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一组 $n$ 维向量，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；如果上述等式仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 是否有非零解，等同于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是否线性相关.

注 (1) 单个非零向量线性无关.

(2) 含有零向量的向量组一定线性相关.

(3) 基本单位向量组一定线性无关.

(4) 两个向量线性相关的充要条件是对应元素成比例.

【例 3.1】若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示. (B) $\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示. (D) $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示. 【 】

【解】因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，又已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，于是 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，$\boldsymbol{\delta}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}$，从而有 $\boldsymbol{\delta}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+0\cdot\boldsymbol{\gamma}$，即 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示，故应选(C).

## 三、向量组的秩和矩阵的秩

### 1. 极大线性无关组

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一个 $n$ 维向量组，如果向量组中有 $r$ 个向量线性无关，且向量组的任意 $r+1$ 个向量线性相关，则这 $r$ 个线性无关的向量称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.

若 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性无关部分组，它是极大线性无关组的充分必要条件是：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表示.

注 (1) 含有非零向量的向量组一定存在极大线性无关组.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则其极大线性无关组就是自身.

### 2. 向量组的等价性

设有向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，如果向量组(Ⅰ)的每个向量都可以由向量组(Ⅱ)线性表示，则称向量组(Ⅰ)可以由向量组(Ⅱ)线性表示.

如果向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)可以相互线性表示，则称向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)等价，记为

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}.$$

向量组等价具有反身性、对称性、传递性.

注 (1) 任一向量组和它的极大无关组等价.

(2) 向量组的任意两个极大无关组等价.

(3) 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同.

(4) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同.

### 3. 向量组的秩

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数称为此向量组的秩，记作秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 或 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$. 如果一个向量组仅含有零向量，则规定它的秩为零.

等价的向量组具有相同的秩.

### 4. 矩阵的秩

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，则有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩和列向量组的秩相等. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩统称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为秩$(\boldsymbol{A})$ 或 $r(\boldsymbol{A})$.

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩也可用行列式来定义：

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $r$ 的充要条件是：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $r$ 阶子式不等于零，而所有 $r+1$ 阶子式都等于零.

注 (1) 矩阵秩的两种定义是等价的.

(2) 对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，有

当秩 $r(\boldsymbol{A})=m$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关；

当秩 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关；

若秩 $r(\boldsymbol{A})=m$ 或秩 $r(\boldsymbol{A})=n$，称 $\boldsymbol{A}$ 为行(或列)满秩矩阵.

(3) 矩阵的初等行(列)变换不改变矩阵的秩，且不改变其列(行)向量间的线性关系.

(4) 求向量组的秩可转化为求矩阵的行(列)向量组的秩，从而可用初等变换求其秩.

## 四、向量空间

### 1. 向量空间*

设 $\boldsymbol{S}$ 是 $n$ 维向量的非空集合，且 $\boldsymbol{S}$ 中向量对于加法和数乘运算是封闭的，则称 $\boldsymbol{S}$ 构成一向量空间.

### 2. 子空间*

若 $\boldsymbol{S}_1$ 是向量空间 $\boldsymbol{S}$ 的一个非空子集，且对 $\boldsymbol{S}$ 中的加法和数乘两种运算是封闭的，则称 $\boldsymbol{S}_1$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的子空间.

注 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的所有解向量的集合构成一向量空间，称为解空间.

### 3. 基底*

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为向量空间 $\boldsymbol{S}$ 中的一个线性无关的向量组，且 $\boldsymbol{S}$ 中任一向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为向量空间 $\boldsymbol{S}$ 中的一个基底.

### 4. 维数*

向量空间中，基底所含向量的个数，称为此向量空间的维数. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为向量空间 $\boldsymbol{S}$ 的一个基底，则其维数为 $n$，称为 $n$ 维向量空间，记为 $\boldsymbol{R}^n$.

### 5. 坐标*

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $n$ 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基，对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}^n$，存在唯一一组数，使

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{x},$$

则有序数组 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

### 6. 基变换与坐标变换*

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的两组基，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{P}$$

称为基变换公式.其中可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$,

即 $\boldsymbol{\alpha}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,

则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 或 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 称为坐标变换公式.

### 7. 内积

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,则定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

向量的长度:$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

正交:若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是正交的.

内积具有性质:

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

(3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$.

### 8. 施密特(Schmidt)正交化方法

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中一组线性无关的向量,令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1},\boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1},$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 相互正交.

### 9. 规范正交基与正交矩阵

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中一组基,先将其正交化得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,再将其单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}$,$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|},\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=\frac{\boldsymbol{\beta}_n}{|\boldsymbol{\beta}_n|}$,则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 满足:

$$(\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j)=0,i\neq j;\quad |\boldsymbol{\eta}_i|=1,i=1,2,\cdots,n.$$

称其为 $\mathbf{R}^n$ 中的一组规范正交基.

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]$,则 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,称为正交矩阵.

正交矩阵具有性质：

(1)$Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$.

(2)$|Q| = \pm 1$.

(3)若 $Q_1, Q_2$ 均为正交矩阵，则 $Q_1Q_2, Q_2Q_1$ 仍为正交矩阵.

## 五、重要定理与公式

**定理 1** 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量可由其余的 $m-1$ 个向量线性表出.

**定理 2** 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，且表示法唯一.

**定理 3** 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 也线性相关. 向量组部分相关，整体相关；整体无关，部分无关.

**定理 4** 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则无论如何扩充向量组各向量的分量，所得向量组仍线性无关. 若一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则添加分量后仍无关；一个向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关.

**【例 3.2】** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,2,-2), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,3,-x,-2x), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,6,0)$，若此向量组的秩为 2，则 $x =$ ______.

**【解】** 取向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的前三个分量构成向量组 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_1} = (1,1,2), \widetilde{\boldsymbol{\alpha}_2} = (1,3,-\boldsymbol{x}), \widetilde{\boldsymbol{\alpha}_3} = (1,-1,6)$，则 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_1}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}_2}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}_3}$ 线性相关，否则添加分量后得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 仍线性无关，与已知矛盾. 从而有

$$|[\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_1}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}_2}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}_3}]| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -x & 6 \end{vmatrix} = 4 - 2x = 0, \text{得 } x = 2.$$

**定理 5** 向量组的个数大于向量组的维数，则此向量组线性相关.

**定理 6** $n$ 个 $n$ 维向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 由向量组所构成的矩阵对应的行列式 $\neq 0$.

**定理 7** 矩阵的秩等于矩阵的行(或列)向量组的秩.

**定理 8** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 $\boldsymbol{T}$ 的极大线性无关组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{T}$ 等价.

注 研究两个向量组是否等价，通常从通过研究它们的极大线性无关组是否等价入手.

**定理 9** 两个等价的线性无关组所含向量的个数相等.

**定理 10** 两个等价的向量组的秩相等.

**定理 11** 设有两个向量组 $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$；$\boldsymbol{B}: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$. 若向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{A}$ 所含向量个数 $r$ 不大于向量组 $\boldsymbol{B}$ 所含向量个数 $s$，即 $r \leqslant s$.

**定理 12** 若 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

## 六、小结

向量这章中定义多，定理多，抽象名词也多。但是，问题可归纳为以下三类.

**问题 1：** 一组向量之间的关系.

对于一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，考查 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关或线性相关或其中一个向量能否被其余向量线性表示. 这类问题利用线性相关性的定义或齐次线性方程组的解可以解决.

**问题 2**：一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 之间的关系.

考查 $\boldsymbol{\beta}$ 可否由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，若能表出，表示法是否唯一？若不能表示，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是否线性无关？这类问题可利用非齐次线性方程组的解来解决.

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$，令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$，若该方程有解，则可线性表示；若无解，则不能线性表示.

**问题 3**：两组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 之间的关系.

由于向量组与它的极大线性无关组等价，所以这类问题常常转化为研究两个向量组极大线性无关组之间的关系.

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　讨论向量组的线性相关性

**提示** (1) 定义法.　一般步骤为：假设有 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

要使上式成立，根据已知条件推断，若 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 至少有一个不为零，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；若当且仅当 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零上式才成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(2) $n$ 个 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件是行列式 $|[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]|=0$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是行列式 $|[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]|\neq 0$.

(3) 一般地，把向量组的向量作为矩阵的行（或列），得矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，通过初等变换求出其秩 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$. 若 $r=m(<m)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关（相关）；若 $r=n(<n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关（相关）.

**【例 3.3】** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$，

(1) 问 $t$ 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

(2) 问 $t$ 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(3) 当线性相关时，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

**【解】方法一**：用定义判别.

设有数 $k_1,k_2,k_3$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，即有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\ k_1+2k_2+3k_3=0,\\ k_1+3k_2+tk_3=0.\end{cases}$$

此齐次方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5$.

(1) 当 $t-5=0$，即 $t=5$ 时，方程有非零解，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

(2) 当 $t-5\neq 0$，即 $t\neq 5$ 时，方程组仅有零解，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(3) 当 $t=5$ 时，设 $\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$，可解得 $x_1=-1$，$x_2=2$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

**方法二**：由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个三维向量，故直接计算其行列式 $|[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]|=t-5$ 可知：(1) 当 $t=5$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；(2) 当 $t\neq 5$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；(3) 同方法一可得

$\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

**方法三：**由于矩阵

$$A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-5 \end{bmatrix},$$

所以(1) 当 $t = 5$ 时，$r(A) = 2$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；(2) 当 $t \neq 5$ 时，$r(A) = 3$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；(3) 同方法一，得 $\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

**【例 3.4】**设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，问当常数 $l, m$ 满足什么条件时，向量组 $l\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1, m\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3$ 也线性无关.

**【解】**若 $k_1(l\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1) + k_2(m\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_2) + k_3(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{0}$，即

$$(-k_1 + k_3)\boldsymbol{a}_1 + (k_1 l - k_2)\boldsymbol{a}_2 + (k_2 m - k_3)\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0},$$

从而 $\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ lk_1 - k_2 = 0, \\ mk_2 - k_3 = 0. \end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ l & -1 & 0 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = -lm - 1$，当 $lm \neq -1$ 时，方程组有唯一零解，即向量组

$$l\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1, m\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3$$

也线性无关.

**【例 3.5】**选择题.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组 $n$ 维向量，则下列正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 不线性相关，就一定线性无关.

(B) 如果存在 $s$ 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示. 【　】

(2) $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (3 \leqslant s \leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) 存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \boldsymbol{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示. 【　】

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量是其余向量的线性组合.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都是其余向量的线性组合. 【　】

(4) $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 均不是零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的个数 $s \leqslant n$.

(D) 某向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且表示式唯一　【　】

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则向量组

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.　【　】

(6) 设有任意两个 $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$，使 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$，则

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,a_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,a_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.　【　】

**【解】**(1)A，　(2)D，　(3)C，　(4)D，　(5)C，　(6)D.

**【分析】**(1) 从线性相关和线性无关的定义知，一组同维向量不是线性相关就一定是线性无关，故选(A). 存在全为零的数 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，对任意向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都成立，并不能说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则至少有一向量可以用其余向量线性表示，但不能说刚好 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 就可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，比如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示；同上即知(D) 不成立，故(B)，(C)，(D) 均不正确.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是其中任意一个向量都不能由其余向量线性表示，说明(C) 不成立；对于(A)，比如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0)$，存在不全为零的数 1，1，使得 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1)\neq\mathbf{0}$，但 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性相关，故(A) 不成立；部分无关，整体不一定无关，比如向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1)$，任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关(向量个数大于维数)，故(B) 不成立，只有(D) 为正确答案.

(3) (A) 和(B) 只是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分条件而非必要条件；对于(C)，(D) 两个答案，差别在于是有一个向量还是任意一个向量都是其余向量的线性组合，此两条都是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分条件，但(D) 非必要，故(C) 为正确选项.

(4) (A)，(C) 显然错误. 对于(B)，比如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1)$，其中任意两个向量不成比例，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关(个数大于维数)，故(B) 也不成立，只有(D) 是正确答案. 事实上，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，又存在 $k_1',k_2',\cdots,k'_s$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1'\boldsymbol{\alpha}_1+k_2'\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k'_s\boldsymbol{\alpha}_s$，从而有 $\boldsymbol{\beta}=(k_1+k_1')\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_2')\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+k'_s)\boldsymbol{\alpha}_s$，这里至少有一个 $i(1\leqslant i\leqslant s)$，使得 $k'_i\neq k_i+k'_i$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示式不唯一，矛盾. 说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. 或者从方程组的观点看，$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 有解，若秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$，则解不唯一(表示式不唯一)，必有秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(5) 由于　$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

故(A),(B),(D)向量组均线性相关,(C)为正确答案.

事实上,设

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)+k_4(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

即 $$(k_1-k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,故 $\begin{cases}k_1-k_4=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0,\\k_3+k_4=0.\end{cases}$

解得 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$,即(C)向量组线性无关.

(6) 由 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$,

整理得 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{0}$,

因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为零,根据定义知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m$,$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关,故(D)为正确选项.

注 判定由线性无关向量组Ⅰ线性表示的向量组Ⅱ的线性相关性问题时,可利用如下方法:

设 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$,且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m,\\\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{2m}\boldsymbol{\alpha}_m,\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_{s1}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_{s2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{sm}\boldsymbol{\alpha}_m,\end{cases}$$

即 $$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{11}&\boldsymbol{\alpha}_{21}&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_{s1}\\\boldsymbol{\alpha}_{12}&\boldsymbol{\alpha}_{22}&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_{s2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_{1m}&\boldsymbol{\alpha}_{2m}&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_{sm}\end{bmatrix}$$
$$=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]\boldsymbol{A}.$$

则当 $r(\boldsymbol{A})=s$ 时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关;$r(\boldsymbol{A})<s$ 时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

如本题中(5)中的(A),因为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$,所以 $r(A)<4$,

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关

**【例 3.6】**设 $a_1,a_2,\cdots,a_r(r\leqslant n)$ 是互不相同的数,

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1}),(i=1,2,\cdots,r).$$

问：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是否线性相关？

【解】$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_r\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_r^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{r-1}&a_2^{r-1}&a_3^{r-1}&\cdots&a_r^{r-1}\end{bmatrix},$$

因为 $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant r}(a_i-a_j)\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})=r$，

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

## 题型二 有关向量组线性相关性命题的证明

提示 思路之一：定义法

(1) 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为常数；

(2) 将上式展开整理，使之能直接利用题设条件，判断 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 的取值情况，或者对上式作某种变换，再利用题设条件，判断 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 的取值情况，从而可知向量组的线性相关或无关.

思路之二：将线性相关性的问题转化为齐次线性方程组有无非零解来分析.

【例 3.7】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，作线性组合：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_1\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_s,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\mu_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_s$. 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 线性无关，其中 $s\geqslant 2$，$\mu_i$ 为任意实数.

【证】令 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{0}$，即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_1\boldsymbol{\alpha}_s)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_s)+\cdots+k_{s-1}(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\mu_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{0},$$

展开整理得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+(k_1\mu_1+k_2\mu_2+\cdots+k_{s-1}\mu_{s-1})\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，

由题设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_{s-1}=k_1\mu_1+k_2\mu_2+\cdots+k_{s-1}\mu_{s-1}=0,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 线性无关.

【例 3.8】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\ (t>2)$ 线性无关，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{t-1},$$

证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关.

【证】设存在 $t$ 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{0}$，即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{t-1})=\boldsymbol{0},$$

经整理，得

$$(k_2+k_3+\cdots+k_t)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_3+\cdots+k_t)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_1+k_2+\cdots+k_{t-1})\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关，

所以 $$\begin{cases}k_2+k_3+\cdots+k_t=0, & ①\\k_1+k_3+\cdots+k_t=0, & ②\\\vdots & \vdots\\k_1+k_2+\cdots+k_{t-1}=0. & ⓣ\end{cases}$$

① + ② + ⋯ + ⓣ，得 $(t-1)(k_1+k_2+\cdots+k_t)=0$，

因为 $t>2$，$t-1\neq 0$，所以

$$k_1+k_2+\cdots+k_t=0,\qquad (t+1)$$

$$\text{(t+1)} - \text{①} \Rightarrow k_1 = 0,$$
$$\text{(t+1)} - \text{②} \Rightarrow k_2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$\text{(t+1)} \Rightarrow k_t = 0.$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关.

**【例 3.9】**设向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{bmatrix} = \boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{K}$ 为 $r\times s$ 矩阵,且向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关,证明:向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性无关的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的秩

$$r(\boldsymbol{K}) = r.$$

**【证】**"$\Leftarrow$"$r(\boldsymbol{K}) = r \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

用反证法:若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关,则存在不全为零的 $r$ 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,

使得 $$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{bmatrix} = \boldsymbol{0},\text{即}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,设 $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{k}_r\end{bmatrix}$,

所以 $$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{k}_r\end{bmatrix} = 0,$$

于是 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_r$ 线性相关,则 $r(\boldsymbol{K}) \neq r$,与假设矛盾.

"$\Rightarrow$" $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关 $\Rightarrow r(\boldsymbol{K}) = r$.

用反证法:若 $r(\boldsymbol{K}) \neq r$,则 $r$ 个 $s$ 维向量 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 线性相关.于是存在 $r$ 个不全为零的常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,使得

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_1\\ \boldsymbol{k}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{k}_r\end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关,与假设矛盾.

**【例 3.10】**证明 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix} \neq 0$,

其中,$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}$ 表示列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的转置,$i = 1,2,\cdots,n$.

**【证】**令 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$($n$ 阶方阵),

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$.又

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix},$$

$$|A^{\mathrm{T}}A|=|A|^2=D\Rightarrow |A|\neq 0 \text{ 与 } D\neq 0 \text{ 等价},$$

所以 $D\neq 0$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件.

【例 3.11】设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 为 $n-1$ 个线性无关的 $n$ 维列向量，$\eta_1,\eta_2$ 为两个不同的非零列向量，它们与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 正交，证明：$\eta_1,\eta_2$ 线性相关.

【证】由题设

$$\begin{cases}\alpha_1^T\eta_1=0\\ \alpha_2^T\eta_1=0\\ \cdots\\ \alpha_{n-1}^T\eta_1=0\end{cases},\begin{cases}\alpha_1^T\eta_2=0\\ \alpha_2^T\eta_2=0\\ \cdots\\ \alpha_{n-1}^T\eta_2=0\end{cases}$$

令 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \cdots\\ \alpha_{n-1}^T\end{pmatrix}$ 为 $(n-1)\times n$ 阶矩阵，于是 $A\eta_1=0,A\eta_2=0$，即 $\eta_1,\eta_2$ 为 $Ax=0$ 的两个解向量，因为有两个不同的解，所以秩小于等于 $n-1$，因为那 $n-1$ 个向量线性无关，所以秩大于等于 $n-1$，所以 $r(A)=n-1$，

由此可知 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量个数 $n-(n-1)=1$，又 $\eta_1,\eta_2$ 为 $Ax=0$ 的两个不同的非零解，故 $\eta_1,\eta_2$ 线性相关.

【例 3.12】设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，即 $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}c_{ij}\alpha_j\ i=1,2,\cdots,s$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关充要条件是 $C=(c_{ij})_{s\times r}$ 的秩小于 $s$.

【证】设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关，于是存在 $s$ 个不全为 0 的常数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使的

$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$，将 $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}c_{ij}\alpha_j$ 代入

$(c_{11}x_1+c_{21}x_2+\cdots+c_{s1}x_s)\alpha_1+(c_{12}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{s2}x_s)\alpha_2+\cdots+(c_{1r}x_1+c_{2r}x_2+\cdots+c_{sr}x_s)\alpha_r=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}c_{11}x_1+c_{21}x_2+\cdots+c_{s1}x_s=0\\ c_{12}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{s2}x_s=0\\ \cdots\cdots\\ c_{1r}x_1+c_{2r}x_2+\cdots+c_{sr}x_s=0\end{cases}$$

方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵 $C=(c_{ij})_{s\times r}$ 的秩小于 $s$，即

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关充要条件是 $C=(c_{ij})_{s\times r}$ 的秩小于 $s$

【例 3.13】试证：若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，则表示法唯一 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

【证】$\Rightarrow$(必要性)

用反证法：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

又 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，设表示式为

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta},$$

上述两方程相加,得$(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+l_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$.

由于$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为"0",故$k_1+l_1,k_2+l_2,\cdots,k_s+l_s$与$l_1,l_2,\cdots,l_s$是两组不同的数,即$\boldsymbol{\beta}$有两种不同的线性表示法,与题设$\boldsymbol{\beta}$由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示的表示法唯一矛盾.

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

$\Leftarrow$(充分性) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$表示表示法一.

用反证法: 设$\boldsymbol{\beta}$有两种表示式

$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$, $\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s$,

$\Rightarrow(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s-l_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$,

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,所以$k_i=l_i(i=1,2,\cdots,s)$.

**【例 3.14】**证明:矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量线性无关$\Leftrightarrow$由$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$,必有$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

**【证】**设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,所以$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

即$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,反之也成立.

**【例 3.15】**设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$

分别为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(a_{11},\cdots,a_{1i},\cdots,a_{1j},\cdots,a_{1n}),\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(a_{21},\cdots,a_{2i},\cdots,a_{2j},\cdots,a_{2n}),\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s&=(a_{s1},\cdots,a_{si},\cdots,a_{sj},\cdots,a_{sn}),\\ \boldsymbol{\beta}_1&=(a_{11},\cdots,a_{1i},\cdots,a_{1j}+ka_{1i},\cdots,a_{1n}),\\ \boldsymbol{\beta}_2&=(a_{21},\cdots,a_{2i},\cdots,a_{2j}+ka_{2i},\cdots,a_{2n}),\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s&=(a_{s1},\cdots,a_{si},\cdots,a_{sj}+ka_{si},\cdots,a_{sn}),\end{aligned}$$

试证:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关.

提示 如果题设中各向量写成它的分量形式,则有关命题常借助于线性方程组来证明.

**【证】**$\Rightarrow$(必要性)

令
$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}, \qquad ④$$

即
$$\begin{cases}k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_sa_{s1}=0,\\ \vdots\\ k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+\cdots+k_sa_{si}=0,\\ \vdots\\ k_1(a_{1j}+ka_{1i})+\cdots+k_s(a_{sj}+ka_{si})=0,\\ \vdots\\ k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+\cdots+k_sa_{sn}=0.\end{cases}$$

因为 $k_1(a_{1j}+ka_{1i})+k_2(a_{2j}+ka_{2i})+\cdots+k_s(a_{sj}+ka_{si})$

$=(k_1a_{1j}+k_2a_{2j}+\cdots+k_sa_{sj})+k(k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+\cdots+k_sa_{si})=0$,

所以 $k_1a_{1j}+k_2a_{2j}+\cdots+k_sa_{sj}=0$.

于是
$$\begin{cases}k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_sa_{s1}=0,\\ \vdots\\ k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+\cdots+k_sa_{si}=0,\\ \vdots\\ k_1a_{1j}+k_2a_{2j}+\cdots+k_sa_{sj}=0,\\ \vdots\\ k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+\cdots+k_sa_{sn}=0.\end{cases}$$

即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$. ⑤

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,所以 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

$\Leftarrow$(充分性)

由 ④,⑤ 和两组方程组及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关知,必有 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,由最后一个方程组,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

**【例 3.16】** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$,$\boldsymbol{E}$ 是 $n$ 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,证明:$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

**【证】方法一:** 用定义证明.

设 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$,其中 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的第 $i$ 列向量,若

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0},$$

即
$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0},$$

其中,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$,则得

$$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{Ex}=\mathbf{0}$,亦即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$,说明 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关,即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

**方法二:** 利用矩阵的秩证明.

因为秩$(\boldsymbol{B})\leqslant\min\{m,n\}\leqslant n$,又秩$(\boldsymbol{B})\geqslant$秩$(\boldsymbol{AB})=$秩$(\boldsymbol{E})=n$,故秩$(\boldsymbol{B})=n$,所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

**方法三:** 反证法.

设 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关,即秩$(\boldsymbol{B})<n$,于是有秩$(\boldsymbol{E})=$秩$(\boldsymbol{AB})\leqslant$秩$(\boldsymbol{B})<n$,即 $n=$秩$(\boldsymbol{E})<n$,矛盾.说明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

**【例 3.17】** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解,即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\mathbf{0}$. 试证明:向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

**【证】** 用定义法证明.

设有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_t$,使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\mathbf{0},$$

即
$$(k+\sum_{i=1}^{t}k_i)\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{t}(-k_i)\boldsymbol{\alpha}_i, \quad ⑥$$

上式两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$,有
$$(k+\sum_{i=1}^{t}k_i)\boldsymbol{A\beta}=\sum_{i=1}^{k}(-k_i)\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$,故
$$k+\sum_{i=1}^{t}k_i=0, \quad ⑦$$

从而,由 ⑥ 式得
$$\sum_{i=1}^{t}(-k_i)\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}.$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是基础解系,所以
$$k_1=k_2=\cdots=k_t=0,$$

因而由 ⑦ 式得
$$k=0.$$

因此,向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

【例 3.18】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为一个向量组,且 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i>1)$,都不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示,求证:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

【证】用定义证明.

假设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

对 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 从右向左看,若存在第一个不等于零的数,可设为
$$k_i\neq 0,k_{i+1}=0,\cdots,k_m=0,$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,所以 $i\neq 1$,从而
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0},$$

即
$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{1}{k_i}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}).$$

$\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示,与题设矛盾,因此 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必须全为零,说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

【例 3.19】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可用它们线性表示,向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能用它们线性表示,证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\lambda\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$($\lambda$ 为常数)线性无关.

【证】定义法证明.

设有实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 使得
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k(\lambda\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{0},$$

则 $k=0$,否则
$$\lambda\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\boldsymbol{\alpha}_m, \quad ⑧$$

又向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,故存在 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 使得
$$\boldsymbol{\beta}_1=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m, \quad ⑨$$

由 ⑧,⑨ 式得
$$\boldsymbol{\beta}_2=(-\lambda l_1-\frac{k_1}{k})\boldsymbol{\alpha}_1+(-\lambda l_2-\frac{k_2}{k})\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(-\lambda l_m-\frac{k_m}{k})\boldsymbol{\alpha}_m,$$

这与向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示矛盾,于是有
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,故 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,根据定义知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\lambda\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

## 题型三 判定一个向量是否可由一组向量线性表示

**提示** 给定一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 及向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，判断 $\boldsymbol{\alpha}$ 是否可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出.

(1) 令
$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s.$$

(2) 由向量相等关系将上式写成方程组：
$$\begin{cases}b_{11}k_1+b_{21}k_2+\cdots+b_{s1}k_s=a_1,\\ b_{12}k_1+b_{22}k_2+\cdots+b_{s2}k_s=a_2,\\ \vdots\\ b_{1n}k_1+b_{2n}k_2+\cdots+b_{sn}k_s=a_n.\end{cases}$$

(3) 若方程组无解，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 表出；若方程组有解，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性组合.

**【例 3.20】** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(0,4,2,5)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3,1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,1,2,-2)$，问 $\boldsymbol{\alpha}$ 是否可表示成 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性组合？

**【解】** 令 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3$，

即
$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=0,\\ 2k_1+3k_2+k_3=4,\\ 3k_1+k_2+2k_3=2,\\ k_1+2k_2-2k_3=5.\end{cases}$$

得 $k_1=1,k_2=1,k_3=-1$，故 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3$.

注 可将以上作法简化为对矩阵的行作初等变换，即设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量依次为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\ \vdots\ \boldsymbol{\alpha})$.

$\overline{\boldsymbol{A}}\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{对行作}}$ 最简形，然后分析定夺.

**【例 3.21】** 试把 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1,1)$ 表成 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,-1,1,-1)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(1,-1,-1,1)$ 的线性组合.

**【解】**
$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&1\\0&0&0&-4&1\\0&0&-1&1&0\\0&1&1&0&0\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&0&0&-1&\frac{1}{4}\\0&0&-1&0&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

故 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{5}{4}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_4$.

**【例 3.22】** 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$. 试求：

(1) $a,b$ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合；

(2) $a,b$ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一线性表示式，并写出该表示式.

**【解】** 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$，则

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=1,\\ k_2-k_3+2k_4=1,\\ 2k_1+3k_2+(a+2)k_3+4k_4=b+3,\\ 3k_1+5k_2+k_3+(a+8)k_4=5.\end{cases}$$

其增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right],$$

当 $a=-1,b\neq0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，可知方程组无解，故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合；

当 $a\neq-1$ 时，表示式唯一，且

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4.$$

## 题型四　有关向量组线性表示命题的证明

**提示** 思路之一：定义法.

要证 $\boldsymbol{\beta}$ 可用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，只要证表达式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k_{s+1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ 中 $k_{s+1}\neq0$ 即可. 或者证明下列方程组有解：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=b_1,\\ \vdots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=b_n.\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{in}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{bmatrix}$.

思路之二：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示.

**【例 3.23】** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 都是 $n$ 维向量，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表示，证明：$\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

【证】因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，设

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

又因为 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表示，则 $k_r\neq 0$，所以

$$\boldsymbol{\alpha}_r=\frac{1}{k_r}(\boldsymbol{\beta}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

【例 3.24】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}(m\geqslant 3)$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，试讨论

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示？

(2)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示？

【解】(1) **方法一：**$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示. 因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以其部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 也线性无关.

又由假设，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关，因此，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

**方法二：**因为已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}=\mathbf{0}.$$

其中 $k_1\neq 0$，因为若 $k_1=0$，则 $k_2,k_3,\cdots,k_{m-1}$ 不全为零，使

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}=\mathbf{0}$$

成立，从而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关，这和已知矛盾，故 $k_1\neq 0$，

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

用反证法证：设 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，即有实数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_m=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

又由(1)，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，所以有 $l_2,\cdots,l_{m-1}$，使

$$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_m&=k_1(l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}\\&=(k_1l_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1l_3+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+(k_1l_{m-1}+k_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，这与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的假设矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

## 题型五　求向量组的极大线性无关组

**提示** 思路之一：录选法.

(1) 在向量组中任取一个非零向量作为 $a_{i1}$；

(2) 取一个与 $a_{i1}$ 的对应分量不成比例的作为 $a_{i2}$；

(3) 取一个不能由 $a_{i1},a_{i2}$ 表出的作为 $a_{i3}$，继续做下去便可求出向量组的极大无关组.

该法适用于向量组中向量个数较少的情形.

思路之二：行初等变换法.

(1) 将向量组中的各向量作为矩阵的列；

(2) 对上述矩阵作初等行变换；

(3) 变成阶梯形矩阵后，每一阶梯上取一列，对应的向量所构成的向量组即为极大线性

无关组.

【例 3.25】考虑向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}7\\0\\14\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}5\\1\\6\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\1\end{bmatrix},$$

(1) 求向量组的秩;(2) 求此向量组的一个极大线性无关组,并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

【分析】根据矩阵的初等变换不改变矩阵的秩,利用行初等变换将以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列向量的矩阵化为阶梯形,然后在每一个阶梯中选取一个"元素"即构成此向量组的一个极大无关组,同时求得向量组的秩.当阶梯形化为最简时,还可直接得到其余向量用此极大无关组的线性表示式.

【解】(1) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列构成一矩阵,然后对其作初等行变换(且只能作初等行变换).

$$\boldsymbol{A}=\overset{\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_4 & \boldsymbol{\alpha}_5\end{matrix}}{\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}}\to\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&-21&-7&-14&-7\\0&0&-4&-4&0\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\to\overset{\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1' & \boldsymbol{\alpha}_2' & \boldsymbol{\alpha}_3' & \boldsymbol{\alpha}_4' & \boldsymbol{\alpha}_5'\end{matrix}}{\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&3&1&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}}=\boldsymbol{A}_1,$$

显然 $\boldsymbol{A}_1$ 的秩为 3,故 $\boldsymbol{A}$ 的秩也为 3.

(2) 在每一个阶梯中选一"元素"(注意 $\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_5'$ 属于同一阶梯)分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3'$(不唯一,比如 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_4'$;$\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_5',\boldsymbol{\alpha}_3'$;$\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_5',\boldsymbol{\alpha}_4'$ 均可),从而对应向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3'$ 构成 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\alpha}_4',\boldsymbol{\alpha}_5'$ 的极大线性无关组.

进一步把 $\boldsymbol{A}_1$ 化为最简形($\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3'$ 对应的列除阶梯所在位置元素为 1 外,其余全部为零),对 $\boldsymbol{A}_1$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}_1\to\begin{bmatrix}1&7&0&3&2\\0&3&0&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\overset{\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1'' & \boldsymbol{\alpha}_2'' & \boldsymbol{\alpha}_3'' & \boldsymbol{\alpha}_4'' & \boldsymbol{\alpha}_5''\end{matrix}}{\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}},$$

不难看出

$$\boldsymbol{\alpha}_4''=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1''+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2''+\boldsymbol{\alpha}_3'',$$

$$\boldsymbol{\alpha}_5''=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1''+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2''+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3'',$$

从而原向量组有 $$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_5=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3.$$

注 (1) 极大线性无关组不唯一,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_3$;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是极大线性无关组.

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为行向量时,这时应构造 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}}]$,仍只能用行初等变换,这一点必须特别注意.

(3) 在把 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形过程中,$\boldsymbol{\alpha}_2{}',\boldsymbol{\alpha}_5{}'$ 是属于同一阶梯的,不能认为 $\boldsymbol{\alpha}_3{}',\boldsymbol{\alpha}_4{}',\boldsymbol{\alpha}_5{}'$ 属于同一阶梯,从而得出 $\boldsymbol{\alpha}_1{}',\boldsymbol{\alpha}_2{}',\boldsymbol{\alpha}_5{}'$ 对应的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 也是极大线性无关组的结论是错误的.事实上,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关.这里关键是 $\boldsymbol{\alpha}_5{}'$ 的第三个元素为零,并不属于第三个阶梯,为了避免类似的错误,也可考虑交换两列(仅限于交换列),但应注意在矩阵上方标示的 $\boldsymbol{\alpha}_3{}'$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_5{}'$ 也必须同时交换,这时有

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{A}\to\cdots\to \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}\boldsymbol{\alpha}_1{}' & \boldsymbol{\alpha}_2{}' & \boldsymbol{\alpha}_3{}' & \boldsymbol{\alpha}_4{}' & \boldsymbol{\alpha}_5{}'\end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 7 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array},$$

再在每一阶梯中选取一"元素"构成极大线性无关组就不会出现错误了.

(4) 本题由 $\boldsymbol{\alpha}_1{}'',\boldsymbol{\alpha}_2{}'',\boldsymbol{\alpha}_3{}'',\boldsymbol{\alpha}_4{}'',\boldsymbol{\alpha}_5{}''$ 的线性关系推导出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 也有相同的线性关系的依据是:行初等变换不改变列向量之间的线性组合,若列向量组作列初等变换或行向量组作行初等变换,则列(行)向量组保持相同的线性关系的结果将不再成立.

## 题型六　有关向量组或矩阵秩的计算与证明

提示 (1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$.

(2) 利用初等变换求矩阵的秩.

(3) 利用矩阵秩的有关关系式求秩.

**【例 3.26】** 已知向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$;(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$.如果各向量组的秩分别为 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3,r(\text{Ⅲ})=4$.证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

**【证】** 要证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4,只要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关即可.

因 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,故存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

设有数 $k_1,k_2,k_3,k_4$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0},$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 代入上式,化简得

$$(k_1-\lambda_1k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-\lambda_2k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-\lambda_3k_4)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0},$$

由 $r(\text{Ⅲ})=4$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,所以

$$\begin{cases}k_1-\lambda_1k_4=0,\\ k_2-\lambda_2k_4=0,\\ k_3-\lambda_3k_4=0,\\ k_4=0.\end{cases}$$

解之得 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,即其秩为 4.

**【例 3.27】**设向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 $r(r>1)$,证明向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 的秩也为 $r$.

**【分析】**两组向量秩相同的充分条件是两组向量等价.

**【证】**显然,向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示.下面证明向量组(Ⅰ)也可由向量组(Ⅱ)线性表示.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的表示式相加,得

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m=(m-1)(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m),$$

故有
$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m),$$

由此可得
$$\boldsymbol{\alpha}_i=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_i,\ (i=1,2,\cdots,m).$$

这表明向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,从而(Ⅰ)与(Ⅱ)是等价向量组,其秩相同,即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩也为 $r$.

**【例 3.28】**设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix},a_i\neq 0,b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n),\text{求秩}(\boldsymbol{A}).$$

**【解】方法一:**用子式计算秩($\boldsymbol{A}$).

因为 $\boldsymbol{A}$ 的任一二阶子式
$$\begin{vmatrix}a_ib_k & a_ib_t\\ a_jb_k & a_jb_t\end{vmatrix}=0,$$

且 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵,故秩($\boldsymbol{A}$)$\geqslant 1$,从而有秩($\boldsymbol{A}$)$=1$.

**方法二:**记 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,由 $\boldsymbol{\alpha}_i=b_i\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}(i=1,2,\cdots,n)$,可见 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意两个向量对应元素成比例,即任意两个向量线性相关,故秩($\boldsymbol{A}$)$<2$,但 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,即为非零向量,故秩($\boldsymbol{A}$)$=1$.

**方法三:** 记 $\boldsymbol{G}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$,因为秩($\boldsymbol{A}$)$\leqslant\min\{$秩($\boldsymbol{G}$),秩($\boldsymbol{H}$)$\}=1$,又 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵,秩($\boldsymbol{A}$)$\geqslant 1$,从而秩($\boldsymbol{A}$)$=1$.

**【例 3.29】**设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为两个 $n$ 阶矩阵,证明

$$\text{秩}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{B}).$$

**【分析】**只要证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性表示即可.

**【证】**设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n]$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 分别为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的列向量组.

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\leqslant n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s(s\leqslant n)$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组,显然,$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示,从而它也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,所以向量组 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 的秩不会超

过向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩，即

$$秩(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r+s=秩(\boldsymbol{A})+秩(\boldsymbol{B}).$$

**【例 3.30】**设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

(1) $秩(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & 秩(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & 秩(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & 秩(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

**【证】**(1) 1° 已知秩$(\boldsymbol{A})=n$，只要证明 $\boldsymbol{A}^*$ 是可逆矩阵，即得秩$(\boldsymbol{A}^*)=n$.

当秩$(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，有 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，所以秩$(\boldsymbol{A}^*)=n$.

2° 已知秩$(\boldsymbol{A})=n-1$，要证秩$(\boldsymbol{A}^*)=1$.

因为秩$(\boldsymbol{A})=n-1$，有 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=0$，根据前面内容知，$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n$，从而 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n-r(\boldsymbol{A})=1$. 又秩$(\boldsymbol{A})=n-1$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零，那么矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个元素非零，所以秩$(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，由此推知秩$(\boldsymbol{A}^*)=1$.

3° 已知秩$(\boldsymbol{A})<n-1$ 时，证明秩$(\boldsymbol{A}^*)=0$.

由秩$(\boldsymbol{A})<n-1$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式全为零，$\boldsymbol{A}_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，故 $\boldsymbol{A}^*=0$，所以秩$(\boldsymbol{A}^*)=0$. 综上所述，有

$$秩(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & 秩(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & 秩(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & 秩(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(2) 考虑 $\boldsymbol{A}$ 可逆与不可逆两种情形.

1° 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n,$$

所以 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

2° $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，由(1) 知，秩$(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$，秩$(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$.

故 $|\boldsymbol{A}^*|=0$，即 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 恒成立.

**【例 3.31】**设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$，试求秩$(\boldsymbol{A})$.

**【分析】**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 含有参数 $a$，因此其秩一般随参数 $a$ 的变化而变化，讨论其秩主要从两点着手：矩阵秩的行列式定义和初等变换不改变矩阵的秩.

**【解】方法一：**直接从矩阵秩的行列式定义出发讨论. 由于

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2,$$

故 1° 当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，秩$(\boldsymbol{A})=3$；

2° 当 $a=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，显然秩$(\boldsymbol{A})=1$；

3° 当 $a=-2$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$，这时有二阶子式 $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0$，因此秩$(\boldsymbol{A})=2$.

**方法二：**利用初等变换求秩.

$$\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&-(a-1)\\0&-(a-1)&1-a^2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&-(a-1)\\0&0&-(a+2)(a-1)\end{bmatrix},$$

于是由初等变换不改变矩阵的秩知

1° 当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=3$；

2° 当 $a=1$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=1$；

3° 当 $a=-2$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=2$.

**【例 3.32】**选择题.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 $r$，则

(A) 必定 $r<s$.

(B) 向量组中任意小于 $r$ 个向量的部分组线性无关.

(C) 向量组中任意 $r$ 个向量线性无关.

(D) 向量组中任意 $r+1$ 个向量必定线性相关. 【 】

(2) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s(s>1)$，而 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_s$，则

(A) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=$ 秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

(B) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)>$ 秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

(C) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<$ 秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

(D) 不能确定秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 与秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的大小关系. 【 】

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为两个 $n$ 维向量组，且秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=$ 秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$，则

(A) 两个向量组等价，即可相互线性表示.

(B) 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r$.

(C) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

(D) 当 $s=t$ 时，两向量组等价. 【 】

**【解】**(1)D， (2)A， (3)C.

**【分析】**(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 $r$，说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性无关部分组所包含向量的个数不超过 $r$，即任意 $r+1$ 个向量必定线性相关，故(D) 成立. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则有 $r=s$，(A) 不成立；向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 $r$，只要求存在一含 $r$ 个线性无关向量的部分组，并不要求任意 $r$ 个向量线性无关，更不要求任意小于 $r$ 个向量的

部分组都线性无关,故(B),(C) 不成立.

(2) 显然 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,又 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_s=s\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s)=(s-1)\boldsymbol{\alpha}$,即 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{s-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_s)$,

从而

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{s-1}(\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_s)-\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{s-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_s)-\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_s=\frac{1}{s-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_s)-\boldsymbol{\beta}_s.$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,因此,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价,故秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=$ 秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$,(A) 为正确选项.

(3) 若令 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\beta}_1=(0,1)$,则(A),(B),(D) 显然不成立,只有(C) 为正确答案.

## 题型七　与向量空间有关的命题

**【例 3.33】** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 相互正交.

**【解】** 设所求向量为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$,因为正交,所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$.

即 $x_1+x_2+x_3=0$,亦即 $x_1=-x_2-x_3$. 取 $\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}_2-\frac{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 相互正交.

**【例 3.34】** 设 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基为:(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$;(2)$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡阵 $\boldsymbol{Q}$,并求 $\boldsymbol{\zeta}=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

**提示** $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}\Rightarrow\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$.

**【解】** (1) 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}$,

则 $$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&1&1&0&-1&-1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{array}\right]$$

故 过渡矩阵 $Q=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}$.

(2) $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\mid\boldsymbol{\zeta}]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&&2\\1&-1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5\\0&1&0&-6\\0&0&1&4\end{array}\right]$,故坐标应为 $\begin{bmatrix}-5\\-6\\4\end{bmatrix}$.

【例 3.35】已知(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j(i=1,2;j=1,2)$ 相互正交,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

【证】设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}, \tag{⑩}$$
⑩ 式两边和 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 作内积,且利用 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j$ 的正交性,得
$$\begin{cases}k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=0,\\k_1(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=0.\end{cases} \tag{⑪}$$
因
$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)\end{vmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)^2.$$
由柯西不等式及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关知
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)^2>0,$$
故方程组 ⑪ 只有唯一零解,从而得 $k_1=k_2=0$.

同理可证 $\lambda_1=\lambda_2=0$. 故得证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

【例 3.36】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}_n-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$,其中 $\boldsymbol{E}_n$ 是 $n$ 阶单位阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n$ 维单位列向量,证明:对任一 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$,均有 $|\boldsymbol{A\beta}|=|\boldsymbol{\beta}|$.

【分析】直接利用内积计算向量 $\boldsymbol{\beta}$ 及 $\boldsymbol{A\beta}$ 的模,证明其相等即可.

【证】
$$|\boldsymbol{A\beta}|=\sqrt{(\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A\beta})}=\sqrt{(\boldsymbol{A\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}}=\sqrt{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}},$$
因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}&=[\boldsymbol{E}_n-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}_n-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}]=(\boldsymbol{E}_n-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}_n-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}_n-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n,\end{aligned}$$
故得证
$$|\boldsymbol{A\beta}|=\sqrt{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}}=\sqrt{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}=|\boldsymbol{\beta}|.$$

【例 3.37】设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 $5\times4$ 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

【解】因为秩 $r(\boldsymbol{B})=2$,所以解空间的维数是 $n-r(\boldsymbol{B})=4-2=2$.

又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是解空间的一组基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-4\\2\\10\\-6\end{bmatrix}.$$
再单位化得
$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\frac{1}{\sqrt{39}}\begin{bmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{bmatrix},$$
即为解空间的一个标准正交基.

注 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也可作为解空间的一组基,因此本题答案不唯一.

# 第3节　思维定势与综合题解析

## 一、思维定势

**思维定势**　若要证明一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,先考虑用定义.

【例3.38】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 试证明:向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

【证】用定义法证明.

设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_s$,使得

$$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{0},$$

即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_s)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$

上式两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$,有

$$(k_0+k_1+\cdots+k_s)\boldsymbol{A\beta}+k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{A\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,s;\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 故

$$k_0+k_1+\cdots+k_s=0,$$

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系,必线性无关,故

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0,$$

从而得 $k_0=0$.

由定义知 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

## 二、综合题解析

【例3.39】设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶正定矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非零的 $n$ 维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_j=0(i\neq j,i,j=1,2,3)$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【证】设存在常数 $k_1,k_2,k_3$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

将上式两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_3=0,$$

由题设知后两项为零. 于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_1=0$,由于 $\boldsymbol{A}$ 正定,$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_1>0$,从而 $k_1=0$.

同理可证 $k_2=k_3=0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【例3.40】设4维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组.

【解】方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $x=k(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,即 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,所以 $r(\boldsymbol{A})=3$. 即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大无关组包含3个向量.

又 $\boldsymbol{A}(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,极大无关组不能同时包含 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.

极大无关组只能是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

令 $\qquad k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，

所以 $(k_1,k_2,0,k_4)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，于是存在常数 $C$ 使 $(k_1,k_2,0,k_4)^{\mathrm{T}}=C(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，

所以 $k_2=k_4=0$，即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq 0$[如 $\boldsymbol{\alpha}_1=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3=0$，$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$]，

所以 $k_1=0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，又 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组. 同理可得，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也是极大无关组.

注 求向量组的秩可以通过求其所构成的矩阵的秩来完成.

**【例 3.41】** 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，

(1) 证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$，求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

**【证】** (1) 设 $k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{A\beta}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$， ①

由题设 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，于是

$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 \quad ②$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^3\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3, \quad ③$$

将 ②，③ 代入 ① 式整理得

$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三个不同的特征值所对应的特征向量，所以线性无关，于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0\end{cases}，其系数行列式\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq 0，所以 k_1=k_2=k_3=0，$$

故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$ 有

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}]\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}]$，则 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}]$ 可逆，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

从而有

$$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=r\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}=2,$$

$$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=6.$$

## 习 题 三

**1. 填空题.**

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,0,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-4,-2,3,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,k)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,0,2,1)$，则

$k=$ ______ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,3,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,-2),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-5,3,4),\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,3,t,0)$，则 $t=$ ______ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

(3) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(3,5,7,9),\boldsymbol{\beta}=(-1,5,2,0)$，$\boldsymbol{x}$ 满足 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{x}=$ ______.

(4) 当 $k=$ ______ 时，向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,k,5)$ 能由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-3,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)$ 线性表示.

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1,5,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3,-1,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,0,4,1)$，则秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=$ ______.

(6) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{bmatrix}$$

则秩$(\boldsymbol{A})=$ ______.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,1,0,2)$. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$，则秩$(\boldsymbol{A})=$ ______.

(8) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,t)$，且秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，则 $t=$ ______.

**2. 选择题.**

(1) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.　【　】

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})=m<n$，$\boldsymbol{E}_m$ 为 $m$ 阶单位矩阵，下列结论中正确的是

A. $\boldsymbol{A}$ 的任意 $m$ 个列向量必线性无关.　B. $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 $m$ 阶子式不等于零.

C. 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=0$，则 $\boldsymbol{B}=0$.　D. $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换，必可以化为$(\boldsymbol{E}_m,0)$ 的形式.

【　】

(3) 设向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},a_{31})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},a_{22},a_{32})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{13},a_{23},a_{33})^{\mathrm{T}}$，向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{21},a_{31},a_{41})^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\beta}_2=(a_{12},a_{22},a_{32},a_{42})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(a_{13},a_{23},a_{33},a_{43})^{\mathrm{T}}$，则

A. (Ⅰ)相关 ⇒(Ⅱ)相关.　　B. (Ⅰ)无关 ⇒(Ⅱ)无关.

C. (Ⅱ)无关 ⇒(Ⅰ)无关.　　D. (Ⅰ)无关 ⇔(Ⅱ)无关.　【　】

(4) 设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

C. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以用 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.　　D. $\boldsymbol{\beta}$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.　【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，且秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$，则

A. 秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$.　　B. 秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2\times$秩$(\boldsymbol{A})$.

C. 秩$(\boldsymbol{AB})=2\times$秩$(\boldsymbol{A})$.　　D. 秩$(\boldsymbol{AB})\leqslant$秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(B)$.　【　】

**3. 计算证明题.**

(1) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(t,2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)$，试求出 $t$ 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关或线性无关.

(2) 设有三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}k\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\k\\k^2\end{bmatrix}$. 问 $k$ 取何值时,

①$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式唯一;②$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表达式不唯一;③$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,问:

①$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?证明你的结论.

②$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?证明你的结论.

(4) 已知 $m$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,但其中任意 $n-1$ 个都线性无关,证明:

① 如果存在等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

则这些系数 $k_1,\cdots,k_m$ 或者全为零,或者全不为零.

② 如果存在两个等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$
$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

其中 $l_1\neq 0$,则

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

(5) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,问常数 $a,b,c$ 满足什么条件时,$a\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,b\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,c\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵,若存在正整数 $k$,使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$,且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的.

(7) 求下列向量组的一个极大线性无关组,并把其余向量用极大线性无关组线性表示.

①$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6),\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-3,-4,-7),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,2,0)$.

② $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$.

(8) 已知三阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x&y&y\\y&x&y\\y&y&x\end{bmatrix},$$

讨论秩($\boldsymbol{A}$)的情况.

(9) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵),但 $\boldsymbol{A}\neq\pm\boldsymbol{E}$,试证明:

$$[\text{秩}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1][\text{秩}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-1]=0.$$

(10) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明:若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r$,则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的秩为 $n-r$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $n$ 阶单位矩阵.

(11) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵,证明:如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,则秩($\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$)+秩($\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$)$=n$.

(12) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$$

试证：存在数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{A}^k = \lambda^{k-1}\boldsymbol{A}$.

(13) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，① $a,b,c$ 满足什么条件时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3；② $a,b,c$ 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵；③ 取一组 $a,b,c$ 使得 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

(14) 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，秩$(\boldsymbol{A}) = n-1$，证明：存在常数 $k$，使得 $(\boldsymbol{A}^*)^2 = k\boldsymbol{A}^*$.

## 参考答案

**1.** (1) $-\frac{5}{13}$；(2) 任意实数；(3) $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -4, -6\right)$；(4) $-8$；(5) 3；(6) 3；(7) 1；(8) 7.

**2.** (1) C (2) C (3) B (4) C (5) D

**3.** (1) $t \neq -2, 3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；当 $t = -2, 3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) ① $k \neq 0, k \neq 1$. ② $k = 1$. ③ $k = 0$. (3) 略. (4) 略. (5) $abc = 1$. (6) 用定义证明.

(7) ① $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = -\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

② $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_5 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4.$$

(8) $x \neq y, x \neq -2y$，秩$(\boldsymbol{A}) = 3$；$x = y = 0$，秩$(\boldsymbol{A}) = 0$.
$x = y \neq 0$，秩$(\boldsymbol{A}) = 1$； $x = -2y \neq 0$，秩$(\boldsymbol{A}) = 2$.

(9) 略. (10) 略. (11) 略.

(12) 提示： $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$.

(13) ① $a \neq 2bc$. ② $a = 1, b = 0, c = 0$. ③ 由 $a^2 + b^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1, a \cdot c + \frac{1}{2}b = 0$

得 $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, b = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}, a = \pm\frac{1}{2}$，且 $a,c$ 同号时，$b$ 为负；$a,c$ 反号时，$b$ 为正.

(14) 秩$(\boldsymbol{A}) = n-1 \Rightarrow$ 秩$(\boldsymbol{A}^*) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{A}^*$ 可分解为 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1, b_2, \cdots, b_n]$，

由此即可证明.

# 第四章　线性方程组

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、克莱姆法则

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$

如果系数行列式 $D = |\boldsymbol{A}| \neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中，$D_j$ 是把 $D$ 中第 $j$ 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式.

【例 4.1】设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$，

其中，$a_i \neq a_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ 的解是______.

【解】因为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) \neq 0$，

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ 有唯一解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}, j = 1, 2, \cdots, n$.

其中，$x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{D}{D} = 1, x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 0, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D} = 0$. 故应填 $(1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

### 二、线性方程组的基本概念

方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad ①$$

称为含 $m$ 个方程 $n$ 个未知量的非齐次线性方程组.

记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则上述方程组可记为(矩阵形式) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

若记
$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n$$

则上述方程可改写为(向量形式) $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$.

矩阵
$$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

称为方程组 ① 的增广矩阵.

方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

称为含 $n$ 个未知元 $m$ 个方程的齐次线性方程组,它是非齐次线性方程组 ① 的导出组. 其矩阵形式为
$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},$$
向量形式为
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.$$

## 三、线性方程组解的判定

### 1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$

一定有解(至少有零解),且秩$(\boldsymbol{A})=n$ 时,有唯一零解;秩$(\boldsymbol{A})=r<n$ 时,有非零解,且有 $n-r$ 个 线性无关的解向量.

### 2. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

若秩$(\boldsymbol{A})\neq$ 秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=$ 秩$[A\vdots b]$,则无解.

$$秩(\boldsymbol{A})=秩(\overline{\boldsymbol{A}})=秩[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}]=\begin{cases} n, & 则有唯一解 \\ <n, & 则有无穷多解 \end{cases}.$$

注 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,若 $r(\boldsymbol{A})=m$,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$,从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解.

**【例 4.2】** 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$,又 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解.

**【证】** 考查矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$:因

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) &\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=r[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})] \\ &\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}), \end{aligned}$$

故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,从而知方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 定有解.

## 四、非齐次线性方程组与其导出组的解的关系

$$Ax = b\text{ 有解} \Leftrightarrow \text{秩}(A) = \text{秩}(\overline{A}) = r\begin{cases} = n \Leftrightarrow Ax = b\text{ 有唯一解}, \\ < n \Leftrightarrow Ax = b\text{ 有无穷多解}. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b\text{ 有唯一解} \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} Ax = 0\text{ 只有零解} \Leftrightarrow \text{秩}(A) = n \\ Ax = b\text{ 有无穷多解} \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} Ax = 0\text{ 有非零解} \Leftrightarrow \text{秩}(A) < n \end{array}\right\} Ax = 0.$$

注 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解(唯一解),则 $Ax = 0$ 有非零解(仅有零解). 但反过来不成立,即 $Ax = 0$ 有非零解(仅有零解),不能推导出 $Ax = b$ 有无穷多解(唯一解),甚至 $Ax = b$ 可能无解,因为由秩$(A) < n(= n)$,不一定能得到秩$(A) =$ 秩$(\overline{A})$.

## 五、线性方程组解的性质

(1) 如果 $\eta_1, \eta_2$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解,则 $\eta_1 + \eta_2$ 也是它的解.

(2) 如果 $\eta$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解,则对任意常数 $k$,$k\eta$ 也是它的解.

(3) 如果 $\gamma$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解,而 $\eta$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个解,则 $\gamma + \eta$ 是方程组 $Ax = b$ 的解.

(4) 如果 $\gamma_1, \gamma_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个解,则 $\gamma_1 - \gamma_2$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的解.

注 设 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 是 $Ax = b$ 的解,$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为常数,且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 1$,则 $k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_s\gamma_s$ 也是 $Ax = b$ 的解.

## 六、线性方程组解的结构

### 1. 齐次线性方程组解的结构

设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组线性无关解,如果方程组 $Ax = 0$ 任意一个解均可表为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 的线性组合,则称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 为方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

设 $A$ 为 $m \times n$ 矩阵,若秩$(A) = r < n$,则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 存在基础解系,且基础解系包含 $n - r$ 个线性无关的解向量,这时方程组的通解可表为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数,$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 为齐次方程组的一个基础解系.

基础解系的求法:对 $A$ 施以初等行变换(必要时重新排列未知量的顺序)可得

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{1\,r+1} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{2\,r+1} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{r\,r+1} & \cdots & \overline{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

对应齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + \bar{a}_{1\,r+1}x_{r+1} + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = 0, \\ \quad x_2 \quad + \bar{a}_{2\,r+1}x_{r+1} + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = 0, \\ \quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad x_r + \bar{a}_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + \bar{a}_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

与原方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 同解，其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为自由未知量，分别取

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{为} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{共 } n-r \text{ 个})$$

得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} -\bar{a}_{1\,r+1} \\ -\bar{a}_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -\bar{a}_{1\,r+2} \\ -\bar{a}_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_{1n} \\ -\bar{a}_{2n} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

即为其基础解系.

**2. 非齐次线性方程组解的结构**

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的任意一个解均可表示为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解与其导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的某个解之和.

当非齐次线性方程组有无穷多解时，它的通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}.$$

其中，$\boldsymbol{\eta}_0$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解，$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数，$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 为其导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　基本概念题(解的判定、性质、结构)

**提示** 基本概念题主要考查解的判定、性质和结构，且大都以填空或选择题的形式出现，要求对基本概念以及齐次线性方程组与非齐次线性方程组之间的关系能够准确把握.

**【例 4.3】**(1) 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解，则 $a =$ ______.

(2) 设方程 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多解，则 $a =$ ______.

【解】(1) 化增广矩阵为阶梯形

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{array}\right]$$

由题设,有系数矩阵的秩 $r(A)<3$,必有 $(a-3)(a+1)=0$,即 $a=3$ 或 $a=-1$. 当 $a=3$ 时,$r(A)=r(\overline{A})=2$,方程组有无穷多解;当 $a=-1$ 时,$r(A)=2\neq r(\overline{A})=3$,方程组无解. 故 $a=-1$.

(2) 化增广矩阵为阶梯形

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&-2\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&3\\0&1-a&1-a^2&1+2a\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&3\\0&0&(1-a)(a+2)&2(a+2)\end{array}\right],$$

由题设,必有 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时,$r(A)=1\neq r(\overline{A})=2$,无解;

当 $a=-2$ 时,$r(A)=r(\overline{A})=2$,方程组有无穷多解.

故 $a=-2$.

注 本题也可由系数矩阵的行列式 $|A|=0$ 求 $a$,但当 $a$ 的取值不唯一时,必须代回去验算.

【例 4.4】选择题.

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量,且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$C$ 表示任意常数,则线性方程组 $Ax=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{x}$ 为

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$.　　【　】

(2) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是相应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$k_1,k_2$ 是任意常数,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

【　】

(3) 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$,若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq O$ 使得 $AB=O$,则

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq0$

(C) $\lambda=1$ 且 $|B|=0$　　(D) $\lambda=1$ 且 $|B|\neq0$　　【　】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵,$r(\boldsymbol{A})=n-3$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解向量,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

【　】

**【解】**(1) 由于秩$(\boldsymbol{A})=3$,故线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解空间的维数为 $4-$秩$(\boldsymbol{A})=1$. 又由

$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{b}$ 知,$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3}{2}\right)=\boldsymbol{0}$.

于是 $2\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3}{2}\right)=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,故根据 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的结构理论知,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(C).

(2) 因为 $\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,而非 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,由解的结构理论知,(A),(C) 不正确. 虽然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,但是否线性无关不确定,因此不一定为基础解系,排除(D). 故正确选项为(B). 事实上,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,且易证线性无关,于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也可作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,而 $\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解,故(B) 正确.

(3) **解**:由 $\boldsymbol{B}\neq O$ 及 $\boldsymbol{AB}=O$ 可知所给的齐次线性方程组有非零解,于是 $|\boldsymbol{A}|=0$,即

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0,\text{解之得 }\lambda=1.$$

若 $|\boldsymbol{B}|\neq0$,则 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{AB}=O\Rightarrow\boldsymbol{A}=O$,这与 $\boldsymbol{A}$ 为非零阵矛盾,所以 $|\boldsymbol{B}|=0$. 故本题选(C).

(4) 因为 $r(\boldsymbol{A})=n-3$,可知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量的个数为 $n-(n-3)=3$,又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关解向量. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 且由

$$1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)+1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

$$(2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+2\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2\right)+(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)+(-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

知(B),(C),(D)中三组向量线性相关,不可能作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,故应选(A).

事实上,易证 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关,且均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,因此可作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

**【例 4.5】**设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$,三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq 0$,且 $\boldsymbol{AB}=0$,试求 $\lambda$ 的值.

**【解】**设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,其中 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 为三维列向量,由于 $\boldsymbol{B}\neq 0$,所以至少有一个非零的列向量,不妨设 $\boldsymbol{\beta}_1\neq\boldsymbol{0}$,由于

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\boldsymbol{A\beta}_3)=\boldsymbol{0},$$

$\Rightarrow\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\beta}_1$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解,于是系数矩阵的行列式必为零,

即
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0,$$

解得 $\lambda=1$.

**【例 4.6】**已知向量 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}4\\5\\-3\\11\end{bmatrix}$,

是方程组 $\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$ 的三个解,

求该方程组的通解.

**【分析】**如果把三个解代入方程组先求参数,再求通解,则计算非常繁琐.应利用方程组解的性质与结构定理来求解.

**【解】**已知有 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}3\\6\\-3\\9\end{bmatrix}$是相应的齐次方程组的两个线性无关解,所以系数矩阵的秩 $\leqslant 2$,(因为 $4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$)

又因为系数矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&2&a_3&a_4\\4&b_2&3&b_4\\3&c_2&5&c_4\end{bmatrix}$ 有二阶子式 $\begin{vmatrix}4&3\\3&5\end{vmatrix}\neq 0$,

所以系数矩阵的秩 $\geqslant 2$.所以系数矩阵的秩为 2.

所以齐次方程组的基础解系包含两个解向量,

即 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1$ 是齐次方程组的基础解系.

所以该方程组的通解为 $\quad k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1$.

## 题型二　含有参数的线性方程组解的讨论

提示 这类问题是历届考研的重点，务必很好地掌握.

(1) 含参数的 $n$ 个未知数 $n$ 个方程的线性方程组，当 $n \leqslant 3$ 时，通常利用系数行列式进行分析讨论：当系数行列式不为零时，方程组有唯一解，用克莱姆法则求之；当系数行列式为零时(此时参数一般已确定)利用增广矩阵行的初等变换化为阶梯形阵判别有无解，有解时，求出通解.

(2) 当方程的个数 $\neq$ 未知数的个数，或(1)中的 $n > 3$ 时，通常是对方程组的增广矩阵施以行的初等变换化为阶梯形阵，然后再对参数讨论方程组有无解，有解时求出解. 变量的系数中不含参数的方程组也用此法.

【例 4.7】$k$ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

有唯一解，无解，有无穷多组解?有解时，求出其全部解.

【解】$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(k^2 - 3k - 4) = -(k-4)(k+1)$，

当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即 $k \neq -1, 4$ 时，方程组有唯一解，用克莱姆法则求之，

$$x_1 = \frac{k^2 + 2k}{k+1}, \quad x_2 = \frac{k^2 + 2k + 4}{k+1}, \quad x_3 = \frac{-2k}{k+1}.$$

当 $k = -1$ 时，方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$.

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & 3 & \vdots & -8 \end{bmatrix},$$

因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$，所以方程组无解.

当 $k = 4$ 时，方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$.

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & \vdots & 4 \\ -1 & 4 & 1 & \vdots & 16 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 20 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

$r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 2$，可知方程组有无穷多解，于是

$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 + 4 \end{cases}$，令 $x_3 = c$，则得通解为 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3c \\ 4-c \\ c \end{bmatrix}$，即 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

【例 4.8】设 $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 (n \geqslant 3)$ 线性无关，讨论：

当向量组 $a\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1, b\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2, a\boldsymbol{\alpha}_1 - b\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，

方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 7x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_2 + x_3 + (a-2)x_4 = b-1 \end{cases}$ 的解，

且当有无穷多解时，用其导出组的基础解系表示其通解.

**【解】** $(a\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1, b\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2, a\boldsymbol{\alpha}_1 - b\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 0 & b & -b \end{bmatrix}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，

所以向量组 $a\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1, b\boldsymbol{\alpha}_3 - \alpha_2, a\boldsymbol{\alpha}_1 - b\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充要条件是 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 0 & b & -b \end{vmatrix} = 0$，

亦即 $b(a^2 - 1) = 0$. 所以 $b = 0$ 或 $a = \pm 1$.

方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & a-2 & b-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \end{bmatrix}$，

(1) 当 $a = 1, b \neq 0$ 时，方程组无解；

(2) 当 $a \neq 1$，$b$ 为任意数时，方程组有唯一解；

(3) 当 $b = 0, a \neq 1$ 时，方程组有唯一解；

(4) 当 $a = 1, b = 0$ 时，方程组有无穷多解.

在第(4)种情形下，$\overline{\boldsymbol{A}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

所以该方程组的通解为 $C\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

**【例 4.9】** 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 2，求 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

**【分析】** 由于解空间的维数等于 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含解向量的个数，所以 $4 - r(\boldsymbol{A}) = 2$，即 $r(\boldsymbol{A}) = 2$. 由此可确定 $t$，进而求出 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

**【解】** 化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形：

$$A\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&t-2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1-2t&2-2t\\0&1&t&t\\0&0&-(t-1)^2&-(t-1)^2\end{bmatrix},$$

可见,由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 知必有 $(t-1)^2=0$,即 $t=1$. 此时

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4=0,\\ \qquad x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2\qquad +x_4=0.\end{cases}$$

其同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=-x_3-x_4\end{cases}$.

通解为
$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

其中 $k_1,k_2$ 为任意常数.

**【例 4.10】** 问 $a,b$ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2\qquad +x_3+x_4=0,\\ \quad x_2\qquad +2x_3+2x_4=1,\\ \quad -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2\qquad +x_3+ax_4=-1.\end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多组解. 并求出其唯一解和一般解.

**【解】** 用初等行变换,化增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right],$$

可见,(1) 当 $a\neq1$ 时,秩$(\boldsymbol{A})=$ 秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=4$,原方程组有唯一解,且可求出唯一解为

$$x_1=\frac{b-a+2}{a-1},\quad x_2=\frac{a-2b-3}{a-1},\quad x_3=\frac{b+1}{a-1},\quad x_4=0.$$

(2) 当 $a=1$ 时,秩$(\boldsymbol{A})=2$.

① 当 $b\neq-1$ 时,秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=3>$ 秩$(\boldsymbol{A})=2$,原方程组无解.

② 当 $b=-1$ 时,秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=$ 秩$(\boldsymbol{A})=2<4$,原方程组有无穷多组解,将 $a=1$ 及 $b=-1$ 代入,易求出其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix},$$

其中,$k_1,k_2$ 为任意常数.

**【例 4.11】** 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 $(a,b,c)$,$a,b,c$ 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常

数)，且 $AB=O$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

【解】由 $AB=O$ 知 $r(A)+r(B)\leqslant 3$，此外 $A\neq 0, B\neq 0$，所以

$$1\leqslant r(A)\leqslant 2, 1\leqslant r(B)\leqslant 2.$$

(Ⅰ) 当 $r(A)=2$ 时，由 $AB=O$ 知线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $(1,2,3)^T$，从而通解为 $x=t(1,2,3)^T$ ($t$ 为任意常数).

(Ⅱ) 当 $r(A)=1$ 时，如果 $k\neq 9$，则由 $AB=O$ 知线性方程组 $Ax=0$ 有基础解系，$\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(3,6,k)^T$，从而通解为

$x=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$ ($t_1, t_2$ 是任意常数).

如果 $k=9$，显然 $\alpha_1=(1,2,3)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的解，此外由于线性方程组 $Ax=0$ 与方程 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 同解. 设 $a\neq 0$，则有与 $\alpha_1$ 线性无关的解向量 $\beta=\left(-\frac{b}{a},1,0\right)^T$，从而线性方程组 $Ax=0$ 的通解为

$x=p_1\alpha_1+p_2\beta$ ($p_1, p_2$ 是任意常数).

【例 4.12】设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，

(Ⅰ) 求满足 $A\xi_2=\xi_1$，$A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 $\xi_2, \xi_3$；

(Ⅱ) 对(Ⅰ)中的任意向量 $\xi_2, \xi_3$ 证明 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 无关.

【解】(Ⅰ) $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&-4&-2&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$，

于是 $r(A)=r(\overline{A})=2$，取 $x_2$ 为自由变量，可得

$$x_3=-2x_2+1, x_1=-x_2.$$

所以 $\xi_2=\begin{bmatrix}-x_2\\x_2\\-2x_2+1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，($x_2=k$，为任意常数).

设 $B=A^2=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{bmatrix}$，

则 $$\overline{B}=\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

于是 $r(B)=r(\overline{B})=1$，取 $x_2, x_3$ 为自由变量，则 $x_1=-x_2-\frac{1}{2}$，所以

$$\xi_3=\begin{bmatrix}-x_2-\frac{1}{2}\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

(其中 $x_2=k_2, x_3=k_3$ 为任意常数).

(Ⅱ)证法1　由(Ⅰ)知

$$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}-1 & -k & -k_2-\frac{1}{2}\\ 1 & k & k_2\\ -2 & -2k+1 & k_3\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -k & -k_2-\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & k_3+2k_2+1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性无关.

证法2　由题设可得 $\boldsymbol{A}\xi_1=\mathbf{0}$. 设存在数 $k_1,k_2,k_3$,使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=\mathbf{0}. \qquad ①$$

等式两端左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$k_1\boldsymbol{A}\xi_1+k_2\boldsymbol{A}\xi_2+k_3\boldsymbol{A}\xi_3=\mathbf{0},\text{则 } k_2\boldsymbol{A}\xi_2+k_3\boldsymbol{A}\xi_3=\mathbf{0},\text{即}$$

$$k_2\xi_1+k_3\boldsymbol{A}\xi_3=\mathbf{0}. \qquad ②$$

等式两端再同乘 $\boldsymbol{A}$,得 $k_2\boldsymbol{A}\xi_1+k_3\boldsymbol{A}^2\xi_3=\mathbf{0}$,即 $k_3\xi_1=\mathbf{0}$,于是 $k_3=0$,代入②式得 $k_2\xi_1=\mathbf{0}$,故 $k_2=0$. 将 $k_2=k_3=0$ 代入①式可得 $k_1=0$,从而 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性无关.

**【例 4.13】**设有三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}.$$

问 $\lambda$ 取何值时,

(1)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式唯一.

(2)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式不唯一.

(3)$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

**【分析】**向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,相当于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 是否有解,其中 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$,因此本题实际上是线性方程组解的判定问题.

**【解】**设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$,　则

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2\end{cases}.$$

其增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda^2(1+\lambda)\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & \lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\end{array}\right],$$

可见

(1) 若 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$,方程组有唯一解,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(2) 若 $\lambda=0$,则方程组有无穷多解,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但表达式不唯一;

(3) 若 $\lambda=-3$,则

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&9\\0&-3&3&-6\\0&0&0&6\end{array}\right],$$

系数矩阵与增广矩阵的秩不相同,方程组无解,故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

**【例 4.14】** 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$,

(1) 证明:若 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 两两不相等,则线性方程组无解;

(2) 设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq0)$ 且已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解,其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$,写出该方程组的通解.

**【分析】**(1) 注意到增广矩阵对应的行列式是著名的范德蒙行列式,其值不为零,由此即可导出结论.(2) 当 $a_1=a_3=k$ 及 $a_2=a_4=-k$ 时,系数矩阵的秩为 2,对应齐次组基础解系包含线性无关解向量的个数为 1,要求通解只需找出对应齐次组的一个非零解($\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$),其可作为基础解系,再加上非齐次组的特解 $\beta_1$ 或 $\beta_2$ 就可得到一般解.

**【解】**(1) 考虑增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{array}\right]$,

若 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 两两不相等,则

$$|\overline{\boldsymbol{A}}|=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(a_i-a_j)\neq0,$$

因此方程组增广矩阵的秩为 4,系数矩阵的秩为 3,此线性方程组无解.

(2) **方法一:** 当 $a_1=a_3=k$ 及 $a_2=a_4=-k$ 时,原方程组化为

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}.$$

系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2,$\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1=(-2,0,2)^{\mathrm{T}}$ 是对应导出组的非零解,即为其基础解系,从而上述非齐次组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)+\boldsymbol{\beta}_1=C\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

其中,$C$ 为任意常数.

**方法二:** 当 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq0)$ 时,原方程组化为

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3,\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3.\end{cases}\qquad ①$$

把 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入上述方程组,得 $k^2=1$,对应齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=0\\x_1-kx_2+k^2x_3=0\end{cases},$$

即
$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}. \quad ②$$

解得 $x_1 = -x_3, x_2 = 0$. ② 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta} = (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,故方程组 ① 的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}_1 + C\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中,$C$ 为任意常数.

## 题型三　讨论两个方程组的公共解

**提示** (1) 由通解表达式相等求公共解;(2) 由两个方程组合并为一个新的方程组求公共解.

**【例 4.15】** 设四元线性齐次方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$,又知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为

$\boldsymbol{x} = k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1)$.

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2) 问线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有无非零公共解?若有,求出所有的非零公共解,若没有,则说明理由.

**【分析】** 回答(2)的关键在于"非零公共解"的理解上,可以这样考虑:① 方程组(Ⅱ)的通解中满足方程组(Ⅰ)的非零解,即为方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解. ② 既可以用方程组(Ⅰ)的通解表示,又可用方程组(Ⅱ)的通解表示的非零解,即为方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解.

**【解】** (1) 由(Ⅰ)可得$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$,于是基础解系为$(0,0,1,0)$,$(-1,1,0,1)$,方程(Ⅰ)的通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = k_3(0,0,1,0) + k_4(-1,1,0,1).$$

(2) **方法一:** 将(Ⅱ)的通解代入方程组(Ⅰ)中,得

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow k_1 = -k_2,$$

当 $k_1 = -k_2 \neq 0$ 时,则向量

$k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1) = k_2(-1,1,1,1)$ 满足方程组(Ⅰ)[显然是(Ⅱ)的解],故方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解,所有非零公共解为

$$k(-1,1,1,1), \quad (k \neq 0 \text{ 的任意常数}).$$

**方法二:** 令　$k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1) = k_3(0,0,1,0) + k_4(-1,1,0,1)$,

$$\Rightarrow \begin{cases} k_2 = k_4 \\ k_1 + 2k_2 = k_4 \\ k_1 + 2k_2 = k_3 \\ k_2 = k_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 - k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_4 = 0 \end{cases},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases} k_1 = -k_4 \\ k_2 = k_4 \\ k_3 = k_4 \end{cases}$，令 $k_1 = -k_2 = -k$，

则 $k_1(0,1,1,0) + k_2(-1,2,2,1) = -k(0,1,1,0) + k(-1,2,2,1) = k(-1,1,1,1)$.

方程组的解向量为 $k(-1,1,1,1)$，此即方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的所有非零公共解.

**【例 4.16】**已知下列非齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases},(\text{Ⅱ})\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}.$$

(1) 求解方程组(Ⅰ)，用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组(Ⅱ)中的参数 $m,n,t$ 为何值时，方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)同解.

**【解】**(1) 对(Ⅰ)的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right],$$

所以(Ⅰ)的导出组有基础解系 $\eta = (1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，

(Ⅰ)有特解 $\eta^* = (-2,-4,-5,0)^{\mathrm{T}}$，

因此(Ⅰ)的通解为

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}(k \text{ 为任意常数});$$

(2) 若(Ⅰ)和(Ⅱ)同解，则(Ⅰ)的通解应是(Ⅱ)的解.

将(Ⅰ)的通解代入(Ⅱ)的各个方程可得 $m,n,t$. 为简便，令 $k = 0$，则有

$$\begin{cases} -2 + m(-4) - (-5) = -5 \\ n(-4) - (-5) = -11 \\ (-5) = -t + 1 \end{cases},\text{解之得 } m = 2, n = 4, t = 6.$$

## 题型四　有关基础解系的证明

提示 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，要求满足：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解；(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；(3) $s = n - r(\boldsymbol{A})$.

**【例 4.17】**方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{m}x_n = 0. \end{cases}$

的系数行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$，而 $\boldsymbol{A}$ 中某元素的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$，试证 $(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^{\mathrm{T}}$

是该方程组的一个基础解系.

【分析】由 $A_{ij} \neq 0$ 知,秩$(\boldsymbol{A}) = n-1$,故基础解系所含向量的个数为 $n - r(\boldsymbol{A}) = 1$,任意一个非零解均可作为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,只需证明$(A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in})^{\mathrm{T}} \neq 0$ 且为解即可.

【证】因为 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 所以 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = 0$.

将 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$ 按列分块,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i = (A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in})^{\mathrm{T}}$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$.

$\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] = [\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}]$,

即 $\boldsymbol{A\alpha}_i = \boldsymbol{0}(i = 1, 2, \cdots, n)$,说明 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

因为 $|\boldsymbol{A}| = 0, A_{ij} \neq 0$,即 $\boldsymbol{A}$ 有一个 $n-1$ 阶非零子式,所以秩$(\boldsymbol{A}) = n-1$,故方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个解向量,由 $A_{ij} \neq 0$,知 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq \boldsymbol{0}$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_i = (A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in})^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【例 4.18】设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1 = t_1\boldsymbol{\alpha}_1 + t_2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = t_1\boldsymbol{\alpha}_2 + t_2\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s = t_1\boldsymbol{\alpha}_s + t_2\boldsymbol{\alpha}_1$,其中 $t_1, t_2$ 为实常数. 试问 $t_1, t_2$ 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【解】由于 $\boldsymbol{\beta}_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合,所以 $\boldsymbol{\beta}_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{0}$,

即 $$(t_1k_1 + t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,必线性无关,因此有

$$\begin{cases} t_1k_1 + t_2k_s = 0 \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0 \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0 \end{cases}.$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s,$$

所以当 $t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s \neq 0$,即当 $s$ 为偶数,$t_1 \neq \pm t_2$;$s$ 为奇数,$t_1 \neq -t_2$ 时,方程组只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$,从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关,此时 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【例 4.19】设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$ 与 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -a \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ t \\ 10 \end{bmatrix}$ 都是 $Ax = 0$ 的基础解系,求 $a, t$ 的值.

【解】因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 都是 $Ax=0$ 的基础解系，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 可以互相线性表示，于是

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \mid \beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&1&1&-5\\2&4&3&5&8&2\\0&2&-1&1&2&t\\-2&a&-6&-a&-2&10\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&1&1&-5\\0&6&-3&3&6&12\\0&2&-1&1&2&t\\0&a-2&0&2-a&0&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&1&1&-5\\0&2&-1&1&2&4\\0&2&-1&1&2&t\\0&a-2&0&2-a&0&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&1&1&-5\\0&2&-1&1&2&4\\0&a-2&0&2-a&0&0\\0&0&0&0&0&t-4\end{array}\right],$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 是基础解系，所以它们等价，且

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3,$$

故 $a\neq 2,t=4$.

## 第 3 节　思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　若已知 $\boldsymbol{AB}=0$，则应将 $\boldsymbol{B}$ 的每列作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解来处理.

【例 4.20】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，证明：秩 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

【证明】由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，及 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，知 $|\boldsymbol{A}|=0$，且 $\boldsymbol{AA}^*=0$.

令 $\boldsymbol{A}^*=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$，则 $\boldsymbol{AA}^*=0\Rightarrow b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所包含解向量的个数为 $n-r(\boldsymbol{A})=n-(n-1)=1$，故必有

$$r(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n-r(\boldsymbol{A})=1.$$

即 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$.

又 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，知必有非零的 $n-1$ 阶子式，从而必有非零的代数余子式，即有 $\boldsymbol{A}^*\neq 0$.

可见 $r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$.

故 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

### 二、综合题解析

【例 4.21】已知四阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性

无关，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

**【解】方法一：** 令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$

得
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4,$$
将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，整理后得
$$(2x_1 + x_2 - 3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (-x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 + (x_4 - 1)\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}.$$
由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，知
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $k$ 为任意常数.

**方法二：** 由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关和 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4$，知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，因此 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含一个向量. 由
$$\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$$

知，$(1, -2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个解，所以其通解为 $\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

再由 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 知，$(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，于是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，其中，k 为任意常数.$$

**【例 4.22】** 如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$

的系数矩阵的秩等于矩阵

$$C=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n\\ b_1 & \cdots & b_n & 0\end{bmatrix}$$

的秩,则该方程组有解.

【证】要证一个非齐次线性方程组有解,只要证明 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$ 即可,方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{array}\right],$$

显然有 $r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant r(\boldsymbol{C})$,又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{C})$,

所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$,故方程组有解.

【例 4.23】设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组的基础解系为 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$,$\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解,证明:

(1)$\boldsymbol{\eta}^*,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$ 线性无关;(2)$\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\zeta_1,\boldsymbol{\eta}^*+\zeta_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\zeta_{n-r}$ 线性无关.

【证】(1) 设存在 $n-r+1$ 个常数 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}$ 使得

$$k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\zeta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}, \qquad ①$$

因为 $\boldsymbol{A\zeta}_i=\boldsymbol{0}\quad(i=1,2,\cdots,n-r)$,$\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$,

所以关系式的两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$,便得

$$k_0\boldsymbol{A\eta}^*+k_1\boldsymbol{A\zeta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

$\Rightarrow k_0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Rightarrow k_0=0$.

于是 ①$\Rightarrow k_1\boldsymbol{\zeta}_1+k_2\boldsymbol{\zeta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$,

因为 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$ 线性无关,所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$.

故 $\boldsymbol{\eta}^*,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$ 线性无关.

(2) 设存在 $n-r+1$ 个常数 $C_0,C_1,\cdots,C_{n-r}$,使得

$$C_0\boldsymbol{\eta}^*+C_1(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_1)+C_2(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_2)+\cdots+C_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\zeta}_{n-r})=\boldsymbol{0},$$

整理,得

$$(C_0+C_1+\cdots+C_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+C_1\boldsymbol{\zeta}_1+C_2\boldsymbol{\zeta}_2+\cdots+C_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}, \qquad ②$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}$,便得

$$(C_0+C_1+\cdots+C_{n-r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\ \Rightarrow\ C_0+C_1+\cdots+C_{n-r}=0. \qquad ③$$

于是 ②$\Rightarrow C_1\boldsymbol{\zeta}_1+C_2\boldsymbol{\zeta}_2+\cdots+C_{n-r}\boldsymbol{\zeta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$,

因为 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$ 线性无关,所以 $C_1=C_2=\cdots=C_{n-r}=0$.

将它们代入 ③ 得 $C_0=0$. 故 $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\zeta_1,\boldsymbol{\eta}^*+\zeta_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\zeta_{n-r}$ 线性无关.

【例 4.24】$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,$n$ 阶方阵 $B$ 的 $n$ 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$. 试问:当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是否有非零解?并证明结论.

【解】$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{AC},$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=n$，所以

$$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}\text{ 有非零解}\Leftrightarrow|\boldsymbol{B}|=0\Leftrightarrow 1+(-1)^{n+1}=0\Leftrightarrow n\text{ 是偶数}.$$

【例 4.25】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $A_{11}\neq 0$，证明：

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 有无穷多解的充要条件是 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

【证】必要性.

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，所以 $r(\boldsymbol{A})<n$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$，

有
$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Ax}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

充分性.

因为 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

所以 $r(\boldsymbol{A}^*)<n$. 又 $A_{11}\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，　$r(\boldsymbol{A})=n-1$.

同时由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，　则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，

因为 $A_{11}\neq 0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，即 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，又 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

【例 4.26】设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{bmatrix}$，　求一秩为 2 的三阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=0$.

【分析】易知 $r(\boldsymbol{A})=1$，于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 $3-1=2$，故可取 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解向量作为 $\boldsymbol{B}$ 的前两列，而 $\boldsymbol{B}$ 的第三列可取 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量(如零向量)，此时 $r(\boldsymbol{B})=2$.

【解】方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$，故所求矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$.

【例 4.27】若线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$

的全部解都是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，证明：向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\ (i=1,2,\cdots,m)$ 线性表出.

【证】考虑方程组　$(\text{Ⅰ})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$

及方程组　$(\text{Ⅱ})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\\b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0\end{cases}$，

由已知(Ⅰ)的解都是(Ⅱ)的解,显然(Ⅱ)的解也都是(Ⅰ)的解,即(Ⅰ)与(Ⅱ)是同解方程组,故其系数矩阵等秩,即

$$\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}).$$

从而 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

**【例 4.28】** 设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}, \tag{④}$$

$$\begin{cases}A_{11}x_1+A_{12}x_2+\cdots+A_{1n}x_n=c_1\\ A_{21}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{2n}x_n=c_2\\ \vdots\\ A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+\cdots+A_{nn}x_n=c_n\end{cases}. \tag{⑤}$$

其中,$A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|=|(a_{ij})_{n\times n}|$ 中的代数余子式;$b_i(i=1,2,\cdots,n)$;$c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为 0. 证明方程组 ④ 有唯一解的充要条件是方程组 ⑤ 有唯一解.

**【证】** 方程组 ④ 有唯一解的充要条件:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

方程组 ⑤ 有唯一解的充要条件:

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\ A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

因为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\ A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$. 而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,

所以 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$,$|\boldsymbol{B}|=||\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

于是可知命题成立.

**【例 4.29】** 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$ 的秩为 $r$,线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{⑥}$$

(其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}$ 为列向量,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$)有特解 $\boldsymbol{\zeta}_0$,它的导出方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$,证明:

(1) 向量 $\boldsymbol{\eta}_0=\boldsymbol{\zeta}_0,\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\zeta}_0+\boldsymbol{\zeta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{\zeta}_0+\boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 是方程组 ⑥ 的线性无关解向量;

(2) $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的一切线性组合

$$k_0\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},\quad(\text{其中 } k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1)$$

是方程组 ⑥ 的全部解.

【证】(1) 因为 $A\zeta_0 = b, A\zeta_i = 0, i = 1,2,\cdots,n-r$,所以

$$A\eta_i = A(\zeta_0 + \zeta_i) = A\zeta_0 + A\zeta_i = b(i = 1,2,\cdots,n-r),$$

因此 $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 是方程组 ⑥ 的解. 令

$$\lambda_0\eta_0 + \lambda_1\eta_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\eta_{n-r} = 0,$$

则
$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-r})\eta_0 + \lambda_1\zeta_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\zeta_{n-r} = 0, \quad ⑦$$

因 $A\eta_0 = b \neq 0$,由 ⑦ 得

$$A[(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-r})\eta_0 + \lambda_1\zeta_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\zeta_{n-r}] = 0,$$

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-r})b = 0,$$

所以有 $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-r} = 0$,

于是
$$\lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\zeta_{n-r} = 0,$$

但 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-r}$ 线性无关,从而 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$,进而有 $\lambda_0 = 0$,可见 $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

(2) 由(1) 知 $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 是方程组 ⑥ 的解,故当 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 1$ 时,易知 $k_0\eta_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$ 是方程组 ⑦ 的解,因为

$$A(k_0\eta_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}) = (k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})b = b,$$

另一方面,令 $\eta$ 为方程组 ⑥ 的任一解,则 $\eta - \zeta_0$ 为 ⑥ 的导出组的解,于是

$$\eta - \zeta_0 = k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 + \cdots + k_{n-r}\zeta_{n-r},$$

令 $k_0 = 1 - k_1 - \cdots - k_{n-r}$,即 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 1$,

由于
$$\eta_0 = \zeta_0, \quad \eta_1 = \zeta_0 + \zeta_1, \cdots, \eta_{n-r} = \zeta_0 + \zeta_{n-r},$$

则
$$\begin{aligned}\eta &= (k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})\zeta_0 + k_1\zeta_1 + \cdots + k_{n-r}\zeta_{n-r} \\ &= k_0\zeta_0 + k_1(\zeta_0 + \zeta_1) + \cdots + k_{n-r}(\zeta_0 + \zeta_{n-r}) \\ &= k_0\eta_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r},\end{aligned}$$

这里 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 1$.

注 (1) 本题是对非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解的结构作进一步的分析和讨论,即非齐次线性方程组一定存在着 $n-r+1$ 个线性无关的解向量.

(2) 对非齐次线性方程组 $Ax = b$,有时也把题中所给的 $n-r+1$ 个解称为 $Ax = b$ 的基础解系,所不同的是它的线性组合只有当线性组合系数之和为 1 时,才是方程组的解.

## 习 题 四

**1. 填空题.**

(1) 在齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 中,若秩$(A) = k$ 且 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是它的一个基础解系,则 $r =$ ______;当 $k =$ ______时,此方程组只有零解.

(2) 若 $n$ 元线性方程组有解,且其系数矩阵的秩为 $r$,则当______时,方程组有唯一解;当______时,方程组有无穷多解.

(3) 齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
只有零解,则 $k$ 应满足的条件是______.

(4) 设 $A$ 为四阶方阵,且秩$(A) = 2$,则齐次线性方程组 $A^*x = 0$($A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵)的基础解系所包含的线性无关解向量的个数为______.

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\-2&1&1\end{bmatrix}$，则 $Ax=0$ 的通解为______.

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_s\alpha_s$ 也是 $Ax=b$ 的一个解，则 $C_1+C_2+\cdots+C_s=$ ______.

(7) 方程组 $Ax=0$ 以 $\eta_1=(1,0,2)^T,\eta_2=(0,1,-1)^T$ 为其基础解系，则该方程的系数矩阵为______.

(8) 设 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$$，则使方程组有解的所有 $b$ 是______.

(9) 设 $A,B$ 为三阶方阵，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&-1&3\\2&k&0\\2&-1&1\end{bmatrix}$，且已知存在三阶方阵 $x$，使得 $Ax=B$，则 $k=$ ______.

**2. 选择题.**

(1) 要使 $\zeta_1=(1,0,1)^T,\zeta_2=(-2,0,1)^T$ 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解，只要系数矩阵 $A$ 为

A. $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}$.　B. $\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$.　C. $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&0\\3&2&1\end{bmatrix}$.　D. $\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&2&0\end{bmatrix}$.　【　】

(2) 设 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表成

A. $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3$ 的一个等价向量组.　B. $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3$ 的一个等秩向量组.

C. $\zeta_1,\zeta_2+\zeta_1,\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3$.　D. $\zeta_1-\zeta_2,\zeta_2-\zeta_3,\zeta_3-\zeta_1$.　【　】

(3) $n$ 阶方阵 $A$ 可逆的充分必要条件是

A. 任一行向量都是非零向量.　B. 任一列向量都是非零向量.

C. $Ax=b$ 有解.　D. 当 $x\neq 0$ 时，$Ax\neq 0$，其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

【　】

**3. 计算证明题.**

(1) 求解下列线性方程组：

① $\begin{cases}3x_1+x_2-6x_3-4x_4+2x_5=0\\2x_1+2x_2-3x_3-5x_4+3x_5=0\\x_1-5x_2-6x_3+8x_4-6x_5=0\end{cases}$；　② $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3\\2x_1+6x_2+x_3-3x_4=2\\x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=-1\\3x_1+9x_2+x_3-5x_4+x_5=5\end{cases}$.

(2) 求方程组 $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\-3x_1+x_2-4x_3+2x_4=-5\\-x_1-9x_2-4x_4=17\end{cases}$.

的通解，并求满足方程组及条件 $5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1$ 的全部解.

(3) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 4x_2 + mx_3 = k \end{cases}$$

问 $m,k$ 为何值时，方程组有唯一解？有无穷多解？在有无穷多组解时，求出一般解.

(4) 问 $\lambda$ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式.

(5) 问 $a$ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式.

(6) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,a+2,-3a)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,b+2,a+2b)$ 及 $\boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)$.

①$a,b$ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

②$a,b$ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的唯一的线性表示，并写出该表示式.

(7) 知方程组 $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

同解，试确定 $a,b,c$ 之值.

(8) 已知下列非齐次线性方程组（Ⅰ）、（Ⅱ）

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases},$$

① 求解方程组（Ⅰ），用其导出组的基础解系表示通解；

② 当方程组（Ⅱ）中的参数 $m,n,t$ 为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{R}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $m \times m$ 矩阵，求证：若 $\boldsymbol{B}$ 可逆且 $\boldsymbol{BA}$ 的行向量都是方程组 $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{0}$ 的解，则 $A$ 的每个行向量也都是该方程组的解.

(10) $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，秩为 $m$；$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times (n-m)$ 矩阵，秩为 $n-m$；又知 $\boldsymbol{AB} = 0$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是满足条件 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{0}$ 的一个 $n$ 维列向量. 证明：存在唯一的一个 $n-m$ 维列向导量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{B\beta}$.

(11) 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，证明：$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$.

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A} \neq 0$. 证明：存在一个 $n$ 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$. 使 $\boldsymbol{AB} = 0$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，若对任意的 $n$ 维向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

(14) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & c & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个解，试求 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解.

(15) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&4\\1&-2\\-2&-2\end{bmatrix}$. 如果矩阵方程 $Ax=B$ 有解,但解不唯一,试确定参数 $a$.

(16) 设 $\eta_1,\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解($A$ 是 $m\times n$ 矩阵),$\zeta$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个非零解,证明:

① 向量组 $\eta_1,\eta_1-\eta_2$ 线性无关;

② 若 $r(A)=n-1$,则向量组 $\zeta,\eta_1,\eta_2$ 线性相关.

## 参　考　答　案

**1.** (1)$n-k,n$; (2)$r=n,r<n$; (3)$k\neq\frac{3}{5}$; (4)4; (5)$k(1,1,1)^{T}$,$k$ 为任意常数; (6)1;

(7)$[-2,1,1]$,注:答案不唯一; (8)$b=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$,$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数;

(9)$k=-2$.

**2.** (1)D (2)C (3)D

**3.**

(1)①$x=k_1\begin{bmatrix}\frac{9}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}\\0\\0\\1\end{bmatrix}$; ②$x=\begin{bmatrix}-5\\0\\0\\-4\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\0\\0\\2\\1\end{bmatrix}$.

(2)$x=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-9\\1\\7\\0\end{bmatrix}$.

(3) 当 $m\neq-1$ 时,方程组有唯一解;当 $m=-1$ 且 $k\neq1$ 时,方程组无解;当 $m=-1$ 而 $k=1$ 时,秩$(A)=$秩$(\overline{A})=2<3$,方程组有无穷多组解.

$$x=\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{1}{7}\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(4) 当 $\lambda=1$ 时,方程组有解　　$x=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$.

(5) 当 $a=1$ 时,原方程组有解,且解的一般形式为

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(6) $a = 0$，$b$ 为任何值时，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合；$a \neq b$，且 $a \neq 0$ 时，有唯一解 $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$，$x_2 = \frac{1}{a}$，$x_3 = 0$，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的唯一线性表示式，且

$$\boldsymbol{\beta} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3.$$

(7) 把 ② 的特解代入 ①，即得 $a = 1, b = 4, c = 3$.

(8) $\boldsymbol{x} = (-2,-4,-5,0) + k(1,1,2,1)$. 将 $\boldsymbol{x}$ 代入(Ⅱ)中的三个方程，可得 $m = 2, n = 4, t = 6$.

(9) ～ (12) 略.

(13) 提示：要证 $\boldsymbol{A} = 0$，只需证秩$(\boldsymbol{A}) = 0$，或者取 $x$ 分别为单位矩阵的各列 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n] = \boldsymbol{0}$，又 $[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]$ 可逆，从而有 $\boldsymbol{A} = 0$.

(14) 当 $a = c$ 且 $a = \frac{1}{2}$ 时，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$， $a \neq \frac{1}{2}$ 时，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(15) $a = -2$.

(16) ① 用定义　② $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2$ 线性相关，由此可推知结论.

# 第五章　特征值和特征向量

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、矩阵的特征值和特征向量的概念

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，$\lambda$ 是一个数，若存在一个 $n$ 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 使关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \tag{①}$$

成立，则称 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，相应的非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量.

① 式可等价地写为

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, \tag{②}$$

② 式存在非零列向量的充要条件是它的系数行列式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

称矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵.

称行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，它的根称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，$\boldsymbol{A}$ 的特征根即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

注 (1) 在讨论矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值问题时，$\boldsymbol{A}$ 必须是方阵，其特征值可能是实数，也可能是复数.

(2) 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{x}$ 一定是非零向量，且对任意非零常数 $k\neq 0$，$k\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量.

(3) 如果 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，且当 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{0}$ 时，$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量.

(4) 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

**【例 5.1】** 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 的逆阵所对应的特征向量，求常数 $k$.

**【解】** 由题设可设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则有

$$\boldsymbol{A}^{-1}\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow\alpha=\lambda(A\alpha)\Rightarrow\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1=\lambda(3+k)\\k=\lambda(2+2k)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{k}=\frac{3+k}{2+2k}\Rightarrow k^2+k-2=0\Rightarrow k=-2\text{ 或 }k=1.$$

### 二、相似矩阵及其性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 $n$ 阶方阵，如果存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

成立，则称矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，记为 $A \sim B$.

如果 $A \sim B$，则有

(1) $A^T \sim B^T$；

(2) $A^{-1} \sim B^{-1}$（若 $A,B$ 均可逆）；$A^* \sim B^*$，

(3) $A^k \sim B^k$（$k$ 为正整数）；

(4) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，从而 $A,B$ 有相同的特征值；但特征向量不一定相同.

(5) $|A| = |B|$，从而 $A,B$ 同时可逆或同时不可逆；

(6) 秩$(A)$ = 秩$(B)$.

注 若 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，则 $A,B$ 不一定相似.

## 三、矩阵可相似对角化的充要条件

若 $n$ 阶矩阵 $A$ 与对角矩阵 $\Lambda$ 相似，则称 $A$ 可以相似对角化，记为 $A \sim \Lambda$，并称 $\Lambda$ 是 $A$ 的相似标准形.

$A$ 与对角矩阵相似的充要条件：$n$ 阶矩阵 $A$ 与对角矩阵相似 $\Leftrightarrow A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

由于不同特征值所对应的特征向量线性无关，因此若 $A$ 有 $n$ 个互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $A$ 必与对角矩阵相似.

设 $\alpha_i$ 为对应于特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的特征向量，则有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)$$

$$= (\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n) = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

记 $P = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，$\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ 为对角矩阵，则 $P^{-1}AP = \Lambda$.

注 $A$ 可对角化的充要条件是对 $A$ 的任一特征根 $\lambda_i$，其重数（设为 $k_i$）与对应线性无关特征向量的个数相同，即 $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$.

## 四、实对称矩阵及其性质

设 $A$ 为实对称矩阵（$A^T = A$），则

(1) $A$ 的特征值为实数，且 $A$ 的特征向量为实向量.

(2) $A$ 的不同特征值对应的特征向量必定正交.

(3) $A$ 一定有 $n$ 个线性无关的特征向量，从而 $A$ 相似于对角矩阵，且存在正交矩阵 $P$，使 $P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $A$ 的特征值.

注 (1) 当 $A$ 有 $n$ 个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时，只需将对应特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 单位化得

$\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\boldsymbol{\alpha}_1}, \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n = \frac{\boldsymbol{\alpha}_n}{|\boldsymbol{\alpha}_n|}$，令 $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n]$，即为所求正交矩阵.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根 $\lambda_i$ 时，则需先将重根对应特征向量正交化(Schmidt 正交化方法)，再次所得正交向量组单位化，并以此作为矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量，则 $\boldsymbol{Q}$ 即为所求正交矩阵.

## 五、重要公式与结论

1. 设 $\lambda$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则矩阵 $k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 分别有特征值为：$k\lambda, \lambda^2, a\lambda+b, \lambda^m, \frac{1}{\lambda}, \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$.

设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应 $\lambda$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{x}$ 也是 $k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 对应特征值 $k\lambda, \lambda^2, a\lambda+b, \lambda^m, \frac{1}{\lambda}, \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 的特征向量.

注 (1)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值，但特征向量不一定相同.

(2)$\boldsymbol{A}^m$ 的特征向量不一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

2. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$，则 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$.

3. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B}), |f(\boldsymbol{A})| = |f(\boldsymbol{B})|$，其中 $f(\boldsymbol{A})$ 为关于 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

4. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值，则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

注 由 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$

$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$，

可得
$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}|$$
$$= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

比较同次幂的系数可得上述结论.

5. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值为 $\lambda_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.

6. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可对角化矩阵，则其非零特征值的个数(重根重复计算) = 秩($\boldsymbol{A}$).

**【例 5.2】** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 的逆阵的特征值为 1,2,3，设 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式，求 $\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{33}$.

**【解】** 由 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义可知，$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，其中 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值.

由题设可知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 1,2,3，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$，于是 $|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

所以 $A^*$ 的特征值为$\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$,故

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1.$$

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　求数值矩阵的特征值与特征向量

**提示** 一般通过 $|\lambda E-A|=0$ 直接计算即可.若 $n\geqslant 4$,应注意能否分块.

设 $\lambda$ 是 $A$ 的一个特征值,$x$ 是 $A$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量的充要条件是:$\lambda$ 为特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 的根,$x$ 是齐次方程组$(\lambda E-A)x=\mathbf{0}$ 的非零解.

其计算步骤如下:

(1) 计算 $|\lambda E-A|$;

(2) 求 $|\lambda E-A|=0$ 的全部根,即为 $A$ 的全部特征值;

(3) 对于每一个特征值$\lambda_0$,求出$(\lambda_0E-A)x=\mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$,其中 $r$ 为矩阵$\lambda_0E-A$ 的秩,则 $A$ 的属于$\lambda_0$ 的全部特征向量为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$,其中 $k_1$,$k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是不全为零的任意常数.

注 若 $|A|=0$,则 $\lambda=0$ 为 $A$ 的特征值,且 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系即为属于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

**【例 5.3】** 设 $A=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$

(1) 试求矩阵 $A$ 的特征值;

(2) 利用(1) 的结果,求矩阵 $E+A^{-1}$ 的特征值,其中 $E$ 是三阶单位矩阵.

**【解】** (1) 因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\\lambda-1&\lambda-1&0\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\1&1&0\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5),$$

故矩阵 $A$ 的特征值为:$1,1,-5$.

(2) 设矩阵 $A$ 对应于特征值$\lambda$ 的特征向量为 $x$,则

$$Ax=\lambda x,$$

于是 $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$,$(E+A^{-1})x=Ex+A^{-1}x=(1+\lambda^{-1})x$,故知 $1+\lambda^{-1}$ 是矩阵 $E+A^{-1}$ 的特征值,将 $\lambda=1,1,-5$ 代入 $1+\lambda^{-1}$,可得矩阵 $E+A^{-1}$ 的特征值为 $2,2,\frac{4}{5}$.

注 若由
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5$$

求 $|\lambda E-A|=0$ 的根，需要分解因式，但三次多项式没有一般因式分解方法，给计算带来困难. 或者说在计算这个三阶行列式时，若直接展开得一个三次多项式，如果不能分解因式（或不会用试根法等分解因式），往往特征值就求不出来，若能在计算过程中就把因子（一次因式）分解出来，这是最理想的，通常也是可行的，可以如下考查行列式 $|\lambda E-A|$：

(1) 把 $|\lambda E-A|$ 的各行（或各列）加起来，若相等，则把相等的部分提出来（一次因式）后，剩下部分是一个二次多项式，肯定可以分解因式.

(2) 把 $|\lambda E-A|$ 的某一行（或某一列）中不含 $\lambda$ 的两个元素之一化为零，往往会出现公因子，本例即是这种情形.

**【例 5.4】** 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 2 & 2\\ -2 & -3 & 6\end{bmatrix}$ 的实特征值及对应的特征向量.

**【分析】** 一个实矩阵的特征值、特征向量都可能是复数，但注意本题只要求选出实特征值并求其对应的特征向量.

**【解】** 把 $|\lambda E-A|$ 的各列加到第一列，得

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ 3 & \lambda-2 & -2\\ 2 & 3 & \lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ \lambda-1 & \lambda-2 & -2\\ \lambda-1 & 3 & \lambda-6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & \lambda-2 & -2\\ 1 & 3 & \lambda-6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+20),$$

有唯一实特征值 $\lambda=1$，对应 $\lambda=1$，由 $(1\cdot E-A)x=0$

$$\begin{cases}-2x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3=0,\\ 2x_1+3x_2-5x_3=0.\end{cases}$$

解得 $x_1=x_2=x_3$，基础解系为 $\eta=(1,1,1)^{\mathrm T}$，故对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm T}$，其中 $k$ 为非零常数.

## 题型二　求抽象矩阵的特征值与特征向量

提示 若 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $f(A)=0$，则由 $Ax=\lambda x, x\neq 0$，知 $A$ 的任一特征值 $\lambda$ 必满足 $f(\lambda)=0$.

**【例 5.5】** 假设 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A^2-3A+2E=O$，证明其特征值只能取值 1 或 2.

**【证】** 设 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值，对应特征向量设为 $x\neq 0$，则

$$Ax=\lambda x,$$

由已知
$$A^2-3A+2E=O$$

得
$$0=(A^2-3A+2E)x=A^2x-3Ax+2Ex=(\lambda^2-3\lambda+2)x,$$

因为 $x\neq 0$，故 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

【例 5.6】设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是非零向量，且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，记 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求(1)$\boldsymbol{A}^2$；(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

【解】(1) 由
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \text{ 和 } \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0,$$
有
$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},$$
即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$.

(2) 设 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\neq 0)$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，于是
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x},$$
因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 故必有 $\lambda=0$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零.

不妨设向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 中分量 $a_1\neq 0,b_1\neq 0$，对齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵施以初等行变换：
$$-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$
因此可得该方程组的基础解系为
$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}.$$
于是，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\quad (k_1,k_2,\cdots,k_{n-1} \text{ 是不全为零的任意常数}).$$

注 若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可分解为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}[b_1,b_2,\cdots,b_n]$，且
$$\boldsymbol{A}^2=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\boldsymbol{A},$$
从而其特征值为 $\lambda_1=a_1b_1+\cdots+a_nb_n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

【例 5.7】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},|\boldsymbol{A}|<0$，试求 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*$ 的一个特征值.

【解】由于 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，故可先算 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 而这需算出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及 $|\boldsymbol{A}|$.

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，所以 $|\boldsymbol{A}|^2=1\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=\pm 1$，又 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，即 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，于是可得 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}=1$，所以 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*$ 的一个特征值为 1.

## 题型三　特征值与特征向量的逆问题

提示 若已知特征向量 $\boldsymbol{\zeta}$，一般用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}=\lambda_0\boldsymbol{\zeta}$ 进行分析；若只知特征值 $\lambda_0$，一般用 $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 进行讨论.

【例 5.8】已知 $\boldsymbol{\zeta}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，

(1) 试确定参数 $a,b$ 及特征向量 $\boldsymbol{\zeta}$ 所对应的特征值；

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角矩阵?说明理由.

**【分析】**已知矩阵及其特征向量,反求参变量,可用定义法:$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}=\lambda\boldsymbol{\zeta}$,得到关于$\lambda,a,b$的方程组,由此可解出$\lambda,a$和$b$,$\boldsymbol{A}$能否相似于对角矩阵,充要条件是能否有3个线性无关的特征向量,求出参数$a,b$后,可直接计算$\boldsymbol{A}$的特征值及线性无关的特征向量的个数.

**【解】**(1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}=\lambda\boldsymbol{\zeta}$,得

$$\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\text{即}\quad\begin{cases}\lambda=2-1-2,\\\lambda=5+a-3,\\-\lambda=-1+b+2.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

(2) $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix},\quad|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

知 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值.

由于 $$\text{秩}(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\text{秩}\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}=2,$$

从而 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量个数为 $3-\text{秩}(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

**【例 5.9】**设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$,对应的特征向量依次为:$\boldsymbol{\zeta}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\zeta}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\zeta}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

**【分析】**这是关于特征值与特征向量的逆问题,即已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量反求矩阵 $\boldsymbol{A}$,可用定义求解.

**【解】**由定义有 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}_1=\lambda_1\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}_2=\lambda_2\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}_3=\lambda_3\boldsymbol{\zeta}_3,$$

于是 $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\zeta}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{\zeta}_1,\lambda_2\boldsymbol{\zeta}_2,\lambda_3\boldsymbol{\zeta}_3),$$

即有 $$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&3\\0&1&-3\end{bmatrix},$$

故所求 $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&3\\0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}.$$

**【例 5.10】**已知 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值.且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=6$ 的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$.

**【分析】**这是已知全部特征值和部分特征向量反求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的问题.关键在于利用已知条件中 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交,依此即可求解.

**【解】**设 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=6$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$,由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量彼此正交,故有$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3)=0$,即

$$\begin{cases}-x_1+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}.$$

解得 $x_1 = x_2 = x_3$，取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^T$，即是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于 $\lambda_1 = 6$ 的特征向量.

进一步，由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)$，

得
$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & -2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -3 & 3\\6 & 0 & -6\\6 & 3 & 3\end{bmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}6 & -3 & 3\\6 & 0 & -6\\6 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & -2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\1 & 4 & 1\\1 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

**【例 5.11】** 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$，属于 $\lambda_1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

**【分析】** 本题已知实对称矩阵的特征值和其中一个特征向量，反求矩阵。求实对称矩阵的正交的特征向量，有时用观察法求解会更便捷.

**【解】** 设 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，由于实对称阵不同特征值对应的特征向量相互正交，故

$$\boldsymbol{\xi}_1^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0, \text{即 } x_2 + x_3 = 0,$$

上式中 $x_1$ 的系数为零，为了使得 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 正交，可取 $x_1$ 为 1 或 0，则有

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

现正交化 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，得

$$\eta_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|} = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, \eta_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2|} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \eta_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|} = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

令 $P = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 $P^{-1} = P^T$，于是有

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A = PAP^{-1} = PAP^T$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

注 因为不同特征值对应的特征向量是正交的，所以我们利用观察法一般求解特征值为重根的

情况，最常见的情况为求3阶对称阵2重根所对应的特征值，具体如下：

设所求特征向量为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，则根据题设条件(如，利用不同特征值对应的特征向量正交或$(A-\lambda E)x=0$)可得方程

$$ax_1+bx_2+cx_3=0.$$

(1) 若$a,b,c$有一为零，不妨设$a=0$，则方程为$bx_2+cx_3=0$，此时可取$x_1=1$或0，则可得正交的特征向量

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}0\\c\\-b\end{bmatrix};$$

(2) 若$a,b,c$有两个为零，不妨设$a=b=0$，则方程为$cx_3=0\Rightarrow x_3=0$，此时只要保证$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$部分正交即可，则可得正交的特征向量

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};$$

(2) 若$a,b,c$均非零，可先取其中一个分量为零，不妨取$x_1=0$，得一特征向量$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\c\\-b\end{bmatrix}$，另外一个特征向量只需考虑$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$的$x_2,x_3$部分，使其与$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\c\\-b\end{bmatrix}$正交，可取$\xi_2=\begin{bmatrix}-\frac{b^2+c^2}{a}\\b\\c\end{bmatrix}$.

## 题型四 相似的判定及其逆问题

**提示** (1) 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，则可推出$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(2) 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$，且对$\forall\lambda$，有$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$.

**【例5.12】** 设有三阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$和$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{bmatrix}$，试判断$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是否相似，若相似，求出可逆矩阵$\boldsymbol{M}$，使得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$.

**【分析】** 若直接由$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$求$\boldsymbol{M}$，显然是相当复杂的，可以变换一下思路：若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都相似于同一对角矩阵，则也可证得$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似.

**【解】** 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为：$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

又由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&6&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为：$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均有三个不相同的特征值，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同时与对角矩阵 $\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$ 相似，由相似关系的对称性与传递性知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

又对应特征值 $\lambda=2,1,-1$，$\boldsymbol{A}$ 有特征向量分别为
$$\boldsymbol{\zeta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\zeta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\zeta}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

对应特征值 $\lambda=2,1,-1$，$\boldsymbol{B}$ 有特征向量分别为
$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}.$$

故存在
$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\zeta}_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&2\end{bmatrix},$$

使得
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}.$$

从而有
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}).$$

令 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}$，则 $\boldsymbol{M}$ 可逆，且使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$. 这里
$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

**【例 5.13】** 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix},$$

(1) 求 $x$ 和 $y$ 的值；(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

**【分析】** 这是相似矩阵的逆问题，即已知两矩阵相似，反过来求矩阵的参数，根据矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征及相似矩阵的性质，可以考虑用如下办法确定参数 $x,y$：

① 相似矩阵有相同的特征多项式；

② $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值即为 $\boldsymbol{B}$ 的对角线元素，依此求出 $x,y$.

**【解】**(1) **方法一**：因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，即
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|,$$

得 $(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$,

令 $\lambda=0$,得, $2(x-2)=2y$, 即 $y=x-2$;

令 $\lambda=1$,得, $y=-2$, 从而 $x=0$.

**方法二:**因 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵,故知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $-1,2,y$,而特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)],$$

以 $\lambda=-1$ 代入得 $x=0$,由 $x=0$ 知 $\boldsymbol{A}$ 有特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)[\lambda^2-\lambda-2]=(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2)=0,$$

故特征值为 $-1,2,-2$,比较特征值知 $y=-2$.

(2) 由(1)知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为:$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,对应特征向量分别可求出为

$$\boldsymbol{x}_1=(0,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

令

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

## 题型五 判断 A 是否可对角化

**提示** **方法一:**$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**方法二:**对 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 $\lambda_i$(设为 $k_i$ 重根),有 $n-r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=k_i$.

**【例 5.14】**设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$,

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和特征向量;

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化?如能对角化,则求出相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{A}$ 化为对角形矩阵.

**【解】**(1) 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-1\\-1&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-1\\-1&\lambda-2&0\\0&-(\lambda-2)&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-1\\-1&\lambda-2&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$,

对应 $\lambda_1=1$,解方程 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{x}_1=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$,则 $\lambda_1$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1(k_1\neq 0)$;

对应 $\lambda_2=2$,解方程 $(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{x}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,则 $\lambda_2$ 的全部特征向量为

$k_2\boldsymbol{x}_2(k_2\neq 0)$;

对应 $\lambda_3=4$,解方程 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{x}_3=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$,则 $\lambda_3$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{x}_3(k_3\neq 0)$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 一定线性无关,因此 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

令
$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}.$$

**【例 5.15】** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&4\\a+5&-a-2&2a\end{bmatrix}$,问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化.

**【解】** $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-1&-4\\-a-5&a+2&\lambda-2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\-2(\lambda-1)&\lambda-1&0\\-a-5&a+2&\lambda-2a\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\-2&1&0\\-a-5&a+2&\lambda-2a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&1&0\\a-1&a+2&\lambda-2a\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\a-1&\lambda-2a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)[\lambda-(2a-1)],$$

(1) 当 $2a-1\neq 1,2$ 即 $a\neq 1,\dfrac{3}{2}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 当 $2a-1=1$,即 $a=1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1(二重),2.

$$1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&0&-4\\-4&-3&2\end{bmatrix},\text{所以 } r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

(3) 当 $2a-1=2$,即 $a=\dfrac{3}{2}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2(二重),

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&-4\\-\frac{13}{2}&\frac{7}{2}&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-4\\0&0&0\end{bmatrix},\text{所以 } r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

综上所述,当 $a\neq 1,\dfrac{3}{2}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

【例 5.16】设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$,已知 $A$ 有三个线性无关的特征向量,$\lambda=2$ 是 $A$ 的二重特征值.试求可逆矩阵 $P$,使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

【解】因为 $A$ 有三个线性无关的特征向量,$\lambda=2$ 是 $A$ 的二重特征值,所以 $A$ 的对应于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有两个,故秩 $r(2E-A)=1$.

经过行的初等变换

$$2E-A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -x & -2 & -y\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & x-2 & -x-y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

于是,解得 $x=2, y=-2$.

矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$,其特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

由此得特征值:$\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$.

解 $(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得对应 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

解 $(6E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得对应 $\lambda_3=6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$.

【例 5.17】设二阶矩阵 $A$ 的行列式为负数,证明 $A$ 可以相似于一个对角矩阵.

【证】设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是 $A$ 的特征值,由于 $|A|=\lambda_1\lambda_2<0$,故 $\lambda_1\neq\lambda_2$,即二阶矩阵 $A$ 有两个不同的特征值,从而有两个线性无关的特征向量,故可以相似于一个对角矩阵.

【例 5.18】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维单位列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,

$$\text{令 } A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\quad \text{证明:}A \text{ 与 }\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\text{相似}.$$

【证】因为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,所以 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}=0$.

又
$$A\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},$$
$$A\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha},$$

所以
$$A(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\quad A(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}),$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为单位正交向量组,所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$. $1,-1$ 是 $A$ 的特征值.

又因为 $r(A)=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2$,所以 $A$ 不可逆,0 是 $A$ 的特征值.

$A$ 有三个不同的特征值 $1,-1,0$,故

$$A\text{与}\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\text{相似.}$$

【例 5.19】设 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A^2-3A+2E=0$，证明 $A$ 相似于一个对角矩阵.

【分析】只要证明 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量即可.

【证】由 $A^2-3A+2E=0$ 可知 $A$ 的特征值 $\lambda$ 满足 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，解得

$\lambda_1=2,\lambda_2=1$，又由 $A^2-3A+2E=(2E-A)(E-A)=0$，

知
$$\text{秩}(2E-A)+\text{秩}(E-A)\leqslant n.$$

另外，
$$\text{秩}(2E-A)+\text{秩}(E-A)=\text{秩}(2E-A)+\text{秩}(A-E)\geqslant\text{秩}(2E-A+A-E)=\text{秩}(E)=n.$$

于是
$$\text{秩}(2E-A)+\text{秩}(E-A)=n.$$

设 $(2E-A)x=\mathbf{0}$ 的线性无关解个数为 $r_1$，则 $r_1=n-\text{秩}(2E-A)$.

设 $(E-A)x=\mathbf{0}$ 的线性无关解个数为 $r_2$，则 $r_2=n-\text{秩}(E-A)$.

所以 $r_1+r_2=n-\text{秩}(2E-A)+n-\text{秩}(E-A)=n$，

所以 $A$ 相似于一个对角矩阵.

## 题型六　有关特征值与特征向量的证明题

【例 5.20】设 $\lambda_1,\lambda_2$ 为 $n$ 阶矩阵 $A$ 的不同特征值，$\zeta_1,\zeta_2$ 分别是 $A$ 的属于 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量，证明：$\zeta_1+\zeta_2$ 不是 $A$ 的特征向量.

【分析】$A$ 为抽象矩阵，可考虑从特征值、特征向量的定义出发求证.

【证】用反证法证明.　若 $\zeta_1+\zeta_2$ 为 $A$ 的属于某特征值 $\lambda$ 的特征向量，则由定义有

$$A(\zeta_1+\zeta_2)=\lambda(\zeta_1+\zeta_2),$$

根据已知　$A\zeta_1=\lambda_1\zeta_1$，　$A\zeta_2=\lambda_2\zeta_2$，得

$$A(\zeta_1+\zeta_2)=A\zeta_1+A\zeta_2=\lambda_1\zeta_1+\lambda_2\zeta_2,$$

从而有
$$\lambda_1\zeta_1+\lambda_2\zeta_2=\lambda(\zeta_1+\zeta_2),$$

即
$$(\lambda-\lambda_1)\zeta_1+(\lambda-\lambda_2)\zeta_2=\mathbf{0},$$

因为 $\zeta_1,\zeta_2$ 属于不同的特征值，所以 $\zeta_1,\zeta_2$ 线性无关，于是

$$\lambda-\lambda_1=0,\quad \lambda-\lambda_2=0,$$

即有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，此与题设矛盾，故 $\zeta_1+\zeta_2$ 不是 $A$ 的特征向量.

【例 5.21】设方阵 $A$ 满足条件 $A^{\mathrm{T}}A=E$，其中 $A^{\mathrm{T}}$ 是 $A$ 的转置矩阵，$E$ 为单位阵，试证 $A$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

【证】设 $\alpha$ 为 $A$ 的实特征向量，其所对应的特征值为 $\lambda$，则

$$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow(A\alpha)^{\mathrm{T}}=(\lambda\alpha)^{\mathrm{T}}\Rightarrow\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\lambda\alpha^{\mathrm{T}}\Rightarrow\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(A\alpha)=\lambda\alpha^{\mathrm{T}}(\lambda\alpha)\Rightarrow\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\alpha=\lambda^2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha,$$

因为 $A^{\mathrm{T}}A=E$，所以 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\lambda^2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，从而 $(\lambda^2-1)\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=0$，

因为 $\alpha$ 为实特征向量，$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha>0$，所以

$$\lambda^2-1=0,$$

故　$|\lambda|=1$.

【例 5.22】设 $A$ 为正交矩阵，若 $|A|=-1$，求证 $A$ 一定有特征值 $-1$.

【证】设矩阵 $A$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|A-\lambda E|,$$

则 $$f(-1)=|A+E|, \qquad ①$$

又因为 $A$ 为正交阵，所以 $AA^{T}=E$，

于是 $$f(-1)=|A+AA^{T}|=|A||E+A^{T}| \quad (\text{因为 }|A|=-1)$$

$$=-|E+A^{T}|=-|(E+A)^{T}|=-|A+E|, \qquad ②$$

由 ①②⇒ $|A+E|=0$，即 $|A-(-1)E|=0$，

故 $-1$ 为 $A$ 的一个特征根.

**【例 5.23】** 试证：$n$ 阶方阵 $$A=a^{2}\begin{bmatrix}1&\rho&\rho&\cdots&\rho\\\rho&1&\rho&\cdots&\rho\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\rho&\rho&\rho&\cdots&1\end{bmatrix}$$

的最大特征值是 $\lambda_1=a^{2}[1+(n-1)\rho]$，其中 $0<\rho<1$.

**【证】** $A$ 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a^{2}-\lambda&a^{2}\rho&a^{2}\rho&\cdots&a^{2}\rho\\a^{2}\rho&a^{2}-\lambda&a^{2}\rho&\cdots&a^{2}\rho\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a^{2}\rho&a^{2}\rho&a^{2}\rho&\cdots&a^{2}-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-a^{2}+a^{2}\rho)^{n-1}[\lambda-a^{2}+(1-n)a^{2}\rho],$$

于是 $A$ 的特征值为

$$\lambda_1=a^{2}[1+(n-1)\rho],\quad \lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=a^{2}(1-\rho).$$

由于，$0<\rho<1$，$a^{2}>0$，故 $\lambda_1>\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n$，即 $\lambda_1=a^{2}[1+(n-1)\rho]$ 为 $A$ 的最大特征值.

**【例 5.24】** 设 $A,B$ 是 $n$ 阶矩阵. 证明：

(1) $AB$ 与 $BA$ 有相同的特征值；

(2) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$. 其中 $\mathrm{tr}(AB)$，$\mathrm{tr}(BA)$ 分别表示 $AB$，$BA$ 的主对角线上的元素相加之和.

**【证】** 设 $\lambda\neq0$ 是 $AB$ 的任一特征值，$\alpha\neq0$ 是 $AB$ 与 $\lambda$ 对应的特征向量，即

$$(AB)\alpha=\lambda\alpha, \qquad ③$$

用 $B$ 左乘上式两端，有

$$(BA)(B\alpha)=\lambda(B\alpha), \qquad ④$$

若记 $\beta=B\alpha$，则 ④ 式可写成

$$(BA)\beta=\lambda\beta,$$

由 ③ 式知 $\beta=B\alpha\neq0$（否则就有 $\alpha=0$）. 因此 $\lambda$ 是矩阵 $BA$ 的特征值.

设 $\lambda=0$ 是 $AB$ 的特征值，$\alpha\neq0$ 是对应的特征向量，即

$$(AB)\alpha=0\cdot\alpha=0,$$

亦即 $\alpha$ 是齐次方程组

$$(AB)\alpha=0$$

的非零解，于是齐次方程组的系数行列式

$$|AB|=|A|\cdot|B|=|BA|=0.$$

因而齐次方程组 $(BA)x=0$ 有非零解 $\beta$，所以 $\beta$ 满足

$$(BA)\beta=0\cdot\beta,$$

故 $\lambda=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

综上所述,矩阵$\boldsymbol{AB}$ 的特征值都是矩阵$\boldsymbol{BA}$ 的特征值,同理可证$\boldsymbol{BA}$ 的特征值都是$\boldsymbol{AB}$ 的特征值,故(1) 中结论成立.

又若设 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则由公式

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,$$

有 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$,即(2) 成立.

## 第 3 节　思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势**　若已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量$\boldsymbol{\zeta}_0$,则先用定义 $\boldsymbol{A\zeta}_0=\lambda_0\boldsymbol{\zeta}_0$ 处理一下再说.

**【例 5.25】**已知 $\boldsymbol{\zeta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$的一个特征向量.

(1) 试确定参数 $a,b$ 及特征向量$\boldsymbol{\zeta}$ 所对应的特征值;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵?说明理由.

**【解】**(1) 设与$\boldsymbol{\zeta}$ 对应的特征值为$\lambda$,则$\lambda$ 满足$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&a-\lambda&3\\-1&b&-2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}(2-\lambda)-1-2=0,\\5+(a-\lambda)-3=0,\\-1+b+(2+\lambda)=0.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$.

(2) 将(1) 结果代入 $\boldsymbol{A}$ 中,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$,其特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3,$$

解得特征值 $\lambda=-1$(三重根),

而 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=r\begin{bmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{bmatrix}=2$,

因而$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有一个线性无关的解向量,故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

### 二、综合题解析

**提示**(1) 利用特征值与相似矩阵求行列式.

① $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为$\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值.

② 若 $A \sim B$,则 $|A| = |B|$.

(2) 利用相似对角化求 $A^n$.

若 $A \sim \Lambda$,即存在可逆阵 $P$,使 $P^{-1}AP = \Lambda$,则 $A = P\Lambda P^{-1}$,从而 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$.

**【例 5.26】**(1) 设 $\alpha = (1,0,-1)^T$,矩阵 $A = \alpha\alpha^T$,$n$ 为正整数,则 $|aE - A^n| =$ ______.

(2) 已知四阶矩阵 $A$ 与 $B$ 相似,矩阵的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,则行列式 $|B^{-1} - E| =$ ______.

(3) 设 $A$ 为 3 阶方阵,且 $|A-2E| = |A+2E| = |3A-2E| = 0$,则 $|3A^* - 2A^{-1}| =$ ______.

**【解】**(1) 因为 $\alpha^T\alpha = (1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2$,

所以 $A = \alpha\alpha^T$ 的三个特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

于是 $aE - A^n$ 的三个特征值为 $\mu_i = a - \lambda_i^n$, $(i = 1,2,3)$,即

$$\mu_1 = a - 2^n, \mu_2 = \mu_3 = a,$$

故行列式 $|aE - A^n| = \mu_1\mu_2\mu_2 = a^2(a - 2^n)$.

注 本题也可先求出 $A^n = 2^{n-1}A$,再计算行列式 $|aE - A^n|$.

(2) 因为 $A \sim B$,所以 $B$ 的四个特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$.

于是 $B^{-1}$ 的四个特征值为 2,3,4,5,进而 $B^{-1} - E$ 的四个特征值为 1,2,3,4,故行列式 $|B^{-1} - E| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

(3)**【分析】**利用特征值的以下性质:

若 $\lambda$ 为 $A$ 的特征值,则 $A^{-1}, A^*$ 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}$.

**【解】**由 $|A-2E| = |A+2E| = |3A-2E| = 0$ 可得 $A$ 的特征值

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \frac{2}{3}$,于是 $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -\frac{8}{3}$.

所以 $|3A^* - 2A^{-1}| = |3|A|A^{-1} - 2A^{-1}| = |-9A^{-1}| = \frac{(-9)^3}{|A|} = \frac{(-9)^3}{\left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{2\,187}{8}$.

**【例 5.27】**设三阶矩阵 $A$ 的特征值分别为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$,对应的特征向量依次为

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \zeta_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},$$

又向量 $\beta = (3,-2,0)^T$.

(1) 将 $\beta$ 用 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 线性表示;

(2) 求 $A^n\beta$($n$ 为正整数).

**【分析】**为了简化与方阵的高次幂有关的运算,往往可以从矩阵的特征值、特征向量和矩阵的相似概念着手.设 $\zeta$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量,则 $A\zeta = \lambda\zeta, A^k\zeta = \lambda^k\zeta$;若 $P^{-1}AP = \Lambda$,则 $A = P\Lambda P^{-1}, A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ 转化为对角矩阵 $\Lambda$ 的高次幂.

**【解】**(1) 设 $\beta = x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3$,得方程

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix},$$

由于 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\-1&-1&1&-2\\0&1&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&1&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$,

从而解得 $x_1=2,x_2=1,x_3=1$,故

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\zeta}_1+\boldsymbol{\zeta}_2+\boldsymbol{\zeta}_3.$$

(2) **方法一**:利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}_i=\lambda_i\boldsymbol{\zeta}_i,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\zeta}_i=\lambda_i^n\boldsymbol{\zeta}_i(i=1,2,3)$,

有 $$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n(2\boldsymbol{\zeta}_1+\boldsymbol{\zeta}_2+\boldsymbol{\zeta}_3)=2\lambda_1^n\boldsymbol{\zeta}_1+\lambda_2^n\boldsymbol{\zeta}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{\zeta}_3$$

$$=2(-1)^n\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+1^n\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+3^n\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-1)^n+1\\2(-1)^{n+1}+3^n-1\\1-3^n\end{bmatrix}.$$

**方法二**:

令 $$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\zeta}_3]=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

则 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$,从而

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n&&\\&1^n&\\&&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(-1)^n+1\\2(-1)^{n+1}+3^n-1\\1-3^n\end{bmatrix}.$$

这里利用了(1)的结果 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$.

**【例 5.28】**已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与三维向量 $\boldsymbol{x}$,使得向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,且满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$.

(1) 记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]$,求三阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

**【解】方法一**: 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$,则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$,得

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}.$$

上式可写成

$$\boldsymbol{Ax} = a_1\boldsymbol{x} + b_1\boldsymbol{Ax} + c_1\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} \quad ①$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = a_2\boldsymbol{x} + b_2\boldsymbol{Ax} + c_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \quad ②$$

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = a_3\boldsymbol{x} + b_3\boldsymbol{Ax} + c_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \quad ③$$

将 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 代入 ③ 式得

$$3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = a_3\boldsymbol{x} + b_3\boldsymbol{Ax} + c_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \quad ④$$

由于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,故

由 ① 式可得　$a_1 = c_1 = 0, b_1 = 1$;

由 ② 式可得　$a_2 = b_2 = 0, c_2 = 1$;

由 ④ 式可得　$a_3 = 0, b_3 = 3, c_3 = -2$.

从而

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**方法二:**利用 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$,有

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]$$

$$= [\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关知,$\boldsymbol{P}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**方法三:**将 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 改写成 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Ax}) = -3(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Ax})$,故 $\lambda_1 = -3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Ax}$ 为属于 $-3$ 的特征向量. 同理可得 $\lambda_2 = 1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,$3\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 为属于 1 的特征向量;$\lambda_3 = 0$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{Ax} - 3\boldsymbol{x}$ 为属于 0 的特征向量,令

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

但另一方面,$\boldsymbol{Q}$ 为由特征向量组成的矩阵,所以 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为由对应的特征值组成的对角矩阵:

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $B=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$.

(2) 由(1) 知 $A$ 与 $B$ 相似,从而 $A+E$ 与 $B+E$ 相似,故

$$|A+E|=|B+E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

**【例 5.29】**选择题.

(1) 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $A$ 的特征值,则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$.　(B) $\frac{3}{4}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{1}{4}$.　【　】

(2) 若 $n$ 阶矩阵 $A$ 的任意一行中 $n$ 个元素的和都是 $a$,则 $A$ 的一个特征值为

(A)$a$.　(B)$-a$.　(C)0.　(D)$a^{-1}$.　【　】

(3) 设 $A$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,$\lambda$ 是 $A$ 的一个特征值,则 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 的特征值之一是

(A)$\lambda^{-1}|A|^n$.　(B)$\lambda^{-1}|A|$.　(C)$\lambda|A|$.　(D)$\lambda|A|^n$.

【　】

(4) 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵,$\lambda_1,\lambda_2$ 是 $A$ 的特征值,$\zeta_1,\zeta_2$ 是 $A$ 的分别对应于 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量,则

(A)$\lambda_1=\lambda_2$ 时,$\zeta_1,\zeta_2$ 一定成比例.　(B)$\lambda_1=\lambda_2$ 时,$\zeta_1,\zeta_2$ 一定不成比例.

(C)$\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,$\zeta_1,\zeta_2$ 一定成比例.　(D)$\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,$\zeta_1,\zeta_2$ 一定不成比例.

【　】

**【分析】**(1) $A^2$ 有一个特征值 $2^2=4$,$\frac{1}{3}A^2$ 有一个特征值 $\frac{4}{3}$,$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值 $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{4}$,故(B) 为正确答案.

(2) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,则把 $|\lambda E-A|$ 的各列加到第一列可提出公因子 $\lambda-a$,可见 $\lambda=a$ 是 $A$ 的一个特征值.故正确答案为(A).

(3) 由 $AA^*=|A|E$ 知,$A^*=|A|A^{-1}$,故 $A^*$ 有一特征值 $\frac{1}{\lambda}|A|=\lambda^{-1}|A|$,(B) 为正确选项.

(4) 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 为重根时,可能有多于一个线性无关的特征向量,也可能只有一个线性无关的特征向量,显然(A),(B) 均不成立,当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,属于不同特征值的特征向量一定线性无关,故(D) 成立.

**【例 5.30】**选择题.

(1) 若 $A\sim B$,则有

(A)$\lambda E-A=\lambda E-B$.

(B) $|A|=|B|$.

(C) 对于相同的特征值$\lambda$,矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征向量.

(D)$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$均与同一个对角矩阵相似. 【 】

(2) 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵,有特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$,其对应特征向量分别为$\boldsymbol{\zeta}_1$,$\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\zeta}_3$,记$\boldsymbol{P}=[2\boldsymbol{\zeta}_2,-3\boldsymbol{\zeta}_3,4\boldsymbol{\zeta}_1]$,则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$等于

(A)$\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&1\end{bmatrix}$.(B)$\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$. (C)$\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$. (D)$\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$.

【 】

(3) $n$阶矩阵有$n$个不同的特征值是$\boldsymbol{A}$与对角矩阵相似的

(A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件. 【 】

(4) $n$阶矩阵与对角矩阵相似的充分必要条件是

(A)$\boldsymbol{A}$有$n$个不全相同的特征值. (B)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$有$n$个不全相同的特征值.

(C)$\boldsymbol{A}$有$n$个不相同的特征向量. (D)$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量.

【 】

(5) $n$阶方阵$\boldsymbol{A}$与某对角矩阵相似,则

(A) 方阵$\boldsymbol{A}$的秩等于$n$. (B) 方阵$\boldsymbol{A}$有$n$个不同的特征值.

(C) 方阵$\boldsymbol{A}$一定是对称阵. (D) 方阵$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量.

【 】

(6) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&x\\-3&-3&5\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}$有特征值$\lambda_1=6,\lambda=2$(二重),且$\boldsymbol{A}$有三个线性无关的特征向量,则$x$为

(A)2. (B)$-2$.

(C)4. (D)$-4$. 【 】

【分析】(1) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,从而$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|$,故(B)为正确答案.(A),(C)一般不成立,$\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{B}$不一定可以与对角矩阵相似,故(D)也是错误的.

(2) 因$\boldsymbol{\eta}_2=2\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\eta}_3=-3\boldsymbol{\zeta}_3,\boldsymbol{\eta}_1=4\boldsymbol{\zeta}_1$仍为$\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1$的特征向量,故

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_1]=[\boldsymbol{A\eta}_2,\boldsymbol{A\eta}_3,\boldsymbol{A\eta}_1]$$

$$=[\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_1]\begin{bmatrix}\lambda_2&&\\&\lambda_3&\\&&\lambda_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&1\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&1\end{bmatrix}.$$

注意化为对角矩阵时,特征值与特征向量的对应关系.

(3) 矩阵有$n$个不同的特征值,则一定有$n$个线性无关的特征向量,从而一定可对角化,反过来不成立,故$\boldsymbol{A}$具有$n$个不同的特征值是$\boldsymbol{A}$与对角矩阵相似的充分但非必要条件,(B)为正确答案.

(4) 显然(D)为正确答案.注意(A),(B)中“不全相同”和“全不相同”的差别.(C)中有$n$个不相同的特征向量不是充分条件,因这$n$个不相同的特征向量可以线性相关.

(5) (B),(C) 是充分但非必要条件,$A$ 的秩与 $A$ 是否可对角化没有直接关系,(A) 也不成立,只有(D) 为 $A$ 与对角矩阵相似的必要条件,是正确选项.

(6) $A$ 有三个线性无关的特征向量,说明存在可逆矩阵 $P$,使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

于是 $|A| = 24$,得 $x = -2$.

或直接由 $|\lambda E - A| = (\lambda - 6)(\lambda - 2)^2$,

也可得 $x = -2$,故(B) 为正确答案.

## 习 题 五

**1. 填空题.**

(1) 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵,$A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵,$|A| = 5$,则方阵 $B = AA^*$ 的特征值是______,特征向量是______.

(2) 三阶方阵 $A$ 的特征值为 $1, -1, 2$,则 $B = 2A^3 - 3A^2$ 的特征值为______.

(3) 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

且 $A$ 的特征值为 2 和 1(二重),那么 $B$ 的特征值为______.

(4) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似,则 $x =$______,$y =$______.

(5) 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵,且 $|A| \neq 0$,则 $AB$ 和 $BA$ 相似,这是因为存在可逆矩阵 $P =$______,使得 $P^{-1}ABP = BA$.

**2. 选择题.**

(1) 零为矩阵 $A$ 的特征值是 $A$ 为不可逆的

A. 充分条件. B. 必要条件.

C. 充要条件. D. 非充分也非必要条件. 【 】

(2) 设 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 是矩阵 $A$ 的两个不相同的特征值,$\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}$ 是 $A$ 的分别属于 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量,则

A. 对任意 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_1\boldsymbol{\zeta} + k_2\boldsymbol{\eta}$ 都是 $A$ 的特征向量.

B. 存在常数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$,使 $k_1\boldsymbol{\zeta} + k_2\boldsymbol{\eta}$ 是 $A$ 的特征向量.

C. 当 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 时,$k_1\boldsymbol{\zeta} + k_2\boldsymbol{\eta}$ 不可能是 $A$ 的特征向量.

D. 存在唯一的一组常数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$,使 $k_1\boldsymbol{\zeta} + k_2\boldsymbol{\eta}$ 是 $A$ 的特征向量. 【 】

(3) 设 $\lambda_0$ 是 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征值,且齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\eta_1$ 与 $\eta_2$,则 $A$ 的属于 $\lambda_0$ 的全部特征向量是

A. $\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$.

B. $\boldsymbol{\eta}_1$ 或 $\boldsymbol{\eta}_2$.

C. $C_1\boldsymbol{\eta}_1 + C_2\eta_2$($C_1, C_2$ 为任意常数).

D. $C_1\boldsymbol{\eta}_1 + C_2\boldsymbol{\eta}_2$($C_1, C_2$ 为不全为零的任意常数). 【 】

(4) 设 $\lambda_1, \lambda_2$ 为 $A$ 的两个不相同的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $A$ 的分别属于 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 的特征向量,则有 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是

A. 线性相关. B. 线性无关.

C. 对应分量成比例. D. 可能有零向量. 【 】

(5) 与 $n$ 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 相似的矩阵是

A. 数量矩阵 $k\boldsymbol{E}(k\neq 1)$. B. 对角矩阵 $\boldsymbol{D}$(主对角元素不为 1).

C. 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$. D. 任意 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$. 【 】

(6) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

A. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征矩阵相同. B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征方程相同.

C. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵. D. 存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{B}$. 【 】

**3. 计算证明题.**

(1) 设 $\lambda=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&-1&2\\0&-1&4\\t&0&1\end{bmatrix}$ 的特征值，求：① $t$ 的值；② 对应于 $\lambda=1$ 的所有特征向量.

(2) 求 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

(3) 假定 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意一行中，$n$ 个元素的和都是 $a$，试证 $\lambda=a$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是对应于 $\lambda=a$ 的特征向量，又问此时 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和为多少？

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 $n$ 阶矩阵，且秩 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，证明：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

(5) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&x\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}y&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

① 求 $x$ 和 $y$ 的值；② 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$，其中 $k$ 为实数，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，并求 $k$ 为何值时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

(8) 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,\cdots,n$，试求 $|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

(9) 判断矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$$
是否可对角化？若可对角化，求出可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{AU}$ 为对角矩阵.

(10) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-1&-1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

(11) 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践，至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工，设第 $n$ 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 $x_n$

和 $y_n$，记成向量 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.

（Ⅰ）求 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$；

（Ⅱ）验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（Ⅲ）当 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 时，求 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$.

(12) 设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，$\lambda_1 \neq \lambda_2$；$\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1$ 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_2$ 的线性无关的特征向量，证明 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_r, \boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_s$ 线性无关.

## 参 考 答 案

**1.** (1)5($n$ 重)，任意 $n$ 维非零向量； (2)$-1,-5,4$； (3)2,1(二重)； (4)0,1； (5)$\boldsymbol{A}$.

**2.** (1)C (2)C (3)D (4)B (5)C (6)B

**3.** (1)$t$ 为任意实数，$k\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2)$\lambda = 0$($n$ 重)，特征向量为 $k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}(k \neq 0)$.

(3) $\frac{1}{a}$. (4) 略. (5) $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

(6)$x = 1, y = -1, \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(7)$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2 \end{bmatrix}$，$k \neq -2$ 且 $k \neq 0$. (8) $|2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| = \prod_{i=1}^{n}(2i+1)$.

(9) 可对角化，$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{AU} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(10)$\boldsymbol{A}^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{101} - 2 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}(1 - 2^{100}) & 1 \end{bmatrix}$.

(11)（Ⅰ）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$； （Ⅱ）略； （Ⅲ）$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$.

(12) 略.

# 第六章　二　次　型

## 第 1 节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、二次型及其矩阵表示

$n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

其中,$a_{ij}=a_{ji}$,$(i,j=1,2,\cdots,n)$,称为 $n$ 元二次型,简称二次型.

若令

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

则二次型 $f$ 可改写成矩阵向量形式

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 称为二次型矩阵,因为 $a_{ji}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,所以二次型矩阵均为对称矩阵,且二次型与对称矩阵一一对应,并把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型的秩.

### 二、化二次型为标准型

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{r}d_iy_i^2,\quad (r\leqslant n)$$

称为 $f$ 的标准形.

在一般的数域内,二次型的标准形不是唯一的,与所作的合同变换有关,但系数不为零的平方项的个数由 $r$($\boldsymbol{A}$ 的秩) 唯一确定.

任一实二次型 $f$ 都可经合同变换化为规范型

$$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2.$$

其中,$r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩;$p$ 为正惯性指数;$r-p$ 为负惯性指数,且规范型唯一.

化二次型为标准型的方法有:配方法、正交变换法.

注1 对于任一二次型,不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准形,其正负惯性指数与所选变换无关,这就是所谓的惯性定理.

注2 两个 $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同.

任一实对称矩阵合同于一个对角矩阵;实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充要条件是二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正、负惯性指数.

## 三、配方法和正交变换法

### 1.配方法

若 $f$ 含有平方项,即若某平方项系数 $a_{ii}\neq 0$,就把含 $x_i$ 的项归并在一起,并对其进行配方;若 $f$ 没有平方项,应先变换出平方项[如 $a_{12}\neq 0$,可令 $x_1=y_1+y_2, x_2=y_1-y_2, x_i=y_i(i\geqslant 3)$],再进行配方.

注 所作的线性变换一定要是可逆的线性变换.

**【例 6.1】** 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 为标准形.

**【解】** 因为
$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2 \\ &= 2x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3 \\ &= 2\left[x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3)\right]^2+\frac{3}{2}x_2{}^2+\frac{3}{2}x_3{}^2-3x_2x_3 \\ &= 2\left[x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3)\right]^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2, \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{1}{2}(x_2+x_3) \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$,即 $\begin{cases} x_1=y_1-\dfrac{1}{2}y_2-y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$,则可将原二次型化为标准形

$$f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2.$$

注 本题切不可令

$\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3+x_1 \end{cases}$,想当然地将二次型化为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

上述解法是错误的,因为

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$,所以 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3+x_1 \end{cases}$ 不是可逆的线性变换.

利用配方法化二次型为标准形时,所作的线性变换一定要是可逆的.

### 2.正交变换法

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶实对称矩阵,按以下步骤进行:

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$;

(2) 对每个 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,t)$,求出 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{is_i}$;

(3) 将 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{is_i}$ 正交化、单位化,得 $r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{is_i}$,它是单位正交向量组,而且是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_i$ 的线性无关的特征向量;

(4) 以 $r_{11},r_{12},\cdots,r_{1s_1},r_{21},\cdots,r_{2s_2},\cdots,r_{t1},\cdots,r_{ts_t}$ 为列向量,构造出正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{T}$ 即为所求的正交变换矩阵,可使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

对于二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准型 $f = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$，其中，$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$.

## 四、二次型和矩阵的正定性及其判别法

如果实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，对任意一组不全为零的实数 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，都有 $f(x_1,\cdots,x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$，则称该二次型为正定二次型，正定二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵. 合同变换不改变二次型的正定性.

实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充要条件是以下条件之一成立：

(1) 正惯性指数为 $n$；

(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零；

(3)$\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零；

(4) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$；

(5) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$，$\lambda_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$

注 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，则 $k\boldsymbol{A}(k > 0)$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，则有 $|\boldsymbol{A}| > 0$，从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上元素 $a_{ii} > 0$，$(i = 1,2,\cdots,n)$.

**【例 6.2】** 填空.

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的矩阵是________，二次型的秩为________.

(2) 已知二次型的系数矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$，那么与它相对应的二次型 $f(x_1,x_2,x_3) =$ ________.

(3) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定的，那么 $t$ 应满足不等式________.

(4) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵，则 $k$ 满足条件________.

(5) 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$ 的秩为________，正惯性指数为________，负惯性指数为________.

(6) 若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 合同，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为________.

**【解】** (1) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，3； (2)$2x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$；

(3) $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$;　(4) $k>1$;　(5) 3,2,1;　(6) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

**【分析】**(1) 题设中二次型矩阵为 $\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$,由于其对应行列式不为零,故其秩为 3.

(2) $$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 3 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$
$$=2x_1^2-x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3+8x_2x_3.$$

(3) 题设二次型矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$,为使二次型正定,各阶顺序主子式应满足:

$$|\boldsymbol{A}_1|=1>0,\ |\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0,\ |\boldsymbol{A}_3|=\begin{vmatrix}1 & t & 1\\ t & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=4-2t^2>0,$$

故当 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ 时,二次型正定.

(4) 为使 $\boldsymbol{A}$ 正定,应有

$$|\boldsymbol{A}_1|=1>0,\quad |\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & k\end{vmatrix}=k-1>0$$

$$|\boldsymbol{A}_3|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & k & 1\\ 0 & 0 & k^2\end{vmatrix}=k^2(k-1)>0,$$

故当 $k>1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 正定.

(5) 经过非退化线性变换

$$\begin{cases}x_1=z_1\\ x_2=z_3\\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}z_2\end{cases},$$

可把 $f$ 化为 $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

故 $f$ 的秩为 3,正惯性指数为 2,负惯性指数为 1.

(6) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正负惯性指数.

又因为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1,3,-2,所以 $\boldsymbol{B}$ 的正负惯性指数分别为 2 和 1,故二次型 $x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

**【例 6.3】**选择题.

(1) 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是

(A) $|\boldsymbol{A}|>0$.

(B) 存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

(C) 负惯性指数为零.

(D) 对某一 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. 【　】

(2) 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+tx_2^2+3x_3^2$,当 $t=(\quad)$ 时,其秩为 2.

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3. 【 】

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个三阶实矩阵,如果对任一三维列向量 $\boldsymbol{x}$,都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$,那么

(A) $|\boldsymbol{A}|=0$. (B) $|\boldsymbol{A}|>0$. (C) $|\boldsymbol{A}|<0$ (D) 以上都不对. 【 】

(4) $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是

(A) 所有 $k$ 级子式为正($k=1,2,\cdots,n$). (B) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值非负.

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定矩阵. (D) 秩($\boldsymbol{A}$) $=n$. 【 】

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶实对称矩阵,且都正定,那么 $\boldsymbol{AB}$ 是

(A) 实对称矩阵. (B) 正定矩阵. (C) 可逆矩阵. (D) 正交矩阵. 【 】

(6) 与 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&9\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-2\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$. 【 】

**【分析】**(1) (A),(C),(D) 均只是二次型 $f$ 正定的必要条件而非充分条件. 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵,故 $\boldsymbol{Cx}\neq\boldsymbol{0}$,从而 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Cx}>0$,说明 $f$ 是正定的,故(B) 为正确答案.

(2) 题设二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&t&0\\0&0&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&t-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,

可见当 $t=1$ 时,其秩为 2,故(B) 为正确选项.

(3) 由 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$,得$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$,于是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=0$,

对任一三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 均成立,其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,故必有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=0$,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$ 为三阶反对称矩阵,于是 $|\boldsymbol{A}|=0$,故(A) 为正确答案.

(4) (A) 是充分但非必要条件,(B),(D) 是必要但非充分条件,只有(C) 为正确选项. 事实上,设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$,因为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定,故$\frac{1}{\lambda_i}>0$,从而 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

(5) 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不一定可交换,显然(A),(B) 不成立,又 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不一定是正交矩阵,故 $\boldsymbol{AB}$ 也非正交矩阵,(D) 错误,只有(C) 是正确选项. 因为 $|\boldsymbol{A}|>0$,$|\boldsymbol{B}|>0$ 故 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq0$,从而 $\boldsymbol{AB}$ 可逆.

(6) 由结论:同阶实对称阵合同的充要条件是它们具有相同的正、负惯性指数. 而实对称矩阵的正、负惯性指数分别等于正、负特征值的个数.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-2$,所以选(B).

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　二次型所对应的矩阵及其性质

**提示** 将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 就是二次型所对应的矩阵. 由此可求出二次型的秩和正、负惯性指数（$\boldsymbol{A}$ 的正、负特征值的个数）.

**【例 6.4】** 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求参数 $c$ 及此二次型对应矩阵的特征值.

**【分析】** 二次型的秩为 2 是指二次型对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，由于 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，故行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，由此即可求出参数 $c$，再由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求特征值.

**【解】** 此二次型对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix},$$

因秩$(\boldsymbol{A})=2$，故 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{vmatrix}=0$，解得 $c=3$.

容易验证，此时 $\boldsymbol{A}$ 的秩的确是 2.

另外，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$，

知所求特征值为 $\lambda=0,\lambda=4,\lambda=9$.

**【例 6.5】** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，秩 $r(\boldsymbol{A})=n$；$A_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式（$i,j=1,2,\cdots,n$），二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j.$$

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范型是否相同？说明理由.

**【分析】** (1) 要求将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$，并验证 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为对称矩阵；

(2) 关键是证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是合同阵，因为合同矩阵对应的二次型的规范形是相同的.

**【解】** (1) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

因秩 $r(\boldsymbol{A})=n$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，从而

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^T=(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称矩阵，因此二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) **方法一**:因为

$$(A^{-1})^{T}AA^{-1}=(A^{T})^{-1}=A^{-1}.$$

所以 $A$ 与 $A^{-1}$ 合同,于是 $g(x)=x^{T}Ax$ 与 $f(x)$ 有相同的规范形.

**方法二**:对二次型 $g(x)=x^{T}Ax$,作可逆线性变换 $x=A^{-1}y$,其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{T}$.

$$\begin{aligned}g(x)&=x^{T}Ax=(A^{-1}y)^{T}A(A^{-1}y)=y^{T}(A^{-1})^{T}AA^{-1}y\\&=y^{T}(A^{T})^{-1}AA^{-1}y=y^{T}A^{-1}y.\end{aligned}$$

由此得知 $A$ 与 $A^{-1}$ 合同. 于是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 必有相同的规范形.

**方法三**:设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $A$ 的 $n$ 个特征值,对应特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,即

$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,i=1,2,\cdots,n.$

由秩 $r(A)=n$ 知 $\lambda\neq0$,且有 $A^{-1}\alpha_i=\lambda^{-1}\alpha_i$,即 $A^{-1}$ 的 $n$ 个特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$. 可见 $A$ 与 $A^{-1}$ 中大于零的特征值的个数和小于零的特征值的个数对应相同,即 $A$ 与 $A^{-1}$ 具有相同的正、负惯性指数. 从而 $f(x)=x^{T}A^{-1}x$ 与 $g(x)=x^{T}Ax$ 有相同的规范形.

## 题型二　化二次型为标准形

**提示** 化二次型为标准形的基本方法有二:配方法和正交变换法,其中重点是正交变换法. 首先须正确写出二次型矩阵,二次型矩阵的对角线元素 $a_{ii}$ 为 $x_i^2$ 的系数,$a_{ij}=a_{ji}$ 为 $x_ix_j$ 系数的一半. 把二次型化为标准形的一般步骤是:

(1) 求出二次型矩阵的特征根及对应的特征向量;

(2) 将重特征根的特征向量正交化,再将所得特征向量单位化,以此为列构成的矩阵即为正交矩阵 $Q$;

(3) 作变换 $x=Qy$,即可将二次型化为标准形.

**【例 6.6】**已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$,

(1) 写出二次型 $f$ 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 $f$ 化为标准型,并写出相应的正交矩阵.

**【解】**(1) $f$ 的矩阵表达式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

(2) 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{bmatrix},$$

$A$ 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0.$$

由此得 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$,对应的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\quad\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix},\quad\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

对应的单位特征向量为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

由此可得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

对二次型 $f$ 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,则此二次型可化为如下标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2.$$

**【例 6.7】** 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 $a$ 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形.

**【解】** (1) 二次型矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\1+a & 1-a & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

由二次型的秩为 2,知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\1+a & 1-a & 0\\0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$,得 $a=0$.

(2) 由(1) 知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,可求出其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

因为 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

所以 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的同解方程组为 $x_1-x_2=0$,

可解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 为一个特征向量,第二个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 既满足方程 $x_1-x_2=0$ 又与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交,可取 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a\\a\\1\end{pmatrix}$,则由 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0\Rightarrow a=0$,即得属于特征值 $\lambda=2$ 的正交特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$ 故取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已经正交,直接将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]$,它即为所求的正交变换矩阵. 由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,可化原二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2.$$

注 在求有重根的特征值对应的特征向量时,要求相互正交的特征向量,标准正交化的过程有时计算较繁,可以如本题所解一样,在解方程的过程中同时考虑正交性的要求,有意取正交的两个向量,这样可省去化为正交的步骤,简化计算.

**【例 6.8】** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$.

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3,试求 $y$;(2) 求矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角阵.

**【分析】** (1) 由定义 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 可求出 $y$;(2) $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$,而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,因此问题转化为求合同变换所对应的矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵,而这可以通过配方法或正交变换法求得.

**【解】** (1) 由 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&-1&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&3-y&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=0$,解得 $y=2$.

(2) $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$,而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{bmatrix}$ 为对称矩阵,考虑二次型

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4$$

配方得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+5\left(x_3+\frac{4}{5}x_4\right)^2+\frac{9}{5}x_4^2$,

令 $y_1=x_1,y_2=x_2,y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4,y_4=x_4$,得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}.$$

取 $P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$， 则有 $(AP)^T(AP)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{bmatrix}$.

注 若先求出 $A^TA$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=9$ 以及对应 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,0,-1,1)^T$，经正交标准化后，得向量组

$$\beta_1=(1,0,0,0)^T,\quad \beta_2=(0,1,0,0)^T,\quad \beta_3=\left(0,0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

对应于 $\lambda_4=9$ 的特征向量 $\alpha_4=(0,0,1,1)^T$，经单位化后，得 $\beta_4=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. 令

$$P=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

则

$$P^T(A^TA)P=(AP)^TAP=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{bmatrix}.$$

**【例 6.9】**设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，试求

(1) $a$ 的值；(2) 正交矩阵 $Q$，使 $Q^TAQ$ 为对角矩阵.

**【解】**(1) 对线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵作行的初等变换，有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+1)&a+2\end{array}\right],$$

因为方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，所以秩 $r(A)=r(\overline{A})<3$，故 $a=-2$.

(2) $A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$，对应特征方程为

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

得特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0$.

对应特征向量分别为：$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,-2,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T,\beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$

令 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$,则有 $Q^TAQ=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

## 题型三　已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数

**提示** 设 $A,B$ 为变换前后对应的二次型矩阵,若 $x=Qy$ 为正交变换,则 $A$ 和 $B$ 不仅是合同的,而且是相似的.根据相似矩阵的性质,$A$ 和 $B$ 有相同的特征多项式,由此可求出相关参数.

**【例 6.10】** 设二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$$

经正交变换 $x=Qy$ 化成

$$f=y_2^2+2y_3^2,$$

其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T,y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 是三维列向量,$Q$ 是正交矩阵,试求参数 $\alpha,\beta$ 的值.

**【解】** 变换前后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \beta\\ 1 & \beta & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

二次型可以写成

$$f=x^TAx \quad 和 \quad f=y^TBy.$$

由于 $Q^TAQ=B$,$Q$ 为正交矩阵,故

$$Q^{-1}AQ=B,$$

因此　　$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,

即

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & -\alpha & -1\\ -\alpha & \lambda-1 & -\beta\\ -1 & -\beta & \lambda-1\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix},$$

$$\lambda^3-2\lambda^2+(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda+(\alpha-\beta)^2\equiv\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda.$$

令 $\lambda=0$ 和 $\alpha=\beta$,令 $\lambda=1$ 知 $\alpha\beta=0$.解得 $\alpha=\beta=0$ 为所求参数.

**【例 6.11】** 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2\alpha x_2x_3$ 经正交变换 $X=QY$,化成 $f=2y_1^2+2y_2^2+\beta y_3^2$,其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T,Y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 是三维列向量,$P$ 是 3 阶正交矩阵,试

(1) 确定常数 $\alpha(<0)$,$\beta$ 的值;

(2) 求正交矩阵 $Q$;

(3) 若 $X^TX=3$,求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值.

**【解】** 变换前后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & \alpha\\ -1 & \alpha & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & \beta\end{pmatrix}$$

(1) 由 $A \sim B \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, $A$、$B$ 特征值相同,即

$$\begin{cases} 1+1+1 = 2+2+\beta \\ 2\cdot 2\cdot \beta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ (\alpha-1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -1 \text{ 或 } \alpha = 3\text{(舍去)} \end{cases}.$$

于是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 先求 $\lambda = 2$ 对应的特征向量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,由于

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

取 $x_2$ 为 0,可得

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

要想 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 正交,只需考虑 $x_1, x_3$ 即可,取 $x_1 = 1, x_3 = 1$,则有

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再求 $\lambda = -1$ 的特征向量,设其为 $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,由于实对称阵不同特征值对应的特征向量相互正交,所以

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3,$$

故取 $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 即可.

现正交化 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$，得

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\eta_2=\frac{\xi_2}{|\xi_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\eta_3=\frac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则有

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{bmatrix}.$$

(3) 由题设可知

$3=X^{\mathrm T}X=(QY)^{\mathrm T}(QY)=Y^{\mathrm T}Q^{\mathrm T}QY=Y^{\mathrm T}Y=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，

而 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2\leqslant 2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=6$，

取 $y_1=\sqrt{3},y_2=0,y_3=0$，可得 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2=6$，

故 $\max\limits_{X^{\mathrm T}X=3}f(x_1,x_2,x_3)=6$.

## 题型四　有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明

**提示** 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充要条件之一是：

①$\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零；②$\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零；③ 对 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$.

**【例 6.12】** 设有 $n$ 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

**【解】** 由题设条件知，对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$. 其中等号成立当且仅当

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0\\x_2+a_2x_3=0\\\vdots\\x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0\\x_n+a_nx_1=0\end{cases}.\qquad①$$

方程组 ① 仅有零解的充分必要条件是其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&1&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

所以，当 $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时，对于任意的不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，即当 $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

**【例 6.13】** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m$ 阶实对称矩阵且正定，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}^{\mathrm T}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵. 试证：$\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

【证】必要性. 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵,则对任意的实 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$,即 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$. 于是 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$,因此 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,从而 $r(\boldsymbol{B})=n$.

充分性. 因 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$,即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为实对称矩阵. 若秩 $r(\boldsymbol{B})=n$,则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,从而对任意实 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$.

又 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,所以对于 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$,有 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}>0$. 于是当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时,

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0,$$

故,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

【例 6.14】设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶正定矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 $n$ 阶单位矩阵,证明 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的行列式大于 1.

【证】**方法一**:因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 且 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$,且有 $\lambda_i+1>1(i=1,2,\cdots,n)$,从而有

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdot\cdots\cdot(\lambda_n+1)>1.$$

**方法二**:因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}.$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

于是 $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}+\boldsymbol{QEQ}^{-1}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\lambda_1+1&&&\\&\lambda_2+1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n+1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

从而有 $$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{Q}|\begin{vmatrix}\lambda_1+1&&&\\&\lambda_2+1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n+1\end{vmatrix}|\boldsymbol{Q}^{-1}|$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdot\cdots\cdot(\lambda_n+1)>1.$$

【例 6.15】证明:若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,则 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

【证】若 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵,$\boldsymbol{A}$ 是对称阵,易知 $\boldsymbol{A}^*$ 是对称阵.

**方法一**:用定义证明.

由 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,

已知 $\boldsymbol{A}$ 正定,故有 $|\boldsymbol{A}|>0$,且对任何 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,恒有 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay}>0$,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{x}\\&=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆,当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,从而有对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,

$$x^{\mathrm{T}}A^{*}x=|A|\,y^{\mathrm{T}}Ay>0,$$

根据定义知，$A^{*}$ 是正定矩阵.

**方法二：利用 $A$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的全部特征值大于零.**

设 $A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由 $A$ 正定知 $\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $|A|>0$，又 $A^{*}$ 的特征值为：$\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$，于是 $\frac{|A|}{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$，即 $A^{*}$ 的全部特征值大于零，故 $A^{*}$ 是正定矩阵.

**方法三：$A$ 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $C$，使得 $A=C^{\mathrm{T}}C$.**

由 $A$ 正定知，$|A|>0$，且存在可逆矩阵 $C$，使 $A=C^{\mathrm{T}}C$，于是

$$A^{*}=|A|A^{-1}=|A|C^{-1}(C^{-1})^{\mathrm{T}}=\sqrt{|A|}C^{-1}\cdot\left[\sqrt{|A|}C^{-1}\right]^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}P,$$

其中，$P=(\sqrt{|A|}C^{-1})^{\mathrm{T}}$ 为可逆矩阵，故 $A^{*}$ 是正定阵.

**【例 6.16】** 设 $A$ 为实对称矩阵，则当 $t$ 充分大时，$A+tE$ 为正定矩阵.

**【证】** 设 $A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（$\lambda_i$ 为实数），取 $t>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\lambda_i|\}$，则 $A+tE$ 的特征值 $\lambda_i+t$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 全部大于零，因此当 $t>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\lambda_i|\}$ 时，$A+tE$ 是正定矩阵.

**【例 6.17】** 设 $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，且 $A^3-3A^2+5A-3E=0$，证明：$A$ 正定.

**【分析】** 只要证明 $A$ 的全部特征值大于零.

**【证】** 设 $\lambda$ 是 $A$ 的任一特征值，对应特征向量为 $x\neq 0$，即 $Ax=\lambda x$，代入已知等式

$$A^3-3A^2+5A-3E=0,$$

有 $$(A^3-3A^2+5A-3E)x=(\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3)x=0,$$

因为 $x\neq 0$，故 $\lambda$ 满足 $$\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=0.$$

得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$，因 $A$ 为实对称矩阵，其特征值一定为实数，故只有 $\lambda=1$，即 $A$ 的全部特征值就是 $\lambda=1>0$，这就证明 $A$ 是正定矩阵.

## 第 3 节 思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势** 若要证明抽象的 $n$ 阶实对称矩阵 $A$ 为正定矩阵，先用定义处理一下再说.

**【例 6.18】** 设 $A$ 为 $m$ 阶实对称矩阵且正定，$B$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$B^{\mathrm{T}}$ 为 $B$ 的转置矩阵. 试证：$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $B$ 的秩 $r(B)=n$.

**【证】** 必要性.

设 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵，则对任意的实 $n$ 维列向量 $x\neq 0$，有 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$，

即 $(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$，必有 $Bx\neq 0$，即 $Bx=0$ 只有零解.

从而 $r(B)=n$.

充分性.

因 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B=B^{\mathrm{T}}AB$，故 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为实对称矩阵.

若 $r(B)=n$，则方程组 $Bx=0$ 只有零解.

从而对任意实 $n$ 维列向量 $x\neq 0$ 有 $Bx\neq 0$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以对于 $\boldsymbol{Bx} \neq \boldsymbol{0}$，

有 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}) > 0$.

于是当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} > 0$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

## 二、综合题解析

**【例 6.19】** 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，且满足关系式 $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} = 0$，已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

(2) 当 $k$ 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

**【解】** (1) 设 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \quad (\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}), \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \lambda^2\boldsymbol{\alpha}.$$

于是
$$(\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = (\lambda^2 + 2\lambda)\boldsymbol{\alpha}.$$

由条件 $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} = 0$ 推知 $(\lambda^2 + 2\lambda)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.

又由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，故有 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$，解得 $\lambda = -2, \lambda = 0$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，必可对角化，且 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，所以

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 0$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 仍为实对称矩阵. 由(1)知，$\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 的全部特征值为 $-2+k, -2+k, k$.

于是，当 $k > 2$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 的全部特征值大于零，此时矩阵 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

**【例 6.20】** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 的密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求二次曲面 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + Yx_3^2 + 2x_1x_2 + 2Xx_1x_2 = 1$ 为椭球面的概率.

**【解】** 二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + Yx_3^2 + 2x_1x_2 + 2Xx_1x_3$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & X \\ 1 & 2 & 0 \\ X & 0 & Y \end{bmatrix}$，

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \text{即二次型 } f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2.$$

所以要使二次曲面 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 0$ 为椭球面，必须 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均大于 0 或均小于 0.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式 $a_{11} = 1 > 0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 只能是正定阵.

所以 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & X \\ 1 & 2 & 0 \\ X & 0 & Y \end{vmatrix} = Y - 2X^2 > 0$，

故，二次曲面 $f = 0$ 为椭球面的概率为

$$P\{Y-2X^2>0\}=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{2x^2}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$

## 习 题 六

**1. 填空题.**

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$ 的矩阵是______.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&2&-1\\4&-1&3\end{bmatrix}$ 对应的二次型是______.

(3) 当 $t$ ______时,实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称可逆矩阵,则将 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ 的线性变换为______.

(5) 设 $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $1,2,\cdots,n$,则当 $t$ ______时,$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

**2. 选择题.**

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶方阵,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,当(　　)时,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

A. 秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$.　　B. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

C. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.　　D. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.　　【　　】

(2) 下列矩阵为正定的是

A. $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　B. $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　C. $\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.　D. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{bmatrix}$.【　　】

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶正定矩阵,则(　　)是正定矩阵.

A. $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$.　B. $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$.　C. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$.　D. $k_1\boldsymbol{A}^*+k_2\boldsymbol{B}^*$.

【　　】

**3. 计算证明题.**

(1) 用合同变换将下列二次型化为标准形:

① $f(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$;

② $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$.

(2) 用正交变换将下列实二次型化为标准形:

① $f(x_1,x_2,x_3)=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$;

② $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$.

(3) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2ax_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$,通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+ay_2^2+by_3^2$,求 $a,b$ 的值及所用的正交变换矩阵.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵,且满足

$$\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E},$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(5) 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 $a$,实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 $b$,证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 $a+b$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n$ 阶实对称矩阵,证明:秩$(\boldsymbol{A})=n$ 的充分必要条件为存在一个 $n$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

(8) $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵，求证：对充分小的正数 $\varepsilon$，$\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

(9) 二次型 $f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-3ax_1x_3$ 的正负惯性指数都是 1，求参数 $a$ 及曲面 $f=1$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切平面方程.

(10) 对一般的 $n$ 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，证明：$f$ 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值恰为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

## 参 考 答 案

**1.** (1) $\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&2&1&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.　(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3$.

(3) $-\dfrac{5}{4}<t<0$.　(4) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$.　(5) $t>n$.

**2.** (1) D　(2) D　(3) A

**3.** (1) ① $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，② $f=y_1^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-\cdots-y_{2n}^2$.

(2) ① $f=9y_1^2+18y_2^2-9y_3^2$，② $f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

(3) 无解，$\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$.

(4) ～ (8) 略.

(9) $a=-2$，　$2x_1-x_2+x_3=1$.

(10) 略.

# 第三篇 概率论与数理统计

## 第一章 随机事件和概率

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、随机试验和随机事件

**1. 随机试验**

概率论中将满足下面三个条件的试验称为随机试验，简称试验：

1° 可在相同的条件下重复进行；

2° 每次试验的结果不止一个；

3° 试验之前不能确定哪一个结果会发生，但所有的结果是明确可知的.

**2. 样本空间**

随机试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间，常记为 $\Omega$，$\Omega$ 中的元素称为样本点.

**3. 随机事件**

样本空间的子集，即试验的结果称为随机事件，简称事件，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 另外，两个特殊的事件分别为：必然事件 $\Omega$—— 每次试验中一定发生的事件；不可能事件 $\varnothing$—— 每次试验中一定不发生的事件.

**【例 1.1】** 写出下列随机试验的样本空间及相应的事件：

(1) 同时掷三颗骰子，记录其出现的点数之和，$A=\{$点数之和为偶数$\}$；

(2) 相继掷硬币两次，$A=\{$第一次出现正面$\}$，$B=\{$两次出现同一面$\}$；

(3) 在"1,2,3,4"这 4 个数字中可重复地任取 2 个数字，$A=\{$一个数是另一个数的 2 倍$\}$；

(4) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度，$A=\{$以三段为边可构成三角形$\}$.

**【解】** (1) 样本空间 $\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$，事件 $A=\{4,6,\cdots,16,18\}$.

(2) 样本空间 $\Omega=\{$(正面,反面),(反面,正面),(正面,正面),(反面,反面)$\}$，

事件 $A=\{$(正面,正面),(正面,反面)$\}$，事件 $B=\{$(正面,正面),(反面,反面)$\}$.

(3) 样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$，$A=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$.

(4) 设 $x,y,z$ 分别为折成的第一段、第二段、第三段的长度，则样本空间

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1,\}$$

事件

$$A=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega,x+y>z,x+z>y,y+z>x\}.$$

## 二、事件的关系及其运算

### 1. 事件的包含

若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ 包含 $A$（或 $A$ 包含于 $B$），记为 $B \supset A$.

### 2. 事件相等

若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，则称事件 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A = B$.

### 3. 事件 $A$ 与 $B$ 之和（并）

$A \cup B$（或 $A + B$）表示事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生.

推广：$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少一个发生.

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 至少一个发生.

性质：(1) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$.

(2) $A \cap (A \cup B) = A$，　$B \cap (A \cup B) = B$.

(3) $A \cup A = A$.

### 4. 事件 $A$ 与 $B$ 的差

$A - B$ 表示事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生.

性质：(1) $A - B \subset A$.

(2) $(A - B) \cup A = A$，　$(A - B) \cup B = A \cup B$.

(3) $(A - B) \cap A = A - B, (A - B) \cap B = \varnothing$.

### 5. 事件 $A$ 与 $B$ 的积

$A \cap B$（或 $AB$）表示事件 $A$ 与 $B$ 同时发生.

推广：$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 表示 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示无穷个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 同时发生.

性质：(1) $A \cap B \subset A$，　$A \cap B \subset B$.

(2) $(A \cap B) \cup A = A, (A \cap B) \cup B = B$.

(3) $A \cap A = A$.

### 6. 互斥事件

在试验中，若事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 $A, B$ 为互斥事件.

推广：在试验中，若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意两个都是互斥的，则该事件组称为互斥事件组.

注 在一次试验中，基本事件都是两两互斥的.

### 7. 对立事件

每次试验中，“事件 $A$ 不发生”的事件称为事件 $A$ 的对立事件或逆事件. $A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$.

性质：(1) $A + \overline{A} = \Omega$　（必然事件），

(2) $A\overline{A} = \varnothing$　（不可能事件）.

由定义可知：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

### 8. 事件的运算律

与集合的运算律相似.

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 摩根律　$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2, \overline{A_1\cap A_2}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2$.

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k, \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k.$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k, \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k.$$

(5) 对减法运算满足　$A-B=A\overline{B}$(或 $A\cap\overline{B}$)

注 (1) 事件的运算律非常重要，务必娴熟，这是因为在今后的概率计算中，经常将一些事件用另一些事件的运算来表示.

(2) 经常用文氏图帮助分析和理解事件的运算，尤其是两个事件的运算更是如此.

**【例 1.2】** 设 $A,B,C$ 表示三个随机事件，试将下列事件用 $A,B,C$ 表示出来.

(1) $A$ 出现，$B,C$ 都不出现；　(2) $A,B$ 都出现，$C$ 不出现；

(3) 三个事件都出现；　(4) 三个事件中至少有一个出现；

(5) 三个事件都不出现；　(6) 不多于一个事件出现；

(7) 不多于两个事件出现；　(8) 三个事件至少有两个出现；

(9) $A,B$ 至少有一个出现，$C$ 不出现；　(10) $A,B,C$ 中恰好有两个出现.

**【解】** (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$.　(2) $AB\overline{C}$.　(3) $ABC$.　(4) $A+B+C$.　(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB+BC+AC}$.

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$.

(8) $ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 或 $AB+BC+AC$.

(9) $(A+B)\overline{C}$.

(10) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

**【例 1.3】** 设一个工人生产了四个零件，$A_i$ 表示他生产的第 $i$ 个零件是正品($i=1,2,3,4$)，试用 $A_i$ 表示下列各事件：

(1) 没有一个是次品；　(2) 至少有一个是次品；

(3) 只有一个是次品；　(4) 至少有三个不是次品；

(5) 恰好有三个是次品；　(6) 至多有一个是次品.

**【解】** (1) $A_1A_2A_3A_4$.

(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ 或 $\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$.

(3) $\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$.

(4) $A_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1A_2A_3A_4$.

(5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$.

(6) $A_1A_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$.

**【例 1.4】** 下列各式说明什么包含关系？

(1) $AB=A$；　(2) $A+B=A$；　(3) $A+B+C=A$.

【解】(1) $AB = A \Leftrightarrow AB \subset A$ 且 $A \subset AB$，

由 $A \subset AB \Rightarrow A \subset A$ 且 $A \subset B \Rightarrow A \subset B$.

(2) $A + B = A \Leftrightarrow A + B \subset A$ 且 $A \subset A + B$，

由 $A + B \subset A \Rightarrow B \subset A$.

(3) $A + B + C = A \Leftrightarrow A + B + C \subset A$ 且 $A \subset A + B + C$，

由 $A + B + C \subset A \Rightarrow B + C \subset A$.

## 三、事件的概率及其性质

### 1. 概率的定义

设随机试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$，则称满足下列条件的事件集上的函数 $P(\cdot)$ 为概率：

(1) 对于任意事件 $A$，$P(A) \geqslant 0$；

(2) 对于必然事件 $\Omega$，$P(\Omega) = 1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为两两互不相容的事件，即 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots)$，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

### 2. 概率的性质

(1)$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

(2)$P(A - B) = P(A) - P(AB)$，特别地，当 $B \subset A$ 时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$，且 $P(B) \leqslant P(A)$；

(3)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$；

(4) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

一般地，对任意 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdot \cdots \cdot A_n).$$

【例 1.5】已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$，$P(AB) = 0$，$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$，则 $A, B, C$ 全不发生的概率为________.

【解】$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC)$

$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{6} - P(ABC) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{7}{12}$（因为 $ABC \subset AB$）.

【例 1.6】$P(A) = 0.7$，$P(A - B) = 0.3$，则 $P(\overline{AB}) =$ ________.

【解】因为 $$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.3,$$

故 $$P(AB) = 0.4.$$

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

## 四、条件概率与事件的独立性

### 1. 条件概率

设 $A,B$ 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的条件概率.

### 2. 事件的独立性

设 $A,B$ 是两个事件,若有等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 $A$ 与 $B$ 相互独立.

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个事件,如果对于任意 $k(k_k\leqslant n)$ 和任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\cdots\cdot A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdot\cdots\cdot P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件;如果其中任意两个是相互独立的,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两独立的事件.

注 (1) 从直观上说,$A$ 与 $B$ 相互独立即其中任意一事件的发生不影响另一事件发生的概率,亦即有

$$P(B \mid A)=P(B)\quad (\text{或 } P(A \mid B)=P(A)).$$

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立 $\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(3) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立 $\nRightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(4) $A$ 与 $B$ 相互独立和 $A$ 与 $B$ 互斥没有蕴涵关系;若 $A$ 与 $B$ 既相互独立,又互斥,则 $A$ 与 $B$ 至少有一个为零概率事件.

(5) 一般并没有不等式 $P(B \mid A)>P(B)$,但若此不等式成立,则也有 $P(A \mid B)>P(A)$.

(6) 四对事件 $A,B;A,\overline{B};\overline{A},B;\overline{A},\overline{B}$ 中有一对相互独立,则另外三对也相互独立.

(7) 条件概率 $P(\cdot \mid A)$ 也是一种概率,从而满足概率的所有基本性质.

(8) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则由其中任意部分事件所产生的事件与另一部分事件所产生的事件相互独立.

**【例 1.7】** 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%,30%,10%,从中随意取出一种,结果不是三等品,则取到的是一等品的概率为________.

**【解】** $A_i=\{$取到的一个产品为 $i$ 等品$\}\quad i=1,2,3$. 显然,$A_1,A_2,A_3$ 为互斥事件组,由题意有

$$P(\overline{A}_3)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{90}{100},$$

$$P(A_1 \mid \overline{A}_3)=\frac{P(A_1\overline{A}_3)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{P[A_1(A_1\cup A_2)]}{P(\overline{A}_3)}=\frac{P(A_1)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{60\%}{90\%}=\frac{2}{3}.$$

**【例 1.8】** 设 $0<P(A)<1,\quad 0<P(B)<1,\quad P(A \mid B)+P(\overline{A} \mid \overline{B})=1$,则

(A) 事件 $A$ 与 $B$ 互不相容.　　(B) 事件 $A$ 与 $B$ 互相对立.

(C) 事件 $A$ 和 $B$ 互不独立.　　(D) 事件 $A$ 和 $B$ 相互独立.　　【　】

**【解】** 因为 $P(A \mid B)+P(\overline{A} \mid \overline{B})=P(A \mid B)+1-P(A \mid \overline{B})=1$,

所以 $P(A \mid B)-P(A \mid \overline{B})=0$,

即
$$P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$\Rightarrow \quad P(AB)[1-P(B)] = P(B)P(A\overline{B})$

$\Rightarrow \quad P(AB) = P(B)[P(AB)+P(A\overline{B})] = P(B)P[A(B+\overline{B})] = P(B)P(A).$

故应选(D).

【例 1.9】设 $A,B,C$ 三个事件两两独立,则 $A,B,C$ 相互独立的充分必要条件是

(A)$A$ 与 $BC$ 独立. (B)$AB$ 与 $A\cup C$ 独立.

(C)$AB$ 与 $AC$ 独立. (D)$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立. 【　】

【解】$A,B,C$ 相互独立的充要条件:

$P(AB)=P(A)P(B)$, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

由 $P[A(BC)]=P(A)P(BC)=P(A)P(B)\cdot P(C)$, 可知(A)入选.

注 由前面关于事件独立性的注(8)即可知(A)为正确答案.

## 五、重要概型

### 1. 古典概型

如果随机试验 $E$ 满足下面条件:

(1) 试验的样本空间 $\Omega$ 的元素只有有限个;

(2) 样本空间中每个元素,即基本事件发生的可能性相同,则称此试验为古典概型. 对于古典概型,事件 $A$ 的概率有下列计算公式:

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}.$$

### 2. 几何概型

如果随机试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 为欧氏空间中的一个区域,且每个样本点的出现具有等可能性,则称此试验为几何概型. 对于几何概型,事件 $A$ 的概率有下列计算公式:

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量(长度,面积,体积)}}{\Omega\text{ 的度量(长度,面积,体积)}}.$$

### 3. 伯努利(Bernoulli)概型

如果试验 $E$ 的结果只有两个:$A$ 与 $\overline{A}$,则称此试验为伯努利概型(试验). 若将伯努利试验独立重复 $n$ 次,则称为 $n$ 重伯努利概型,简称伯努利概型. 在伯努利概型中,若 $P(A)=p$,则 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生 $k$ 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n.$$

## 六、重要公式

### 1. 乘法公式

设 $P(A_1)>0, P(A_2)>0$,则

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)=P(A_2)P(A_1 \mid A_2).$$

一般地,设 $P(A_1A_2\cdot\cdots\cdot A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n\mid A_1\cdot\cdots\cdot A_{n-1}).$$

**2. 全概率公式**

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一完备事件组,即 $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega,P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对事件 $A$ 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i).$$

**3. 贝叶斯(Bayes)公式**

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一完备事件组,$P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n,P(A)>0$,则有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)},j=1,2,\cdots,n.$$

注 (1) 乘法公式主要用来计算没有相互独立性的若干个事件之积的概率.

(2) 全概率公式和贝叶斯公式中完备事件组可以是有限个,也可以是可列个.另外,对于具体问题,正确找出完备事件组是求解的关键.

**【例 1.10】** 设 10 件产品中有 2 件次品,8 件正品.现每次从中任取一件产品,且取后不放回,试求下列事件的概率:

(1) 前两次均取到正品;

(2) 第二次取到次品;

(3) 若已知第二次取到次品,则第一次也取到次品.

**【解】** 设 $A_i=\{$第 $i$ 次取到次品$\}$,$i=1,2$.

(1) 前两次均取到正品的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}.$$

(2) $A_1,\overline{A}_1$ 构成一个完备事件组,于是由全概率公式有

$$P(A_2)=P(A_2\mid A_1)P(A_1)+P(A_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}+\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}=\frac{1}{5}.$$

(3) 由贝叶斯公式有

$$P(A_1\mid A_2)=\frac{P(A_2\mid A_1)P(A_1)}{P(A_2)}=\frac{\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{9}.$$

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　古典概型与几何概型

提示 首先要正确判断概型,其次弄清样本空间与有利事件的结构,再按相应的概率计算公式

进行计算.古典概型中概率的计算常需要用到排列组合中的几个基本结论.

(1) 加法原理.

设完成一件事有 $n$ 类方法(只要选择其中一类方法即可完成这件事),若第一类方法有 $m_1$ 种,第二类方法有 $m_2$ 种,…,第 $n$ 类方法有 $m_n$ 种,则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法.

(2) 乘法原理.

设完成一件事须有 $n$ 个步骤(仅当 $n$ 个步骤都完成,才能完成这件事),若第一步有 $m_1$ 种方法,第二步有 $m_2$ 种方法,…,第 $n$ 步有 $m_n$ 种方法,则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种方法.

注 加法原理与乘法原理的区别:前者完成一步即完成一件事;后者须 $n$ 步均完成才完成一件事.

(3) 排列.

从 $n$ 个不同元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个按照一定的顺序排成一列,称为从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个排列.从 $n$ 个不同元素取出 $m$ 个元素的所有排列种数,记为

$$\mathrm{P}_n^m = n(n-1) \cdot \cdots \cdot [n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

从 $n$ 个不同元素中全部取出的排列称为全排列,其排列的种数,记为

$$\mathrm{P}_n^n = n(n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!.$$

规定 $0! = 1$.

(4) 允许重复的排列.

从 $n$ 个不同元素中有放回地取 $m$ 个按照一定顺序排列成一列.其排列的种数为

$$N = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m个} = n^m.$$

(5) 不全相异元素的全排列.

若 $n$ 个元素中,有 $m$ 类$(1 < m \leqslant n)$本质不同的元素,而每类元素中分别有 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 个元素$(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, 1 < k_i < n, i = 1, 2, \cdots, m)$,则 $n$ 个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列.其排列的种数为

$$N = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot \cdots \cdot k_m!}.$$

(6) 组合.

从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素,不管其顺序并成一组,称为从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的一个组合,其组合总数,记为 $\mathrm{C}_n^m$,且有

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^m}{m!} = \frac{n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

组合的性质:(1)$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}$,　(2)$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-1}^m + \mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$.

注 排列与组合的区别:前者与次序有关,后者与次序无关.

**【例 1.11】** 袋中有 9 个球(4 白,5 黑),现从中任取两个,求:

(1) 两个均为白球的概率;

(2) 两个球中一个是白的,另一个是黑的概率;

(3) 至少有一个黑球的概率.

【解】(1) **方法一:**随机试验为从 9 个球中任取两个,假设其与先后次序有关,则基本事件总数为 $P_9^2$,且每事件为等可能性,有利于取两个白球的事件 $A_1$ 的基本事件个数 $P_4^2$,故

$$P(A_1)=\frac{P_4^2}{P_9^2}=\frac{1}{6}.$$

**方法二:**随机试验为从 9 个球中任取两个,设其与先后次序无关,则基本事件总数为 $C_9^2$,且每事件为等可能性,有利于取两个白球的事件 $A_1$ 的基本事件数 $C_4^2$,故

$$P(A_1)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}.$$

(2) **方法一:**取球与先后次序有关,则基本事件总数为 $P_9^2$,两球中一白一黑 = {先白后黑,先黑后白},其有利于取一白一黑事件 $A_2$ 的基本事件个数 $P_4^1P_5^1+P_5^1P_4^1=2P_4^1P_5^1$,故

$$P(A_2)=\frac{2P_4^1P_5^1}{P_9^2}=\frac{5}{9}.$$

**方法二:**取球与先后次序无关,则基本事件总数为 $C_9^2$,有利于取一白一黑事件 $A_2$ 的基本事件个数 $C_4^1\cdot C_5^1$ 故

$$P(A_2)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}.$$

(3) 至少有一个黑球的事件 $A_3$ 的对立事件 $\overline{A_3}$ 是:任取的两个球均是白球,即 $\overline{A_3}=A_1$,由概率的性质有

$$P(A_3)=1-P(\overline{A_3})=1-P(A_1)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

【例 1.12】在电话号码簿中任取一个电话号码,求后面四个数全不相同的概率(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0,1,2,…,9).

【解】本题与电话号码的位数无关.电话号码的数字是允许重复的,因此由 0,1,2,…,9 所构成的后四个数字的个数为 $10^4$,后"四个数字全不相同"的个数为 $P_{10}^4$,故

$$P(A)=\frac{P_{10}^4}{10^4}=0.504.$$

【例 1.13】把 10 本书随意地放在书架上,求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

【解】基本事件总数10!,有利于将指定的5本书放在一起的基本事件个数为6!·5!(其中6!是指 5 本书当做一个元素进行全排列的总数,5!是 5 本书相互之间进行全排列的总数),故

$$P(A)=\frac{6!\cdot 5!}{10!}=\frac{1}{42}.$$

【例 1.14】从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,求此 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率.

【分析】本例的基本事件总数容易计算,即为 $C_{10}^4$,但有利事件数相对较难,下面给出几种不同解法.

【解法一】首先从 5 双鞋中取出一双,并将此两只鞋全部取出,然后从剩下的 4 双中取出两双,再在每双中各取 1 只,于是取法共有 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$ 种.

显然,这样取得的 4 只鞋仅有一双成对,而 4 只鞋配成两双的取法有 $C_5^2$ 种,故取得的 4 只鞋至少有一双的取法有 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2$ 种.

故所求概率 $$P=(C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2)/C_{10}^4=\frac{13}{21}.$$

【解法二】设 $A$ 表示"至少有两只鞋子成一双"，于是 $\overline{A}$ 表示"没有成双的鞋子"，故有利于 $\overline{A}$ 的基本事件数为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$，即从 5 双中取出 4 双再从每双中各取 1 只的取法总数，所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1/C_{10}^4=\frac{13}{21}.$$

注 (1) 从上面的例题可以发现，概率的求逆公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 常可使问题大为简化，这是概率计算中的一个重要技巧，必须熟练掌握，而且通常用在"至少"或"至多"的问题中.

(2) 古典概型中概率的计算是一个难点，但并不是考试的重点，故只需掌握较简单的古典概型的计算即可.

(3)【例 1.14】有下面易犯的错误的解法，试指出错误所在：

首先从 5 双鞋中任取 1 双，其 2 只全部取出，然后在剩下的 8 只鞋中任取 2 只，于是总的取法为 $C_5^1C_2^2C_8^2$，并且这样取出的 4 只鞋可保证至少有两只成一双，故所求概率为 $P(A)=C_5^1C_2^2C_8^2/C_{10}^4$.

【例 1.15】在长度为 $a$ 的线段内任取两点将其分成三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

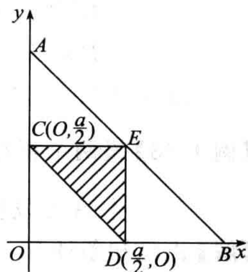


图 1-1

【解】设线段被分成的三段长分别为 $x,y$ 和 $a-x-y$，则样本空间为由 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 及 $x+y\leqslant a$ 所构成的图形，其面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}a^2$，有利于事件 $A$（即 $x,y,a-x-y$ 三段构成三角形）的基本事件集：由线段 $x,y,a-x-y$ 所围成的三角形，其面积记为 $S_{\triangle DCE}$（如图 1-1 所示）.

由三角形两边之和大于第三边的性质，有

$0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2},0\leqslant y\leqslant \frac{a}{2},0\leqslant a-x-y\leqslant \frac{a}{2}.$

$\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2},0\leqslant y\leqslant \frac{a}{2},\frac{a}{2}\leqslant x+y\leqslant a$（它们构成三角形 $DCE$），则其面积 $S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$，于是由几何概型的概率计算公式有

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}.$$

【例 1.16】从 $(0,1)$ 中随机地取两个数 $x$ 和 $y$，则满足条件的 $xy<\frac{1}{4}$ 的概率是________.

【解】显然本题为几何概型，如图 1-2 所示.

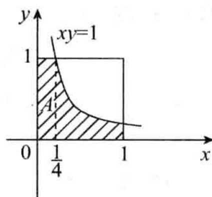


图 1-2

则 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，$A=\left\{(x,y)\mid xy<\frac{1}{4},(x,y)\in\Omega\right\}$

于是 $S_\Omega=1$，$S_A=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$，

故所求概率为 $p=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

## 题型二　事件的关系和概率性质的命题

提示 这类问题多以填空题、选择题的形式出现，只要充分利用事件的关系、运算律和概率的基本性质不难求解.

【例 1.17】设 $A,B$ 是任意两个随机事件，则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$ ________.

【解】因为 $(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=(\overline{A}A+AB+\overline{A}B+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})$

$$=(AB+\overline{A}B+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=B(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})$$

$$=B\overline{A}(A+\overline{B})=B\overline{A}A+B\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing.$$

故应填 0.

【例 1.18】设两个相互独立的事件 $A$ 和 $B$ 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，$A$ 发生 $B$ 不发生的概率与 $B$ 发生 $A$ 不发生的概率相等，则 $P(A)=$ ________.

【解】由已知条件有

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9},P(A\overline{B})=P(B\overline{A}).$$

另外由 $A,B$ 的独立性得 $\overline{A},\overline{B}$ 也独立，从而

$$P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9},$$

即
$$[1-P(A)][1-P(B)]=\frac{1}{9},$$

又
$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),P(B\overline{A})=P(B)-P(AB),$$

故 $P(A)=P(B)$，所以 $[1-P(A)]^2=\frac{1}{9}$，即 $P(A)=\frac{2}{3},\frac{4}{3}$(舍去). 应填 $\frac{2}{3}$.

【例 1.19】假设事件 $A$ 和 $B$ 满足 $P(B\mid A)=1$，则

(A) $A$ 是必然事件.　(B) $A\supset B$.　(C) $A\subset B$.　(D) $P(A\overline{B})=0$.

【　】

【解】由 $P(B\mid A)=1\Rightarrow P(A)-P(AB)=0\Rightarrow P(A\overline{B})=0$. 故应选(D).

【例 1.20】当事件 $A$ 与 $B$ 同时发生时，事件 $C$ 必发生，则下列结论正确的是

(A) $P(C)=P(AB)$.　(B) $P(C)=P(A\cup B)$.

(C) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.　(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.　【　】

【解】由于 $AB\subset C$，故

$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$. 即选(C).

【例 1.21】设 $P(A)=a,P(B)=b,P(A+B)=c$，则 $P(A\overline{B})$ 为

(A) $a-b$.　(B) $c-b$.　(C) $a(1-b)$.　(D) $a(1-c)$.

【解】利用恒等式　$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，

于是 $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$， $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，

由上面两式有 $P(A\overline{B}) = P(A+B) - P(B) = c - b$. 故(B)入选.

**【例 1.22】**设 $A,B$ 为两个互斥事件，且 $P(A) > 0, P(B) > 0$，则结论正确的是

(A)$P(B \mid A) > 0$.　　(B)$P(A \mid B) = P(A)$.

(C)$P(A \mid B) = 0$.　　(D)$P(AB) = P(A)P(B)$.　　【　】

**【解】**因为 $A,B$ 互斥即 $AB = \varnothing$，所以 $P(AB) = 0$.

又 $P(A) > 0, P(B) > 0$，由公式 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$，可得 $P(A \mid B) = 0$. 故(C)入选.

**【例 1.23】**设 $A$ 和 $B$ 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是

(A)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容.　　(B)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

(C)$P(AB) = P(A)P(B)$.　　(D)$P(A-B) = P(A)$.　　【　】

**【解】**由 $P(AB) = 0$ 以及 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ 知应选(D). 另外要特别注意(B)不一定正确，因为当 $A,B$ 互为对立事件时，$A,B$ 互不相容，但 $\overline{A},\overline{B}$ 也互不相容.

**【例 1.24】**对于任意二事件 $A$ 和 $B$，与 $A \cup B = B$ 不等价的是

(A)$A \subset B$.　　(B)$\overline{B} \subset \overline{A}$.　　(C)$A\overline{B} = \varnothing$.　　(D)$\overline{A}B = \varnothing$.

【　】

**【解】**由 $A \cup B = B$，立即可知 $A \subset B$，从而正确答案为(D).

**【例 1.25】**设 $P(A) > 0$，试证：$P(B \mid A) \geqslant 1 - \dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

**【分析】**通常用逆推法，若不等式成立，则 $P(A)P(B \mid A) \geqslant P(A) - P(\overline{B})$，即

$$P(AB) \geqslant P(A) - 1 + P(B).$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(AB) \leqslant 1.$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) \leqslant 1.$$

**【证】**因为 $P(A \cup B) \leqslant 1$，即 $P(A) + P(B) - P(AB) \leqslant 1$.

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A)P(B \mid A) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow P(A)P(B \mid A) \geqslant P(A) - [1 - P(B)]$$

$$\Rightarrow P(A)P(B \mid A) \geqslant P(A) - P(\overline{B})$$

因为 $P(A) > 0$，所以 $P(B \mid A) \geqslant 1 - \dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

**【例 1.26】**设 $A,B$ 独立，$AB \subset D$，$\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{D}$，证明

$$P(AD) \geqslant P(A)P(D).$$

**【证明】**因 $\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{D} \Rightarrow D \subset A \cup B$，于是有如图 1-3 所示的关系.

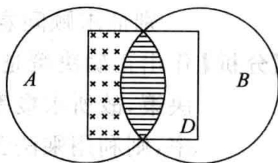



图 1-3

由于 $\qquad AD = AB + D\overline{B}$，

故 $\qquad P(AD) = P(AB) + P(D\overline{B})$.

而 $\qquad P(AB) = P(A)P(B) \geqslant P(A)P(DB)$

$$P(D\overline{B}) \geqslant P(A)P(D\overline{B}).$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad P(AD) &= P(AB) + P(D\overline{B}) = P(A)P(B) + P(D\overline{B}) \\ &\geqslant P(A)P(DB) + P(A)P(D\overline{B}) = P(A)[P(DB) + P(D\overline{B})] \\ &= P(A)P(D).\end{aligned}$$

即 $\qquad P(AD) \geqslant P(A)P(D)$.

## 题型三　条件概率与积事件概率的计算

**提示** 正确理解两种概率是求解的关键，对于具体问题，我们可以从下面几点进行判断：

1° 从样本空间上讲，积事件概率 $P(AB)$ 是在原样本空间 $\Omega$ 中考虑，而条件概率 $P(B \mid A)$ 是在一个缩小的样本空间 $\Omega_A = A$ 中考虑；

2° 积事件概率 $P(AB)$ 指 $A,B$ 同时发生的概率，而 $P(B \mid A)$ 指已知 $A$ 发生的条件下 $B$ 发生的条件概率，故此时 $A,B$ 在时间上一定有“先后”关系或逻辑上有“主从”关系.

**【例 1.27】** 某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4，问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少？

**【解】** 设 $A = \{$活到 20 岁以上$\}$，$B = \{$活到 25 岁以上$\}$，显然 $A,B$ 之间有“先后”关系，即 $A$ 先发生，$B$ 后发生，故该问题属于条件概率 $P(B \mid A)$.

因为 $P(A) = 0.8, P(B) = 0.4$，且 $B \subset A, AB = B, P(AB) = P(B) = 0.4$.

所以 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.4}{0.8} = \dfrac{1}{2}$.

**【例 1.28】** 甲、乙两班共有 70 名同学，其中女同学 40 名，设甲班有 30 名同学，而女生 15 名，问在碰到甲班同学时，正好碰到一名女同学的概率.

**【解】** 设 $A = \{$碰到甲班同学$\}$，$B = \{$碰到女同学$\}$.

这是一个有前提条件 ——$\{$碰到甲班同学$\}$ 的问题，因此是条件概率 $P(B \mid A)$.

因为 $P(AB) = \dfrac{15}{70}, P(A) = \dfrac{30}{70}$，所以 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}$.

**【例 1.29】** 某厂的产品中有 4% 的废品，在 100 件合格品中有 75 件一等品，试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率.

**【解】** 设 $A = \{$任取的一件是合格品$\}$，$B = \{$任取的一件是一等品$\}$.

因为所求的是在某厂的产品中任取一件，即样本空间是某厂的产品，因此这是属于 $P(AB)$ 的问题.

因为
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 96\%, P(B \mid A) = 75\%,$$

所以
$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = \frac{96}{100} \cdot \frac{75}{100} = 0.72.$$

**【例 1.30】** 设某公司有 7 个顾问，每个顾问提供正确意见的百分比为 0.6，现为某事可行与否个别征求顾问意见，并按多数人的意见作出决策，试求作出正确决策的概率.

**【分析】** 作出正确决策是指某事实际上可行且作出可行决策或某事实际上不可行且作出不可行决策，故所求概率为两个乘积事件的和的概率，而在求积事件概率时通常转化为条件概率，则利用乘法公式.

**【解】** 设 $A$ 表示“某事实际上可行”，$B$ 表示“多数顾问说可行”，则所求概率为
$$P(AB + \overline{A}\,\overline{B}) = P(AB) + P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(\overline{B} \mid \overline{A}).$$

而
$$P(B \mid A) = P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \sum_{i=4}^{7} C_7^i (0,6)^i (0.4)^{7-i} \approx 0.710\,2,$$

故
$$P(AB + \overline{A}\,\overline{B}) = [P(A) + P(\overline{A})]P(B \mid A) \approx 0.710\,2.$$

## 题型四　全概率公式与贝叶斯公式的命题

**提示**“由因导果”利用全概率公式，“由果索因”利用逆概率公式，即贝叶斯公式. 如何判别一个概率型是否是全概率呢？一般有三种方法：

**方法一**：全概率很容易与概率的和公式（即概率的加法公式）相混淆，若用概率的和公式去做，题设中的某些条件就用不上，此时应马上想到用全概率来计算.

**方法二**：如果能找出完备事件组，即可肯定适用全概率和逆概率公式来做；

**方法三**：如果所求的概率可分成两步来完成. 第一步有多种情况发生，情况比较复杂，第二步只有一种明确的情况，要求的是第二步的结果发生的概率，则用全概率公式.

**【例 1.31】** 三个箱子中，第一箱装有 4 个黑球 1 个白球，第二箱装有 3 个黑球 3 个白球，第三箱装有 3 个黑球 5 个白球，现先任取一箱，再从该箱中任取一球，试求：(1) 取出的球是白球的概率. (2) 若取出的为白球，则该球属于第二箱的概率.

**【分析】** 本题的试验过程是分两个阶段进行的，即先取箱子，然后取球，并且第一阶段的结果，即取哪一个箱子不知道. (1) 中是求第二阶段结果发生的概率，于是可用全概率公式计算；(2) 中是第二阶段结果已知，追究此结果由第一阶段哪一个结果所引起的概率，故用贝叶斯公式计算.

**【解】** 设 $A_i$ 表示“取出第 $i$ 个箱子”，$i=1,2,3$，$B$ 表示“取出白球”.

于是
$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},$$
$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{5},P(B\mid A_2)=\frac{3}{6},P(B\mid A_3)=\frac{5}{8},$$

(1) 由全概率公式得
$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)=\frac{53}{120}.$$

(2) 由贝叶斯公式得
$$P(A_2\mid B)=\frac{P(B\mid A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{20}{53}.$$

**【例 1.32】** 设一人群中有 37.5% 的人血型为 A 型，20.9% 为 B，33.7% 为 O 型，7.9% 为 AB 型，已知能允许输血的血型配对见表 1-1，现在人群中任选一人为输血者，再选一个为受血者，问输血能成功的概率是多少？

**表 1-1**

| 受血者 \ 输血者 | A | B | AB | O |
|---|---|---|---|---|
| A | √ | × | × | √ |
| B | × | √ | × | √ |
| AB | √ | √ | √ | √ |
| O | × | × | × | √ |

注：√ 表示允许输血；× 表示不允许输血.

**【分析】** 本题的试验过程可看做分两个阶段进行，第一阶段是选择输血者，结果不确定；第二阶段是选择受血者，其试验结果为“成功”与“不成功”，现求“成功”的概率，故用全概率公式.

【解】设 $B_i(i=1,2,3,4)$ 表示"从人群中任选一人,其血型分别为 A,B,AB,O 型",$A^*$"表示受血者输血成功",于是

$$P(A^* \mid B_1)=P(B_1)+P(B_3)=45.4\%,$$
$$P(A^* \mid B_2)=P(B_2)+P(B_3)=28.8\%,$$
$$P(A^* \mid B_3)=P(B_3)=7.9\%,$$
$$P(A^* \mid B_4)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)=100\%.$$

由全概率公式得到

$$\begin{aligned}P(A^*)&=\sum_{i=1}^{4}P(A^* \mid B_i)P(B_i)\\&=0.454\times0.375+0.288\times0.209+0.079\times0.079+1\times0.337\\&=0.5737.\end{aligned}$$

【例 1.33】发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号"·"和"—",由于通信系统受到干扰,当发出信号"·"时,收报台未必收到信号"·",而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号"·"和"—";同样,当发出信号"—"时,收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号"—"和"·",求:

(1) 收报台收到信号"·"的概率;

(2) 当收报台收到信号"·"时,发报台是发出信号"·"的概率.

【解】设 $B_1,B_2$ 分别表示发出信号"·"和"—",$A$ 表示收到信号"·",则有

$$P(B_1)=0.6,P(B_2)=0.4,P(A \mid B_1)=0.8,P(A \mid B_2)=0.1.$$

(1) 由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)=0.6\times0.8+0.4\times0.1=0.52.$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)}=\frac{0.6\times0.8}{0.52}=\frac{12}{13}.$$

【例 1.34】设一个口袋中有 6 个球,令 $A_1,A_2,A_3$ 依次表示这 6 个球分别为 4 红,2 白;3 红,3 白;2 红,4 白.设验前概率为 $P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{1}{6},P(A_3)=\frac{1}{3}$.现从这口袋中任取一球,得到白球,求相应的后验概率?

【解】令 $B=\{$任取一球为白球$\}$.

由题设 $$P(B \mid A_1)=\frac{2}{6},P(B \mid A_2)=\frac{3}{6},P(B \mid A_3)=\frac{4}{6}.$$

由贝叶斯公式有

$$\begin{aligned}P(A_1 \mid B)&=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}\\&=\frac{P(A_1)\cdot P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)+P(A_3)P(B \mid A_3)}\\&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}}=\frac{6}{17}.\end{aligned}$$

同理可得 $$P(A_2 \mid B)=\frac{3}{17},P(A_3 \mid B)=\frac{8}{17}.$$

【例 1.35】有两个盒子,第一盒中装有2个红球,1个黑球,第二盒中装有2个红球,2个黑球,现从这两盒中各任取一球放在一起,再从中任取一球,问

(1) 这个球是红球的概率;

(2) 若发现这个球是红球,问第一盒中取出的球是红球的概率.

【解】(1) 令 $A=\{$取得一个红球$\}$,$B_i=\{$从第 $i$ 个盒中取出一个红球$\}$,$i=1,2$. 于是

$$P(B_1B_2)=\frac{2\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{3},P(A\mid B_1B_2)=1.$$

$$P(B_1\overline{B}_2)=\frac{2\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{3},P(A\mid B_1\overline{B}_2)=\frac{1}{2}.$$

$$P(\overline{B}_1B_2)=\frac{1\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{6},P(A\mid \overline{B}_1B_2)=\frac{1}{2}.$$

$$P(\overline{B}_1\overline{B}_2)=\frac{1\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{6},P(A\mid \overline{B}_1\overline{B}_2)=0.$$

由全概率公式有

$$P(A)=P(A\mid B_1B_2)P(B_1B_2)+P(A\mid B_1\overline{B}_2)P(B_1\overline{B}_2)+P(A\mid \overline{B}_1B_2)P(\overline{B}_1B_2)+P(A\mid \overline{B}_1\overline{B}_2)P(\overline{B}_1\overline{B}_2)=\frac{7}{12}.$$

$$(2)P(B_1\mid A)=P(B_1B_2+B_1\overline{B}_2\mid A)=P(B_1B_2\mid A)+P(B_1\overline{B}_2\mid A)$$
$$=\frac{P(A\mid B_1B_2)P(B_1B_2)+P(A\mid B_1\overline{B}_2)P(B_1\overline{B}_2)}{P(A)}=\frac{6}{7}.$$

注 本题中的完备事件组为 $B_1B_2,B_1\overline{B}_2,\overline{B}_1B_2,\overline{B}_1\overline{B}_2$,故在求 $P(B_1\mid A)$ 时应先转化为完备事件组中的事件的条件概率 $P(B_1B_2+B_1\overline{B}_2\mid A)$,再按 Bayes 公式进行计算.

## 题型五　有关伯努利概型的命题

**提示** 若试验可以看成或分解成独立重复进行的试验,且每次试验的结果只需考虑两个 $A$ 与 $\overline{A}$,则该试验就是一个伯努利试验,有关概率用二项分布概率公式:$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ 进行计算.

【例 1.36】设在3次独立试验中,事件 $A$ 出现的概率均相等且至少出现1次的概率为 $\frac{19}{27}$,则在1次试验中,事件 $A$ 出现的概率为________.

【解】令 $P(A)=p$,则 $1-C_3^0p^0(1-p)^3=\frac{19}{27}$,即 $(1-p)^3=\frac{8}{27}$.

故,$p=\frac{1}{3}$.

【例 1.37】在伯努利试验中,若 $A$ 出现的概率为 $p$,求在出现 $m$ 次 $\overline{A}$ 之前出现 $k$ 次 $A$ 的概率.

【分析】事件"在出现 $m$ 次 $\overline{A}$ 之前出现 $k$ 次 $A$"等价于事件"在前 $k+m-1$ 次试验中出现 $k$ 次 $A$,$m-1$ 次 $\overline{A}$,且第 $m+k$ 次出现 $\overline{A}$".

【解】由上面分析即得所求概率为

$$P=C_{k+m-1}^kp^k(1-p)^{m-1}\cdot(1-p)$$
$$=C_{k+m-1}^kp^k(1-p)^m.$$

【例 1.38】一本 500 页的书，共有 100 个错字，每个错字等可能地出现在每一页上，按照泊松定理，在给定的一页上至少有 2 个错字的概率为

(A)1.　　(B)$1-e^{-\frac{1}{5}}$.

(C)$1-e^{-\frac{2}{5}}$.　　(D)$1-e^{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}}$.　　【　】

【分析】本题的关键是如何建立其概型，由题意，每个错字出现在某页上的概率均为$\frac{1}{500}$，100 个错字就可看成做 100 次伯努利试验，于是问题就迎刃而解了.

【解】设 $A$ 表示“某页上至少有 2 个错字”，于是有

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\overline{A})\\&=1-\sum_{i=0}^{1}C_{100}^{i}\left(\frac{1}{500}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{500}\right)^{100-i}\\&=1-\left(1-\frac{1}{500}\right)^{100}-100\times\frac{1}{500}\times\left(1-\frac{1}{500}\right)^{99}\end{aligned}$$

由泊松定理得 $\approx 1-e^{-1/5}-\frac{1}{5}e^{-1/5}$

所以(D) 为答案.

注 1° 泊松定理：设随机变量 $X_n$ 服从二项分布 $B(n,p_n)$，$(n=1,2,\cdots)$ 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$($\lambda$ 为正常数)，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$.

2° 也就是当 $n$ 很大，$p$ 很小时，二项分布 $B(n,p)$ 近似于泊松分布 $p(\lambda)$，其中 $\lambda=np$(一般当 $n>10,p<0.1$ 时可用该定理).

【例 1.39】假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可直接出厂；以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立). 求：(1) 全部能出厂的概率 $\alpha$；(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 $\beta$；(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 $\theta$.

【解】(1) 对于新生产的每台仪器，$A$ 表示“仪器需进一步调试”，$B$ 表示“仪器能出厂”，则 $\overline{A}$ 表示“仪器能直接出厂”，$AB$ 表示“仪器需进一步调试且能出厂”，于是

$$B=\overline{A}+AB,P(A)=0.30,P(B\mid A)=0.80,$$

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.30\times 0.80=0.24,$$

$$P(B)=P(\overline{A}+AB)=P(\overline{A})+P(AB)=0.70+0.24=0.94.$$

设 $X$ 为所生产的 $n$ 台仪器中能出厂的台数，则 $X$ 作为 $n$ 次独立试验成功(仪器能出厂)的次数，$X$ 服从参数 $p=0.94$ 的 $n$ 重伯努利概型，故

$$\alpha=P\{X=n\}=C_n^n(0.94)^n(1-0.94)^0=(0.94)^n,$$

(2)$\beta=P\{X=n-2\}=C_n^2(0.94)^{n-2}(0.06)^2$.

(3)$\theta=P\{X\leqslant n-2\}=1-P\{X=n-1\}-P\{X=n\}$

$=1-n\times 0.94^{n-1}\times 0.06-0.94^n$.

## 第3节　思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势1**　如果要求的是若干事件中"至少"有一个发生的概率，则马上联想到概率加法公式；当事件组相互独立时，则用对立事件的概率公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

**【例1.40】** 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，$P(A_k)=p_k$，求诸事件中至少发生一个的概率.

**【解】** $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdot\cdots\cdot\overline{A}_n)$

$$\xlongequal{\text{因为 }A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 互相独立}}1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot\cdots\cdot P(\overline{A}_n)$$

$$=1-(1-p_1)(1-p_2)\cdot\cdots\cdot(1-p_n)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

**思维定势2**　若给出的试验可分解成(0－1)的 $n$ 重独立重复试验，则马上联想到 Bernoulli 试验，及其概率计算公式

$$P\{z=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

**【例1.41】** 设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

对 $X$ 独立地重复观察4次，试求观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数为2的概率.

**【解】** $p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2}.$$

设 $\zeta$ 表示4次观察中观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数.

于是 $\zeta\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，故

$$P\{\zeta=2\}=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}.$$

**思维定势3**　若某事件是伴随着一个完备事件组的发生而发生，则马上联想到该事件的发生概率是用全概率公式计算. 关键：寻找完备事件组.

**【例1.42】** 设 $A_n$ 表示"每天进入图书馆的人数是 $n$"的事件，$n=0,1,2,\cdots$，$P(A_n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$，$\lambda>0$. 每个进入图书馆的人以概率 $p(0<p<1)$ 借书，且各个人是否借书彼此间没有关系，(1) 求进入图书馆的人中恰有 $k$ 个人借书的概率；(2) 若某天借书的人数为 $k$，试求该天进馆人数为 $n$ 的概率.

**【分析】** 显然 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega, A_n A_m = \varnothing (m \neq n)$，即 $\{A_n\}$ 是一个完备事件组，借书人数是伴随 $A_n$ 的发生而发生的，因此进馆人中恰有 $k$ 个人借书的概率用全概率公式求.(2) 由果($k$ 个人借书)索因(进馆人数)这样的问题用贝叶斯公式.

**【解】**(1) 令 $B_k$ 表示"进馆的人恰有 $k$ 个人借书"的事件，则由伯努里概型有

$$P\{B_k | A_n\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, n = k, k+1, \cdots$$

由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \cdot P(B_k | A_n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}. (k = 0,1,2,\cdots) \end{aligned}$$

(2) 由 Bayes 公式

$$\begin{aligned} P(A_n | B_k) &= \frac{P(A_n) P(B_k | A_n)}{P(B_k)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}} \\ &= \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}. \end{aligned}$$

## 二、综合题解析

**【例 1.43】** 假设某段时间内来百货公司的顾客数服从参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布，而在百货公司里每个顾客购买电视机的概率为 $p$，且顾客之间是否购买电视机相互独立，试求这段时间内，百货公司售出 $k$ 台电视机的概率.(设每个顾客至多买一台)

**【解】** 设 $X$ 表示售出电视机的台数，$Y$ 表示来到百货公司的顾客数，则

$$P(Y = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0,1,2,\cdots.$$

$$P(X = k \mid Y = i) = \begin{cases} 0, & i = 0,1,\cdots,k-1, \\ C_i^k p^k (1-p)^{i-k}, & i = k, k+1, \cdots \end{cases}$$

故由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X - k \mid Y = i) P(Y = i) = \sum_{i=k}^{\infty} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

注 (1) 本题说明百货公司所售出的电视机的台数仍服从泊松分布，这就是泊松分布在随机选

择下的不变性.

(2) 本题说明全概公式中条件事件数,即引发结果的"原因"数可以为可列个,且条件概率 $P(X=k\mid Y=i)$ 为伯努利概型中的概率.

## 习　题　一

**1. 填空题.**

(1) 设 $A,B,C$ 为三个事件,且 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.9$,$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=0.97$,则 $P(AB-C)=$ ________.

(2) 设10件产品中有4件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格品,另一件也是不合格品的概率为________.

(3) 设一次试验成功的概率为 $p$,进行100次独立重复试验,当 $p=$ ________时,成功次数的标准差的值最大,其最大值为________.

(4) 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$($a$ 为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 $x$ 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

(5) 设随机事件 $A,B$ 及其事件 $A\cup B$ 的概率分别是0,4,0,3和0.6,若 $\overline{B}$ 表示 $B$ 的对立事件,则积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ ________.

(6) 某市有50%住户订日报,有65%住户订晚报,有85%住户至少订这两种报纸中的一种,则同时订这两种报纸的住户的百分比是________.

(7) 三台机器相互独立运转,设第一,第二,第三台机器不发生故障的概率依次为0.9,0.8,0.7,则这三台机器中至少有一台发生故障的概率________.

(8) 电路由元件 $A$ 与两个并联的元件 $B,C$ 串联而成,若 $A,B,C$ 损坏与否是相互独立,且它们损坏的概率依次为0.3,0.2,0.1,则电路断路的概率是________.

(9) 甲乙两人投篮,命中率分别为0.7,0.6,每人投三次,则甲比乙进球数多的概率是________.

(10) 三人独立破译一密码,他们能单独译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$,则此密码被译出的概率________.

**2. 单项选择题.**

(1) 以 $A$ 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则对立事件 $\overline{A}$ 为

A. "甲种产品滞销,乙种产品畅销".　　B. "甲、乙产品均畅销".

C. "甲种产品滞销".　　D. "甲产品滞销或乙种产品畅销".　　【　】

(2) 设 $A,B,C$ 是三个事件,与事件 $A$ 互斥的事件是

A. $\overline{A}B+A\overline{C}$.　　B. $\overline{A(B+C)}$.

C. $\overline{ABC}$.　　D. $\overline{A+B+C}$.　　【　】

(3) 设 $A,B$ 为两个任意的事件,则

A. $P(A\cup B)P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

B. $P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.

C. $P(A-B)P(B-A)\leqslant P(A)P(B)-P(AB)$.

D. $P(A-B)P(B-A)\geqslant\frac{1}{4}$.　　【　】

(4) 设 $A_1,A_2,A_3$ 是三个事件,则 $A_1,A_2,A_3$ 中至少发生两个事件可表示为

A. $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$.

B. $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$.

C. $\Omega-(A_1+A_2+A_3)$.

D. $\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. 【 】

(5) 事件 $A$ 与 $B$ 相互独立的充要条件为

A. $A+B=\varnothing$. B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $AB=\varnothing$. D. $P(A+B)=P(A)+P(B)$. 【 】

(6) 对于任意两个事件 $A$ 与 $B$,有 $P(A-B)$ 为

A. $P(A)-P(B)$. B. $P(A)-P(B)+P(AB)$.

C. $P(A)-P(AB)$. D. $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$. 【 】

(7) 设 $A,B$ 为两事件,且 $P(AB)=0$,则

A. $A$ 与 $B$ 互斥. B. $AB$ 是不可能事件.

C. $AB$ 未必是不可能事件. D. $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$. 【 】

(8) $n$ 张奖券中含有 $m$ 张有奖的,$k$ 个人购买,每人一张,其中至少有一个人中奖的概率是

A. $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. B. $\frac{m}{C_n^k}$. C. $\frac{C_m^1C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$. D. $\sum_{r=1}^{k}\frac{C_m^r}{C_n^k}$. 【 】

(9) 设 $A,B$ 为任意两个事件,且 $A\subset B,P(B)>0$,则下列选项必然成立的是

A. $P(A)<P(A\mid B)$. B. $P(A)\leqslant P(A\mid B)$.

C. $P(A)>P(A\mid B)$. D. $P(A)\geqslant P(A\mid B)$. 【 】

(10) 已知 $0<P(B)<1$,且 $P[(A_1+A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$,则下列选项成立的是

A. $P[(A_1+A_2)\mid\overline{B}]=P(A_1\mid\overline{B})+P(A_2\mid\overline{B})$.

B. $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.

C. $P(A_1+A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$.

D. $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$. 【 】

**3. 计算题.**

(1) 两封信随机地投向标号为 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ 的四个邮筒,问第 Ⅱ 个邮筒恰好投入一封信的概率是多少?

(2) 在 1 500 个产品中有 400 个次品,1 100 个正品,任取 200 个,问:

① 恰有 90 个次品的概率; ② 至少有 2 个次品的概率.

(3) 某厂生产的产品次品率为 0.05,每 100 个产品为一批,抽查产品质量时,在每批中任取一半来检查,如果发现次品不多于 1 个,则这批产品可以认为是合格的,求一批产品被认为是合格的概率.

(4) 书架上按任意次序摆着 15 本教科书,其中有 5 本是数学书,从中随机地抽取 3 本,至少有一本是数学书的概率.

(5) 全年级 100 名学生中有男生 80 名,来自北京的 20 名中有男生 12 名,免修英语的 40 名学生中有男生 32 名,求出下列概率:

① 碰到男生情况不是北京男生的概率;

② 碰到北京来的学生的情况下是一名男生的概率;

③ 碰到北京男生的概率；

④ 碰到非北京学生情况下是女生的概率；

⑤ 碰到免修英语的男生的概率.

(6) 为了防止意外，在矿内同时设有两种警报系统 $A$ 与 $B$，每种系统单独使用时，其有效概率 $A$ 为 0.92，$B$ 为 0.93，在 $A$ 失灵条件下，$B$ 有效的概率为 0.85，求：

① 发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；

② $B$ 失灵条件下，$A$ 有效的概率.

(7) 三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子有 3 个黑球 5 个白球，现随机地取一个箱子，再从这个箱子取出 1 个球，问：

① 这个球是白球的概率；

② 已知取出的球为白球，此球属于第二个箱子的概率.

(8) 假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品. 现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件(取出的零件均不放回)，试求：

① 先取的零件是一等品的概率；

② 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍是一等品的条件概率.

(9) 袋中有 12 个球，其中有 9 个是新的，第一次比赛时从中任取 3 个用，比赛后仍放回袋中，第二次比赛再从袋中任取 3 个，求：

① 第二次取出的球都是新球的概率；

② 又已知第二次取出的球都是新球，第一次取到的都是新球的概率.

(10) 设甲、乙两袋，甲袋中装有 $n$ 个白球，$m$ 个红球，乙袋中装有 $N$ 个白球，$M$ 个红球，今从甲袋中任取一只放入乙袋，再从乙袋中任取一个球，问取到白球的概率.

(11) 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

① 求先抽到的一份是女生表的概率 $p$；

② 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 $q$.

(12) 1 架长机和 2 架僚机一同飞往某目的地进行轰炸，但要到达目的地，非有无线电导航不可，而只有长机具有此项设备，一旦到达目的地，各机将独立地进行轰炸，且炸毁目标的概率为 0.3，在到达目的地之前，必须经过高射炮阵地上空，此时任一飞机被击落的概率为 0.2，求目标被炸毁的概率.

## 参　考　答　案

**1.** (1)0.07.　(2)$P=\frac{1}{5}$.　(3)$\frac{1}{2}$,5.　(4)$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.　(5)$P(A\overline{B})=0.3$.　(6)$P=30\%$.

(7)$P=0.496$.　(8)$P=0.314$.　(9)$P=0.436240\approx 0.436$.　(10)$P=\frac{3}{5}$.

**2.** (1)D　(2)D　(3)B　(4)B　(5)B　(6)C　(7)C　(8)A　(9)B　(10)B

**3.** (1)$P(A)=\frac{C_2^1C_3^1}{4^2}=\frac{3}{8}$.　(2)① $\frac{C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}}{C_{1\,500}^{200}}$　② $1-\left[\frac{C_{1\,100}^{200}}{C_{1\,500}^{200}}+\frac{C_{400}^{1}\cdot C_{1\,100}^{199}}{C_{1\,500}^{200}}\right]$.

(3)0.279 4.　(4)$P=\frac{67}{91}$.　(5)① $\frac{17}{20}$ ② $\frac{12}{20}$ ③ $\frac{12}{100}$ ④ $\frac{12}{80}$ ⑤ $\frac{32}{100}$.

(6)①0.988;②0.829.　(7)① $\frac{53}{120}$;② $\frac{20}{53}$.

(8)① $\frac{2}{5}$;② $\approx 0.486$.　(9)①0.145 8;② $\frac{5}{21}$.

(10) $\frac{n}{m+n}\cdot\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{n+m}\cdot\frac{N}{N+m+1}$.

(11)① $\frac{29}{90}$;② $\frac{20}{61}$.　(12)0.477.

# 第二章　随机变量及其分布

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、概念与公式一览表

本章概念与公式较多，为便于记忆、对照，特制表 2-1 ～ 表 2-3 供参考.

表 2-1　随机变量分布

<table>
<tr><th>一维随机变量 $X$ 的分布</th><th>几何表示</th></tr>
<tr><td>随机变量 $X$ 的分布函数<br>$$F(x) \triangleq P(X \leqslant x),(-\infty < x < +\infty)$$<br>性质：(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$<br>(2) $F(x_1) \leqslant F(x_2),(x_1 < x_2)$<br>(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$<br>(4) $F(x+0) = F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的</td><td>图 2-1</td></tr>
<tr><th>$X$ 为离散型</th><th>$X$ 为连续型</th></tr>
<tr><td>概率分布：$P(X = x_k) = p_k, k = 1,2,\cdots$<br>分布律<br>$\begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\cdots \\ \hline P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n\cdots \end{array}$<br>性质：<br>(1) $p_k \geqslant 0, k = 1,2,\cdots$<br>(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$<br>分布函数 $F(x) = \sum\limits_{x_k \leqslant x} p_k$ 或 $\sum\limits_{x_k \leqslant x} P(X = x_k), k = 1,2,\cdots$</td><td>概率密度 $\varphi(x),(-\infty < x < +\infty)$<br>性质：<br>(1) $\varphi(x) \geqslant 0$<br>(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$<br>(3) $P(x_1 < X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\mathrm{d}x$<br>(4) $F'(x) = \varphi(x)$，$x$ 为 $\varphi(x)$ 的连续点<br>分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\mathrm{d}x$</td></tr>
</table>

续表

| 二维随机变量$(X,Y)$的分布 | 几何表示(见图 2-2) |
|---|---|
| 性质：<br>(1)$0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$<br>(2) $F(x,y)$是$x$或$y$的不减函数且对任意固定的$y$有$F(-\infty,y)=0$，<br>对任意固定的$x$,有$F(x,-\infty)=0$<br>$F(-\infty,-\infty)=0$<br>$F(+\infty,+\infty)=1$<br>(3) $F(x,y)=F(x+0,y)$,$F(x,y)=F(x,y+0)$,即$F(x,y)$关于$x$右连续,关于$y$右连续<br>(4) 随机点$(X,Y)$落在矩形域:$x_1<X\leqslant x_2$,$y_1<Y\leqslant y_2$上的概率为$P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$<br>且$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geqslant 0$ | 图 2-2 |

**$(X,Y)$为离散型**

$(X,Y)$的联合分布律

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$,$(i,j=1,2,\cdots)$或表格形式

| Y \ X | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

性质：

(1)$p_{ij}\geqslant 0$

(2)$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$

分布函数　$F(x,y)=\sum\limits_{\substack{x_i\leqslant x\\ y_j\leqslant y}}p_{ij}$

**$(X,Y)$为连续型**

概率密度$\varphi(x,y)$

性质：

(1)$\varphi(x,y)\geqslant 0$

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$

(3)$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\varphi(x,y)$，

$(x,y)$为$\varphi(x,y)$的连续点

(4)$P\{(X,Y)\in G\}$

$=\iint\limits_G\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

分布函数

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

| 二维随机变量$(X,Y)$的边缘分布 | 几何表示(见图 2-3) |
|---|---|
| 对$X$的边缘分布,即$X$的分布<br>$F_X(x)=P(X\leqslant x)=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}$<br>$=F(x,+\infty)$<br>对$Y$的边缘分布,即$Y$的分布<br>$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X<+\infty,Y\leqslant y)$<br>$=F(+\infty,y)$ | 图 2-3 |

续表

<table>
<tr><th>(X,Y) 为离散型</th><th>(X,Y) 为连续型</th></tr>
<tr><td>设(X,Y) 的联合分布律为<br>$p_{ij}=p(X=x_i,Y=y_j),(i,j=1,2,\cdots)$.<br>(X,Y) 关于 X 的边缘分布律<br>$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$.<br>(联合分布律中第 $i$ 行各元素相加)<br>(X,Y) 关于 Y 的边缘分布律<br>$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$<br>(联合分布律中第 $j$ 列各元素相加)<br>(X,Y) 关于 X 的边缘分布函数<br>$F_X(x)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{j=1}p_{ij}$<br>(X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数<br>$F_Y(y)=\sum_{y_j\leqslant y}\sum_{i=1}p_{ij}$</td><td>设(X,Y) 的概率密度为 $\varphi(x,y)$.<br>(X,Y) 关于 X 的边缘分布密度为<br>$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y$<br>(X,Y) 关于 Y 的边缘分布密度为<br>$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x$<br>(X,Y) 关于 X 的边缘分布函数<br>$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$<br>(X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数<br>$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$</td></tr>
<tr><td colspan="2">设(X,Y) 为二维随机变量,在条件 $Y=y$ 下,$X$ 的条件分布函数<br>$F_{X|Y}(x\mid y)=P(X\leqslant x\mid Y=y)=\lim_{\varepsilon\to0^+}P(X\leqslant x\mid y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon)$<br>$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{P(X\leqslant x,y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon)}$<br>$F_{Y|X}(y\mid x)=P(Y\leqslant y\mid X=x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}P(Y\leqslant y\mid x-\varepsilon<X\leqslant x+\varepsilon)$<br>$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{P(x-\varepsilon<X\leqslant x+\varepsilon,Y\leqslant y)}{P(y-\varepsilon<X\leqslant x+\varepsilon)}$</td></tr>
<tr><th>(X,Y) 为离散型</th><th>(X,Y) 为连续型</th></tr>
<tr><td>二维随机变量(X,Y) 在条件 $Y=y_j$ 下 $X$ 的条件分布律<br>$P(X=x_i\mid Y=y_j)$<br>$=\dfrac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$<br>$=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}(i=1,2,\cdots)$<br>(X,Y) 在条件 $X=x_i$ 下 $Y$ 的条件分布律<br>$P(Y=y_j\mid X=x_i)$<br>$=\dfrac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}$<br>$=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}(i=1,2,\cdots)$</td><td>设(X,Y) 的分布密度为 $\varphi(x,y)$,则在条件 $Y=y$ 下 $X$ 的条件分布密度:$\varphi(x\mid y)=\dfrac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)}$<br>在条件 $X=x$ 下 $Y$ 的条件分布密度<br>$\varphi(y\mid x)=\dfrac{\varphi(x,y)}{\varphi_X(x)}$<br>其中,$\varphi_Y(y),\varphi_X(x)$ 分别为 $Y$ 与 $X$ 的边缘密度,对应的条件分布函数为<br>$F_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{\int_{-\infty}^{x}\varphi(x,y)\mathrm{d}x}{\varphi_Y(y)}$<br>$=\int_{-\infty}^{x}\varphi_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x$<br>$F_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)\mathrm{d}y}{\varphi_X(x)}$<br>$=\int_{-\infty}^{y}\varphi_{Y|X}(y\mid x)\mathrm{d}y$</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><td colspan="2">设随机变量$(X,Y)$的联合分布函数，边缘分布函数分别为$F(x,y)$及$F_X(x)$，$F_Y(y)$，若对所有的$x$，$y$有<br>$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$<br>则称随机变量$X$与$Y$是相互独立的</td></tr>
<tr><td>$(X,Y)$为离散型</td><td>$(X,Y)$为连续型</td></tr>
<tr><td>$X$与$Y$相互独立$\triangleq p_{ij}=p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$，<br>$p_{i\cdot}$与$p_{\cdot j}$分别为$X$与$Y$的边缘分布律</td><td>$X$与$Y$相互独立$\triangleq \varphi(x,y)=\varphi_X(x)\varphi_Y(y)$，其中$\varphi_X(x)$，$\varphi_Y(y)$为边缘密度</td></tr>
</table>

**表 2-2　随机变量函数的分布**

**一维随机变量函数 $Y=f(X)$ 的分布**

设$X$为离散型，其概率分布为

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_k$ | $\cdots$ |

则$Y=f(X)$的概率分布

(1) 当$y_i=f(x_i)(i=1,2,\cdots)$的各值$y_i$互不相等时，$Y$的概率分布为

| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_k$ | $\cdots$ |

(2) 当$y_i=f(x_i)(i=1,2,\cdots)$的各值不是互不相等时，应把相等的值分别合并，并相应地将其概率相加，例如$y_i=y_j$，则$Y$的概率分布为

| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_i$ | $\cdots$ | $y_k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $(p_i+p_j)$ | $\cdots$ | $p_k$ | $\cdots$ |

定量　设$X$为连续型，分布密度为$\varphi_X(x)$，又$y=f(x)$处处可导，且对任意的$x$有$f'(x)>0$，(或$f'(x)<0$)，则$Y=f(X)$的分布密度

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\varphi(f^{-1}(y))\,|\,(f^{-1}(y))'\,|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中$f^{-1}(y)$是$f(x)$的反函数，

$\alpha=\min\{f(-\infty),f(+\infty)\}$，

$\beta=\max\{f(-\infty),f(+\infty)\}$.

也可这样求$\varphi_Y(y)$：

① 先求出$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P(f(X)\leqslant y)=P(X\in S)$

其中，$S$为所有使$f(x)\leqslant y$成立的$x$值的集合

② 再把$F(y)$对$y$求导，即

$$\varphi_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y}$$

**表 2-3　二维随机变量函数 $Z=f(X,Y)$ 的分布**

设$(X,Y)$的概率密度为$\varphi(x,y)$，则二维随机变量函数$Z=g(X,Y)$的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant Z)=P(g(X,Y)\leqslant z)=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

常用的随机变量函数为

(1)$Z=X\pm Y$　(2)$Z=X\cdot Y$　(3)$Z=X/Y$

续表

<table>
<tr><td colspan="2">(1) 两个随机变量之和,即 $Z=X+Y$ 的分布</td></tr>
<tr><td>$X,Y$ 为离散型,$(X,Y)$ 的联合分布律为<br>$P_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),(i,j=1,2,\cdots)$<br>则 $Z=X+Y$ 的分布律为<br>$P(Z=z_k)=\sum_{x_i+y_j=z_k}P(X=x_i,Y=y_j)$<br>$=\sum_i P(X=x_i,Y=z_k-x_i)$<br>或 $=\sum_j P(X=z_k-y_j,Y=y_j)$<br>$k=1,2,\cdots$</td><td>$X,Y$ 为连续型,$(X,Y)$ 的分布密度为 $\varphi(x,y)$,则 $Z=X+Y$ 的分布函数为<br>$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)$<br>$=\iint_{x+y\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$<br>$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}\varphi(x,y)\mathrm{d}y$<br>或 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\varphi(x,y)\mathrm{d}x$<br>其概率密度为<br>$\varphi_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$<br>或 $=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n$ 个独立随机变量,其分布函数分别为 $F_{X_1}(x),F_{X_2}(x),\cdots,F_{X_n}(x)$,则 $X_{\max}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},X_{\min}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数分别为<br>$F_{\max}(x)=F_{X_1}(x)\cdot F_{X_2}(x)\cdot\cdots\cdot F_{X_n}(x)$<br>$F_{\min}(x)=1-[1-F_{X_1}(x)]\cdot[1-F_{X_2}(x)]\cdot\cdots\cdot[1-F_{X_n}(x)]$<br>特别地当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布时[其分布函数为 $F(x)$],则<br>$F_{\max}(x)=[F(x)]^n$; $F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n$</td></tr>
</table>

## 二、重要的一维分布

### 1. (0—1) 分布

(0—1) 分布的分布律为

| $X$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $1-p$ |

其中,$p$ 为事件 $A$ 出现的概率,$0<p<1$.

### 2. 二项分布

在 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 恰发生 $k$ 次的概率

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},\qquad k=0,1,2,\cdots,n.$$

其中,$p$ 为事件$A$ 在每次试验中出现的概率;$q$ 为不出现的概率,$q=1-p$,随机变量 $X$ 服从二项分布,通常记为 $X\sim B(n,p)$.

### 3. 泊松分布

其分布律

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots;\lambda>0,$$

称 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布,简记为 $X\sim P(\lambda)$.

**4. 正态分布**

(1) 标准正态分布:若随机变量 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

则称 $X$ 服从标准正态分布,记为 $X\sim N(0,1)$,其分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

(2) 一般正态分布:若随机变量 $X$ 的密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中,$\sigma>0$,$\mu$ 与 $\sigma$ 均为常数,其分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

则称 $X$ 服从参数为 $\mu$ 和 $\sigma$ 的正态分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

**5. 均匀分布**

若 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

则称 $X$ 在$[a,b]$上服从均匀分布,记为 $X\sim U(a,b)$,其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1 & x\geqslant b.\end{cases}$$

**6. 指数分布**

若 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}.$$

其中,$\lambda>0$,则称 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 指数分布,记为 $X\sim E(\lambda)$. 其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}.$$

**7. 超几何分布**

超几何分布的分布律为

$$P(X=i)=\frac{C_M^iC_{N-M}^{n-i}}{C_N^n},0\leqslant i\leqslant n\leqslant N;i\leqslant M.$$

记为 $X\sim H(N,M,n)$.

**8. 几何分布**

几何分布的分布律为

$$P(X=i)=(1-p)^{i-1}p, i=1,2,\cdots,0<p<1.$$

记为 $X\sim G(p)$.

注 (1)0－1分布即二项分布在 $n=1$ 的情形,也就是1重伯努利试验中事件成功次数的分布.

(2) 若 $X\sim N(0,1)$,则 $\varphi(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$,$\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$,$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$,$P(|X|\leqslant a)=2\Phi(a)-1$.

(3) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

## 三、重要的二维分布

### 1. 二维均匀分布

若二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D},(x,y)\in D\\ 0,\ 其他\end{cases},$$

其中,$S_D$ 为平面区域 $D$ 的面积,则称 $(X,Y)$ 服从 $D$ 上的均匀分布,常记为 $U(D)$.

### 2. 二维正态分布

若二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},其中,$$

$\sigma_1,\sigma_2>0$, $|\rho|<1$,

则称 $(X,Y)$ 服从二维正态分布,其分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$.

二维正态分布的性质:设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则有

1° $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$;

2° $C_1X+C_2Y\sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2\rho C_1C_2\sigma_1\sigma_2)$;

3° $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $X$ 与 $Y$ 不相关,即 $\rho=0$;

4° $X$ 关于 $Y=y$ 或 $Y$ 关于 $X=x$ 的条件分布也是正态分布.

**【例 2.1】** 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,0)$,则 $P\left(\dfrac{X}{Y}>0\right)=$ ________.

**【解】** 由二维正态分布的性质可知:$X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(0,1)$,且 $X$ 与 $Y$ 独立,故

$$\begin{aligned}P\left(\frac{X}{Y}>0\right)&=P(X>0,Y>0)+P(X<0,Y<0)\\&=P(X>0)P(Y>0)+P(X<0)P(Y<0)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故应填 $\dfrac{1}{2}$.

## 第2节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　一维随机变量及其分布的概念、性质的命题

提示 利用分布函数的定义、性质以及常见一维分布进行求解.

【例2.2】设 $X$ 为连续型随机变量,$F(x)$ 为 $X$ 的分布函数,则 $F(x)$ 在其定义域内一定为

(A) 非阶梯间断函数.　　(B) 可导函数.

(C) 连续但不一定可导的函数.　　(D) 阶梯函数.　　【　】

【解】由连续型随机变量的定义,存在非负可积函数 $\varphi(x)$,使 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$,故 $F(x)$ 一定是连续函数,但不一定可导,即应选(C).

【例2.3】设随机变量 $X$ 的密度函数为 $\varphi(x)$,且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,$F(x)$ 是 $X$ 的分布函数,则对任意实数 $a$,有

(A) $F(-a)=1-\int_{0}^{a}\varphi(x)\mathrm{d}x$.　　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$.　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.　　【　】

【解】$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令x=-t}\int_{+\infty}^{a}\varphi(-x)(-\mathrm{d}x)$$

$$\xlongequal{\varphi(-x)=\varphi(x)}\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(x)\mathrm{d}x\left[因为\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1,所以\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\right].$$

故(B)入选.

【例2.4】设随机变量 $X$ 的概率密度为:$\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$,$(-\infty<x<+\infty)$ 则其分布函数 $F(x)$ 是

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$.　　(B) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$.

(C) $F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$.　　(D) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$.

【　】

【解】$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$.

当 $x<0$ 时，$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{x}$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{-x}dx+\int_{0}^{x}e^{-x}dx\right)=1-\frac{1}{2}e^{-x}$.

故
$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

可知应选(B).

容易犯的错误是受离散型随机变量分布函数的影响，错误地认为：在 $x$ 的最右边的一个区间段 $F(x)=1$，因而错选(D).

**【例 2.5】**设 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$ 是 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，且 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0,\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 $a,b$ 应满足

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.　　【　】

**【解】**因为 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$ 为概率密度，所以

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)dx=\frac{1}{2}a+b\int_{0}^{3}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b,$$

于是 $2a+3b=4$，故选(A).

**【例 2.6】**设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

$$P(X=k)=b\lambda^{k},(k=1,2,\cdots)\text{ 且 } b>0\text{，则 }\lambda\text{ 为}$$

(A) $\lambda>0$ 的任意实数.　　(B) $\lambda=b+1$.

(C) $\lambda=\frac{1}{1+b}$.　　(D) $\lambda=\frac{1}{b-1}$.　　【　】

**【解】**因为 $\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}b\lambda^{k}=1,S_n=\sum_{k=1}^{n}b\lambda^{k}=b\cdot\frac{(1-\lambda^{n})\lambda}{1-\lambda}$,

所以 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}b\cdot\lambda\frac{(1-\lambda^{n})}{1-\lambda}=1$.

于是可知，当 $|\lambda|<1$ 时，$b\cdot\frac{\lambda}{1-\lambda}=1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{1+b}<1$,（因为 $b>0$），故该选(C).

**【例 2.7】**如下四个函数，哪个不能作为随机变量 $X$ 的分布函数？

(A) $F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$.　　(B) $F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{\ln(1+x)}{1+x}, & x\geqslant 0\end{cases}$.

$$(C)F_3(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{4}x^2, & 0\leqslant x<2.\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}\qquad (D)F_4(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

【　】

【解】作为随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 具有四个性质:(1) ~ (4),反之,若函数 $F(x)$ 满足性质 (1) ~ (4),则其可作为随机变量 $X$ 的分布函数.

因为
$$\lim_{x\to+\infty}F_2(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0\neq 1,$$
所以 $F_2(x)$ 不能作为 $X$ 的分布函数.

故(B) 入选.

【例 2.8】设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$,且 $P(2<X<4)=0.3$,则 $P(X<0)=$ ________.

【解】因为$P(2<X<4)=\Phi\left(\dfrac{4-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{2-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)=0.3$

$$\Rightarrow\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=\Phi(0)+0.3=\frac{1}{2}+0.3=0.8$$

$$\Rightarrow P(X<0)=\Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=1-0.8=0.2.$$

故应填 0.2.

注 非标准正态分布的有关事件的概率均可用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 来表示或计算,另外特殊值 $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$ 应引起重视.

【例 2.9】设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, x\in[0,1]\\ \dfrac{2}{9}, x\in[3,6]\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$

若 $k$ 使得 $P(X\geqslant k)=\dfrac{2}{3}$,则 $k$ 的取值范围是________.

【解】由 $P(X<k)=1-P(X\geqslant k)=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,即$\displaystyle\int_{-\infty}^{k}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$,故 $k\in[1,3]$.

【例 2.10】设随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

试求:(1) 系数 $A$ 与 $B$;(2)$X$ 落在$(-1,1)$ 内的概率;(3)$X$ 的概率密度.

【解】(1) 由于 $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$,可知

$$\begin{cases}A+B\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0\\ A+B\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}.$$

于是 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,\quad -\infty<x<+\infty$.

$$(2)P(-1<\xi<1)=F(1)-F(-1)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$(3)\varphi(x)=F'(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x\right)'=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad(-\infty<x<+\infty).$$

**【例 2.11】**设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

试求:(1) 系数 $A$; (2)$X$ 落在 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$及$\left(\frac{1}{3},2\right)$内的概率; (3)$X$ 的概率密度.

**【解】**(1) 由于 $F(x)$ 的连续性,有

$$\lim_{x\to1^-}F(x)=F(1),\text{即}\lim_{x\to1^-}Ax^2=1\Rightarrow A=1.$$

于是
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<1.\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$(2)\ P\left(-1<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-0=\frac{1}{4},$$

$$P\left(\frac{1}{3}<X<2\right)=F(2)-F\left(\frac{1}{3}\right)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9},$$

$$(3)\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

## 题型二　求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数

**提示** 求分布首先确定随机变量的可能取值,然后求出取值的概率,因此求分布本质上就是计算概率,务必综合运用前一章中计算概率的各种方法.另外要注意随机变量主要有两种类型:离散型和连续型,但也存在既非离散也非连续型的随机变量.

**【例 2.12】**在伯努利试验中,每次试验成功的概率为 $p$,试验进行到成功与失败均出现时停止,求试验次数的分布律.

**【分析】**根据试验要求,试验次数是随机的,即为随机变量,且其可能取值为 2,3,…,然后分别求出取这些值的概率.

**【解】**设 $X$ 表示试验次数,于是 $X$ 的可能取值为 2,3,…,当 $X=k$ 时,表示前面 $k-1$ 试验失败,第 $k$ 次成功或前面 $k-1$ 次成功,第 $k$ 次失败,于是 $X$ 的分布律为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p+p^{k-1}(1-p),(k=2,3,4,\cdots).$$

**【例 2.13】**甲、乙两人从装有 $a$ 个白球与 $b$ 个黑球的口袋中轮流摸取一球,甲先取,乙后取,每次取后不放回,直到两人中有 1 人取到白球时停止,试求取球次数的分布律和甲先取到

白球的概率.

**【分析】** 根据试验要求,取球次数为随机变量,且其可能取值为,1,2,…,$b+1$.

**【解】** 令 $X$ 表示取球次数,则 $X$ 的可能取值为 1,2,…,$b+1$,并且分布律为

$$P(X=1)=\frac{a}{a+b},$$

$$P(X=2)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1},$$

$$\vdots$$

$$P(X=k)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}\cdot\cdots\cdot\frac{b-(k-2)}{a+b-(k-2)}\cdot\frac{a}{a+b-(k-1)},$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}P(X=b+1)&=\frac{ab!}{(a+b)(a+b-1)\cdot\cdots\cdot(a+1)a}\\&=\frac{b!}{(a+1)(a+2)\cdot\cdots\cdot(a+b)}.\end{aligned}$$

因为甲先取到白球,即 $X$ 取奇数值,故

$$P(\text{甲先取到白球})=\sum_{1\leqslant 2k+1\leqslant b+1}P(X=2k+1).$$

**【例 2.14】** 一辆汽车沿一街行驶,要过三个有信号灯的路口,每个信号灯为红或绿,与其他信号灯为红或绿相互独立,且红、绿信号显示的时间相等,求此汽车首次遇到红灯前已通过的路口数 $X$ 的概率分布.

**【分析】** 遇到红灯前的路口数 $X$ 的可能取值为0,1,2,3. $X=3$ 表示汽车一路没遇到红灯,从而易求得其概率分布.

**【解】** 令 $A=\{\text{遇到红灯}\}$,则 $P(A)=\dfrac{1}{2}$,故有

$$P(X=0)=\frac{1}{2},$$

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},$$

即分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**【例 2.15】** 两名篮球队员轮流投篮,直到某人投中时为止,若第一名队员投中的概率为0.4,第二名投中的概率为0.6,求每名队员投篮次数的分布律.

**【分析】** 显然每名队员的投篮次数为随机变量,且可能取值为0,1,2,…,现考虑第一名队员的投篮次数,若此次数为 $k$,则表示第一名前 $k-1$ 次未投中,第二名前 $k-1$ 次未投中,而第一名在第 $k$ 次投中,或者第一名前 $k$ 次未投中,第二名前 $k-1$ 次未投中,而在第 $k$ 次投中,从而易求出其概率,第二名队员的情况是类似的,此处不再赘述.

**【解】** 设 $X,Y$ 分别表示第一名和第二名队员的投篮次数,由上面的分析有

$$P(X=k)=(0.6)^{k-1}\cdot(0.4)^{k-1}\cdot 0.4+(0.6)^{k}\cdot(0.4)^{k-1}\cdot 0.6$$
$$=0.76\cdot(0.24)^{k-1},(k=1,2,\cdots),$$
$$P(Y=0)=0.4,$$
$$P(Y=k)=(0.6)^{k}\cdot(0.4)^{k-1}\cdot(0.6)+(0.6)^{k}\cdot(0.4)^{k}\cdot 0.4$$
$$=1.9\cdot(0.24)^{k},(k=1,2,\cdots).$$

**【例 2.16】** 设随机变量 $X$ 的密度为

$$\varphi(x)=Ae^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$$

试求:(1) 系数 $A$;(2)$P(0<X<1)$;(3)$X$ 的分布函数.

**【解】** (1) 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}\mathrm{d}x=1$,

即
$$2A\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1,\text{故 }2A=1,A=\frac{1}{2},$$

所以 $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

(2)$P(0<X<1)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(-e^{-x})\Big|_{0}^{1}=\frac{1-e^{-1}}{2}\approx 0.316.$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x$,

当 $x<0$ 时,$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{x}$,

当 $x\geqslant 0$ 时,$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}e^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}e^{-x}$,

故 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

**【例 2.17】** 设有 80 台同类型设备,各台工作相互独立,发生故障的概率都是 0.01,且一台设备的故障一个人能维修,考虑两种配备维修工人的方案:其一,由 4 个人维护,每人承包 20 台;其二,由 3 个人共同维护 80 台,试比较两种方案的优劣.

**【解】** 设备发生故障而不能及时维修的概率,大的为劣,小的为优.

先考虑第一种方案.$A_i(i=1,2,3,4)$ 表示第 $i$ 人维护的 20 台中发生故障而不能及时维修的事件.$X$ 表示第一个人维护的 20 台同一时刻发生故障的台数.则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\}\geqslant P(A_1)=P\{X\geqslant 2\},$$

因
$$X\sim B(20,0.01),\lambda=np=20\times 0.01=0.2,$$

故有
$$P\{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\}\geqslant P\{X\geqslant 2\}\approx\sum_{k=2}^{20}\frac{(0.2)^k}{k!}e^{-0.2}\approx 0.0175.$$

再考虑第二种方案,$Y$ 表示 80 台中同一时刻发生故障的台数,$Y\sim B(80,0.01)$,$\lambda=np=80\times 0.01=0.8$,故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y\geqslant 4\}\approx\sum_{k=4}^{80}\frac{(0.8)^k}{k!}e^{-0.8}\approx 0.0091.$$

比较可知,后一方案优于前一方案.

【例 2.18】假设一大型设备在任何长为 $t$ 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 $\lambda t$ 的泊松分布，求：(1) 相继两次故障之间的时间间隔 $T$ 的概率分布；(2) 在设备已经无故障工作 8 h 的情形下，再无故障运行 8 h 的概率 $Q$.

【解】(1) 因为 $N(t)$ 为时间间隔 $t(t \geqslant 0)$ 内发生故障的次数，又 $T$ 表示相继两次故障间的时间间隔，所以当 $T > t$ 时，必有 $N(t) = 0$（即不发生故障），于是

$$F(t) = P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$(2)Q = P(T \geqslant 16 \mid T \geqslant 8) = \frac{P(T \geqslant 16, T \geqslant 8)}{P(T \geqslant 8)}$$

$$= \frac{P(T \geqslant 16)}{P(T \geqslant 18)} = \frac{1 - P(T < 16)}{1 - P(T < 8)}$$

$$= \frac{1 - F(16)}{1 - F(8)} = \frac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-8\lambda}.$$

【例 2.19】设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

现对 $X$ 进行 $n$ 次独立重复观测，以 $V_n$ 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 $V_n$ 的分布律.

【解】事件“观测值不大于 0.1”，即事件 $\{X \leqslant 0.1\}$，其概率

$$p = P\{X \leqslant 0.1\} = \int_{-\infty}^{0.1} f(x)dx = 2\int_0^{0.1} x dx = 0.01,$$

由题意 $V_n$ 为服从 $B(n, 0.01)$ 的随机变量，于是

$$P\{V_n = m\} = C_n^m (0.01)^m (1 - 0.01)^{n-m}, (m = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

【例 2.20】假设随机变量 $X$ 的绝对值不大于 1，$P(X = -1) = \dfrac{1}{8}$，$P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$.

在事件$(-1 < X < 1)$出现的条件下，$X$ 在$(-1, 1)$内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求：(1)$X$ 的分布函数 $F(x) = P(X \leqslant x)$；(2)$X$ 取负值的概率 $p$.

【解】(1) 当 $x < -1$ 时，$F(x) = 0$；

当 $x \geqslant 1$ 时，$F(x) = 1$；

设区间 $I \subset (-1, 1)$，由已知条件 $P(X \in I \mid -1 < X < 1) = k \mid I \mid$.

取 $I = (-1, 1)$，得 $k = \dfrac{1}{2}$.

当 $-1 \leqslant x < 1$ 时，因为

$$P(-1 < X < 1) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = \frac{5}{8},$$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leqslant x) &= P(-1 \leqslant X \leqslant x) \\ &= P(X = -1) + P(-1 < X \leqslant x) \end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{全概}} \frac{1}{8} + P(-1 < X \leqslant x \mid -1 < X < 1)P(-1 < X < 1) + P(-1 < X \leqslant x \mid |X| \geqslant 1)P(|X| \geqslant 1)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(x + 1) \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}x + \frac{7}{16}.$$

故
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{5}{16}x+\frac{7}{16}, & -1\leqslant x<1.\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

(2)$p=P(X<0)=F(0^-)=F(0)=\frac{7}{16}$.

注 本例中的 $F(x)$ 为既非离散型也非连续型分布函数.

## 题型三　求一维随机变量函数的分布

**提示** 对于离散型随机变量，其函数的分布一般均用定义法；对于连续型的情形通常用下面两种方法.

1° 公式法：$X\sim\varphi_X(x)$，$Y=g(X)$，$y=g(x)$ 严格单调，其反函数 $x=h(y)$ 有一阶连续导数，则

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\varphi_X(h(y))\,|h'(y)|, & y\in g(x)\text{ 的值域}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

2° 定义法：先求 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P[g(X)\leqslant y]=\int_{g(x)\leqslant y}\varphi_X(x)\mathrm{d}x$，

于是 $\varphi_Y(y)=F'_Y(y)$.

一般来说，对非单调函数或抽象函数宜用定义法.

**【例 2.21】** 已知 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

试求 $Y=2X^2+1$ 的分布律与分布函数.

**【分析】** 求离散型随机变量函数的分布律时，首先把随机变量的函数，即新的随机变量的可能取值找出来，然后分别计算取值的概率. 本题要注意的是 $P(Y=3)=P(X=-1)+P(X=1)$. 另外求离散型随机变量的分布函数一定要分段计算.

**【解】** $Y=2X^2+1$ 的所有可能取值为 1,3,9 且

$$P(Y=1)=P(X=0)=0.2,$$
$$P(Y=3)=P(X=-1)+P(X=1)=0.1+0.3=0.4,$$
$$P(Y=9)=P(X=2)=0.4,$$

即 $Y$ 的分布律为

| $Y$ | 1 | 3 | 9 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.4 | 0.4 |

下面求 $Y$ 的分布函数，由分布函数的定义

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=\begin{cases}0, & y<1\\ 0.2, & 1\leqslant y<3\\ 0.6, & 3\leqslant y<9\\ 1, & y\geqslant 9\end{cases}.$$

【例 2.22】设 $X \sim U(0,2)$，求 $Y = X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y) =$ ________.

【分析】因为 $x$ 在 $(0,2)$ 中变化时，$y = x^2$ 为单调函数，从而可直接用公式法得

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(\sqrt{y})' = \frac{1}{4\sqrt{y}}, 0 < y < 4, \text{故应填}\frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

【例 2.23】设连续型随机变量 $X$ 有严格单调增加的分布函数 $F(x)$，试求 $Y = F(X)$ 的分布函数与密度函数.

【分析】本题求随机变量 $X$ 的函数 $F(X)$ 的分布，$F(x)$ 未具体给出，用定义法较好.

【解】由分布函数的定义得

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(F(X) \leqslant y).$$

因 $F(x)$ 为分布函数，故 $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，所以

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$；当 $y \geqslant 1$ 时，$F_Y(y) = 1$，；当 $0 \leqslant y < 1$ 时，有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[X \leqslant F^{-1}(y)], [\text{因 } F(x) \text{ 单调增}] \\ &= F(F^{-1}(y)) = y. \end{aligned}$$

即

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leqslant y < 1. \\ 1, & y \geqslant 1 \end{cases}$$

所以密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，即 $Y \sim U(0,1)$.

【例 2.24】设随机变量 $X$ 在 $(0,2\pi)$ 内服从均匀分布，求随机变量 $Y = \cos X$ 的分布密度 $\varphi_y(y)$.

【解】因为 $X$ 在 $(0,2\pi)$ 内服从均匀分布，

所以

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

由 $Y = \cos X$，有 $y = \cos x$，其在 $(0,2\pi)$ 内为非单调函数，在 $(0,\pi)$ 与 $(\pi,2\pi)$ 内分别单调，其反函数分别为

$$x_1 = \arccos y, x_1 \in (0,\pi); 2x_1' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, x_1 \in (0,\pi), y \in (-1,1);$$

$$x_2 = 2\pi - \arccos y, x_2 \in (\pi,2\pi); x_2' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, x_2 \in (\pi,2\pi), y \in (-1,1).$$

故

$$\begin{aligned} \varphi_Y(y) &= \varphi(\arccos y) \cdot |x_1'| + \varphi(2\pi - \arccos y) \cdot |x_2'| \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1,1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$

【例 2.25】在半径为 $R$，中心在原点的圆周上任抛一点 $M$，求：(1) 该点横坐标 $X$ 的密度函数 $\varphi_X(x)$；(2) 该点到点 $(-R,0)$ 的距离 $Z$ 的密度函数 $\varphi_Z(z)$.

【解】有关圆的问题，常以圆心角 $\theta$ 作参数（如图 2-4 所示），设随机点 $M(x,y)$ 的圆心角为 $\theta$，由题意可设 $\theta$ 为 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布，其密度函数为

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & u \in (0,2\pi) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

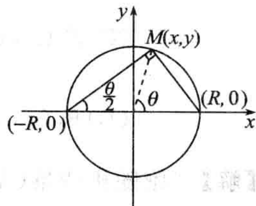


图 2-4

(1) 由几何知识有 $x = R\cos u$.

该函数在$(0,2\pi)$内非单调,在$(0,\pi)$与$(\pi,2\pi)$内分别单调,其反函数分别为

$$u_1 = \arccos\frac{x}{R};u_1' = -\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}},u_1\in(0,\pi),\ |x|<R;$$

$$u_2 = 2\pi - \arccos\frac{x}{R},u_2' = \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}},u_2\in(\pi,2\pi),\ |x|<R.$$

故
$$\varphi_X(x) = \varphi(u_1)\,|u_1'| + \varphi(u_2)\,|u_2'|$$
$$= \begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}, & |x|<R\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

(2) 由几何知识,当随机点 $M$ 位于 $x$ 轴上方时,随机点 $M$ 到$(-R,0)$的距离 $Z$ 为

$$Z = 2R\cos\frac{\theta}{2},\text{而 } z = 2R\cos\frac{u}{2},$$

在$(0,\pi)$为单减函数,其反函数为

$$u = 2\arccos\frac{z}{2R},$$

$$u' = -\frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{z}{2R}\right)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{4R^2-z^2}},0\leqslant z<2R.$$

同理,当随机点 $M$ 位于 $x$ 轴下方时,随机点 $M$ 到$(-R,0)$的距离 $Z$ 为

$$Z = 2R\cos\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right) = -2R\cos\frac{\theta}{2},$$

而 $z = -2R\cos\dfrac{u}{2}$ 在$(\pi,2\pi)$为单增函数.

其反函数为:$u = 2\pi - 2\arccos\dfrac{z}{2R},u' = \dfrac{2}{\sqrt{4R^2-z^2}},0\leqslant z<2R.$

所以
$$\varphi_Z(z) = \begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{4R^2-z^2}}, & 0\leqslant z<2R\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

注 对于函数非单调的情形,可以将其定义域分成若干子区间,使其在每一个子区间上为单调函数,从而可用公式法分别求出其函数的密度,然后相加即可,如【例 2.24】,【例 2.25】. 另外,这两个题也可用定义法,即分布函数法求解,考生不妨作为一个练习.

## 题型四　二维随机变量及其分布的概念、性质的考查

提示 利用联合分布函数的四个性质,联合密度的四个性质不难求解.

**【例 2.26】** 如下四个二元函数,哪个不能作为二维随机变量$(X,Y)$的分布函数?

(A) $F_1(x,y) = \begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & 0<x<+\infty,0<y<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$

(B) $F_2(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{y}{3}\right).$

(C)$F_3(x,y)=\begin{cases}1, & x+2y\geqslant 1\\ 0, & x+2y<1\end{cases}$.

(D)$F_4(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & 0<x<+\infty,0<y<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$. 【 】

【解】二维随机变量$(X,Y)$的分布函数具有表中性质(1)~(4),因此只有满足性质(1)~(4)的函数才能作为$(X,Y)$的分布函数.

因为对$F_3(x,y)$取四点$(1,0),(0,1),(1,1),(0,0)$有

$F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=1-1-1+0=-1<0$,

即$F_3(x,y)$不满足性质(4).

故(C)该入选.

**【例 2.27】**设随机变量$(X,Y)$的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}Ce^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

试求:(1)常数$C$;(2)联合分布函数$F(x,y)$;(3)$P\{0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2\}$.

【解】(1)因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,

所以 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=C\int_0^{+\infty}e^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{C}{12}$,

故 $C=12$.

(2)$(X,Y)$的分布函数$F(x,y)$

当$x>0,y>0$时,$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^x\int_0^y 12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})$;

当$x,y$为其他情形时,$F(x,y)=0$.

故 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(3)$P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2)=F(1,2)-F(1,0)-F(0,2)+F(0,0)$

$=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$.

注 求$P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 2)$也可直接计算二重积分$\int_0^1\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**【例 2.28】**设$(X,Y)$服从二维正态分布,其概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi 10^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{10^2}\right)},\quad(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

求$P(X<Y)$(如图 2-5 所示).

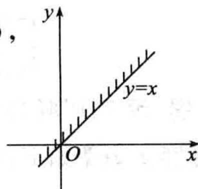


图 2-5

【解】$P(X<Y)=\iint\limits_{x<y}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\cdot 10^2}\iint\limits_{x<y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{10^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\xlongequal{\text{由极坐标系}}\frac{1}{2\pi\cdot 10^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2\cdot 10^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}$.

**【例 2.29】**设二维随机变量$(X,Y)$的分布密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}C(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(1) 常数 $C$，(2) 当 $R=2$ 时，二维随机变量 $(X,Y)$ 在以原点为圆心，$r=1$ 为半径的圆域内的概率.

**【解】** (1) 因为 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}C(R-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R C(R-\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{3}\pi R^3 C.$$

所以 $C=\dfrac{3}{\pi R^3}$.

(2) 当 $R=2$ 时，

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\pi}(2-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant 2^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

于是 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{3}{8\pi}(2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}.$$

## 题型五　求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论

**【点拨】** 1° 对于由试验给出的二维随机变量的分布，首先确定其可能取值，其次综合利用计算概率的各种方法进行计算；

若是已知 $(X,Y)$ 的联合分布律，计算满足某条件的概率，则先写出满足条件的 $(X,Y)$ 的可能值，然后将这些值的概率相加即得.

2° 对于由已知事件或随机变量给出的二维随机变量的分布，关键是将新的随机变量的取值转化为已知事件或随机变量的取值；

3° 对于由联合分布求边缘分布、条件分布，一般均直接利用公式计算；

若联合分布密度为 $\varphi(x,y)$，则边缘分布密度的求解程序为：

① 画出 $\varphi(x,y)$ 的存在区域 $D$；

② 若求对 $X$ 的边缘分布密度 $\varphi_X(x)$，则先写出 $X$ 的变化区间 $(a,b)$，然后在该区间内取一点，过该点自下向上画一条平行于 $y$ 轴的直线与区域 $D$ 相交，则先交者为下限，后交者为上限，最后求出积分，即

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_?^?\varphi(x,y)\mathrm{d}y, x\in(a,b).$$

③ 求对 $Y$ 的边缘概率密度 $\varphi_Y(y)$ 类似处理，即

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\int_?^?\varphi(x,y)\mathrm{d}x, y\in(c,d).$$

4° 随机变量的独立性，主要是离散型和连续型的情形，一般均按定义判别.

**【例 2.30】** 将一枚均匀硬币连掷三次，以 $X$ 表示三次试验中出现正面的次数，$Y$ 表示出现正面的次数与出现反面的次数的差的绝对值，求 $(X,Y)$ 的联合分布律.

**【分析】** 显然 $X$ 的可能取值为 0,1,2,3，而 $Y$ 的可能取值为 1,3，然后利用二项分布计算概率.

【解】因为$(X,Y)$的所有可能取值为$(0,3),(1,1),(2,1),(3,3)$，于是由二项概率公式易得

$$P(X=0,Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},$$

$$P(X=1,Y=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8},$$

$$P(X=2,Y=1)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8},$$

$$P(X=3,Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},$$

即$(X,Y)$的分布律为

| X \ Y | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/8 |
| 1 | 3/8 | 0 |
| 2 | 3/8 | 0 |
| 3 | 0 | 1/8 |

【例 2.31】设随机变量$X$在1,2,3,4四个整数中等可能地取值，另一随机变量$Y$在$1\sim X$中等可能地取一整数值，试求$(X,Y)$的分布律，$X,Y$的边缘分布律．

【解】$\{X=i,Y=j\}$的取值情况是：$i=1,2,3,4$，$j$是不大于$i$的正整数，由概率的乘法公式有

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i},i=(1,2,3,4;j\leqslant i).$$

于是$(X,Y)$的联合分布律，$X,Y$的边缘分布律见表2-4.

表 2-4

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 | $P\{Y=j\}=P_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{25}{48}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{13}{48}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{7}{48}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{48}$ |
| $P(X=i)=P_{i\cdot}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

注 直观上不难发现$X$与$Y$之间没有独立性，从而联合分布律一般均用乘法公式计算．

【例 2.32】一整数$n$等可能地在$1,2,3,\cdots,10$十个数中取一个值．设$d=d(n)$是这十个数中能整除$n$的正整数的个数，$F=F(n)$是能整除$n$的素数的个数，试求$d$与$F$的联合分布律．

【分析】本题的关键是弄清楚$d$与$F$的可能取值．经逐个验算可知$d$与$F$的取值分别为1,2,3,4与0,1,2，然后利用古典概率公式即可求出．

【解】经逐个验算可得10个整数的$d$与$F$的值见表2-5：

表 2-5

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(n)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |
| $F(n)$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |

于是有

$$P(d=1,F=0)=\frac{1}{10},P(d=1,F=1)=0,$$

$$P(d=1,F=2)=0,P(d=2,F=1)=\frac{4}{10}.$$

其他类似可得，故$(d,F)$的联合分布律见表 2-6.

| $F(n)$ \ $d(n)$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{10}$ |

**【例 2.33】**设某班车起点站上客人数 $X$ 服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为$p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立. 以 $Y$ 表示在中途下车的人数，求：

(1) 在发车时有 $n$ 个乘客的条件下，中途有 $m$ 人下车的概率；

(2) 二维随机变量$(X,Y)$的概率分布.

**【分析】**第(1)问为条件概率问题. 因每个乘客中途下车的概率均为 $p$，且下车与否相互独立，于是不难判断为一个 $n$ 重 Bernoulli 概型. 第(2)问求$(X,Y)$的概率分布，因显然为离散型随机变量，故只须求出联合分布律即可，要特别注意的是 $X$ 与 $Y$ 之间并没有独立性，从而宜用乘法公式计算.

**【解】**(1) $P(Y=m\mid X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n.$

(2)
$$\begin{aligned}P(X=n,Y=m)&=P(Y=m\mid X=n)P(X=n)\\&=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},(0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots).\end{aligned}$$

**【例 2.34】**设事件 $A,B$ 满足 $P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=P(A\mid B)=\frac{1}{2}.$

令
$$X=\begin{cases}1, & 若 A 发生\\0, & 若 A 不发生\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & 若 B 发生\\0, & 若 B 不发生\end{cases},$$

试求$(X,Y)$的联合分布律.

**【解】**因为 $P(A)=\frac{1}{4},\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2},$

故
$$P(AB)=\frac{1}{8},P(B)=\frac{1}{4}.$$

而
$$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{5}{8},$$

$$P(X=0, Y=1) = P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{8},$$

$$P(X=1, Y=0) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{8},$$

$$P(X=1, Y=1) = P(AB) = \frac{1}{8}.$$

故所求联合分布律为

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**【例 2.35】**某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & 若抽到 i 等品 \\ 0, & 其他 \end{cases}, \quad (i = 1,2,3)$$

试求：(1) 随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 的联合分布；

(2) 随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 的相关系数 $\rho_{X_1X_2}$.

**【解】**(1) 令 $A_i$ = "抽到 $i$ 等品"$(i=1,2,3)$. 由题意知 $A_1, A_2, A_3$ 两两互不相容. $P(A_1) = 0.8$, $P(A_2) = P(A_3) = 0.1$. 易见

$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = P(A_3) = 0.1$, $P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = P(A_2) = 0.1$,

$P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = P(A_1) = 0.8$, $P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = P(\varnothing) = 0$,

即

| $X_1$ \ $X_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 |
| 1 | 0.8 | 0 |

(2)

| $X_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.8 |

,

| $X_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.9 | 0.1 |

$E(X_1) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.8 = 0.8$, $E(X_2) = 0 \times 0.9 + 1 \times 0.1 = 0.1$,

$D(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = 0.16$, $D(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = 0.09$,

$E(X_1X_2) = 0 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.8 + 1 \times 1 \times 0 = 0$,

$\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0 - 0.8 \times 0.1 = -0.08$.

故 $X_1$ 与 $X_2$ 的相关系数为 $\rho = \dfrac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}} = \dfrac{-0.08}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.09}} = -\dfrac{2}{3}$.

注 本题由事件定义了三个随机变量 $X_1, X_2, X_3$，故也可求$(X_1, X_3)$或$(X_2, X_3)$的联合分布，读者不妨作为练习.

【例 2.36】设随机变量$(X,Y)$的密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

试求:(1)$(X,Y)$的分布函数; (2)$(X,Y)$的两个边缘分布密度;

(3)$(X,Y)$的两个条件密度;

(4) 概率$P(X+Y>1)$,$P(Y>X)$及$P\left(Y<\dfrac{1}{2}\mid X<\dfrac{1}{2}\right)$.

【解】(1) 分情况讨论.

(i) 当$x\leqslant 0$或$y\leqslant 0$时,

因为$\varphi(x,y)=0$,所以$F(x,y)=0$.

(ii) 当$0<x\leqslant 1,0<y\leqslant 2$时,

因为
$$\varphi(x,y)=x^2+\frac{1}{3}xy,$$

所以
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^x\int_0^y\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{12}x^2y^2.$$

(iii) 当$0<x\leqslant 1,y>2$时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^x\int_0^y\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^x\int_0^2\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^x\int_0^2\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}(2x+1)x^2.$$

(iv) 当$x>1,0<y\leqslant 2$时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\int_0^y\varphi(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^1\int_0^y\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{12}(4+y)y.$$

(v) 当$x>1,y>2$时,

$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^2\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^2\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)\mathrm{d}v=1.$$

综上所述,分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\text{ 或 }y\leqslant 0\\ \dfrac{1}{3}x^2y\left(x+\dfrac{y}{4}\right), & 0<x\leqslant 1,0<y\leqslant 2\\ \dfrac{1}{3}x^2(2x+1), & 0<x\leqslant 1,y>2\\ \dfrac{1}{12}y(4+y), & x>1,0<y\leqslant 2\\ 1, & x>1,y>2\end{cases}.$$

(2) 当$0\leqslant x\leqslant 1$时,

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}y=2x^2+\frac{2}{3}x,\text{故}$$

$$\varphi_X(x)=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\text{ 时}\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $0\leqslant y\leqslant 2$ 时，

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y,\quad \text{故}$$

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\leqslant y\leqslant 2\text{ 时}\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(3) 当 $0\leqslant y\leqslant 2$ 时，$X$ 关于 $Y=y$ 的条件密度为

$$\varphi(x\mid y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)}=\frac{6x^2+2xy}{2+y}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$Y$ 关于 $X=x$ 的条件密度为

$$\varphi(y\mid x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_X(x)}=\frac{3x+y}{6x+2}.$$

(4) 如图 2-6 所示，

$$P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\mathrm{d}y=\frac{65}{72}.$$

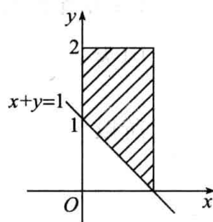



图 2-6

如图 2-7 所示，

$$P(Y>X)=\iint\limits_{y>x}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=\frac{17}{24}.$$

$$P\left(Y<\frac{1}{2}\,\middle|\,X<\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)}=\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{F_X\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{3}x^2y\left(x+\frac{y}{4}\right)\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}}{\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_X(x)\mathrm{d}x}=\frac{5}{32}.$$

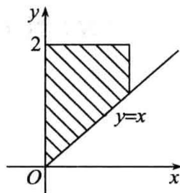



图 2-7

**【例 2.37】** 设随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases},$$

试求：(1) 条件概率密度 $\varphi(x\mid y),\varphi(y\mid x)$；

(2) $P\left(X>\frac{1}{2}\,\middle|\,Y>0\right)$.

**【解】** (1) 如图 2-8 所示，

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1\mathrm{d}x=1-y, & 0\leqslant y<1\\\int_{-y}^1\mathrm{d}x=1+y, & -1<y<0\\0, & \text{其他}\end{cases},$$

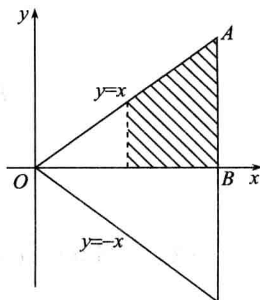



图 2-8

$$=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

于是,条件概率密度分别为

$$\text{对一切 } |y|<1,\varphi(x\mid y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

$$\text{对一切 } 0<x<1,\varphi(y\mid x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

$$(2)P\left(X>\frac{1}{2}\,\middle|\,Y>0\right)=\frac{P\left(X>\frac{1}{2},Y>0\right)}{P(Y>0)}=\frac{\text{图中阴影面积}}{\triangle AOB\text{ 的面积}}=\frac{3}{4}.$$

注 对 $|y|\geqslant 1$,条件密度 $\varphi(x\mid y)$ 不存在;对 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$,条件密度 $\varphi(y\mid x)$ 也不存在.

**【例 2.38】**设$(X,Y)$的密度函数为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & x>0,y>x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

试求:(1)$X,Y$ 的边缘密度函数,并判别其独立性;

(2)$(X,Y)$ 的条件概率密度;

(3)$P\{X>2\mid Y<4\}$.

**【解】**(1) 因为当 $x>0$ 时(如图 2-9 所示),

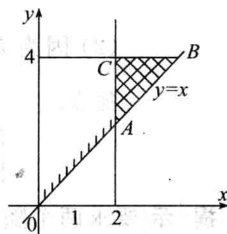


图 2-9

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x},$$

所以 $\varphi_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

$$\text{同理有 }\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y}, & \text{当 } y>0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}x=0, & \text{其他}\end{cases}.$$

因为 $\varphi(x,y)\neq\varphi_X(x)\varphi_Y(y)$,故 $X$ 与 $Y$ 不独立.

$$(2)\ \text{对一切 } x>0,\varphi(y\mid x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_X(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-y}, & y>x\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

$$\text{对一切 } y>0,\varphi(x\mid y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & y>x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

$$(3)P\{X>2\mid Y<4\}=\frac{P\{X>2,Y<4\}}{P\{Y<4\}}=\frac{\iint\limits_{\triangle ABC}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int\limits_{y<4}\varphi_Y(y)\mathrm{d}y}=\frac{\int_2^4\mathrm{d}x\int_x^4\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y}{\int_0^4 y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{e}^{-2}-3\mathrm{e}^{-4}}{1-5\mathrm{e}^{-4}}.$$

**【例 2.39】**已知随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 的概率分布

$$X_1\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix},X_2\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

而且 $P(X_1X_2=0)=1$.

(1) 求 $X_1$ 和 $X_2$ 的联合分布；

(2) 问 $X_1$ 和 $X_2$ 是否独立，为什么？

**【解】**(1) 由 $P(X_1X_2=0)=1$，有 $P(X_1X_2\neq 0)=0$，故

$$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0.$$

于是

$$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0,$$

所以，$X_1$ 和 $X_2$ 的联合分布见表 2-7.

表 2-7

| $X_2$ \ $X_1$ | -1 | 0 | 1 | $P(X_2=j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $P(X_1=i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

(2) 因为 $P\{X_1=0,X_2=0\}=0\neq P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，故 $X_1$ 与 $X_2$ 不独立.

## 题型六　求两个随机变量的简单函数的分布

**提示** 要求两个随机变量的函数 $g(X,Y)$ 的分布，本质上必须直接或间接给出 $(X,Y)$ 的联合分布，并且用定义法求解具有一般性，须重点掌握.

若已知 $(X,Y)$ 的联合密度为 $\varphi(x,y)$，$Z=g(X,Y)$，则 $Z$ 的密度可通过先求 $Z$ 的分布函数 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(g(x,y)\leqslant z)=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，然后求导而得 $Z$ 的密度函数 $\varphi_Z(z)=F'_Z(z)$，但要注意的是上面的二重积分一般要分情况讨论.

**【例 2.40】** 设 $(X,Y)$ 的分布律见表 2-8.

表 2-8

| $X$ \ $Y$ | −1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| −2 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |
| −1 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 |
| 0 | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

求 $Z=X+Y$ 的分布律.

**【分析】** 找出 $Z$ 的所有可能取值，并注意将相同的值进行合并，然后求出对应的概率.

【解】

| $P$ | $(X,Y)$ | $Z=X+Y$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{12}$ | $(-2,-1)$ | $-3$ |
| $\frac{2}{12}$ | $(-2,1)$ | $-1$ |
| $\frac{2}{12}$ | $(-2,2)$ | $0$ |
| $\frac{1}{12}$ | $(-1,-1)$ | $-2$ |
| $\frac{1}{12}$ | $(-1,1)$ | $0$ |
| $0$ | $(-1,2)$ | $1$ |
| $\frac{2}{12}$ | $(0,-1)$ | $-1$ |
| $\frac{1}{12}$ | $(0,1)$ | $1$ |
| $\frac{2}{12}$ | $(0,2)$ | $2$ |

故 $Z=X+Y$ 的分布律为

| $Z=X+Y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{4}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

**【例 2.41】**设两个独立的随机变量 $X$ 与 $Y$ 的分布律为

| $X$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| $P_i$ | 0.3 | 0.7 |

,

| $Y$ | 2 | 4 |
|---|---|---|
| $P_j$ | 0.6 | 0.4 |

.

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

**【解】**因为 $X$ 与 $Y$ 相互独立,所以 $P_{ij}=P_i\cdot P_j$.

于是联合分布律为

| $X \backslash Y$ | 2 | 4 |
|---|---|---|
| 1 | 0.18 | 0.12 |
| 3 | 0.42 | 0.28 |

因之

| $P_{ij}$ | $(X,Y)$ | $Z=X+Y$ |
|---|---|---|
| 0.18 | (1,2) | 3 |
| 0.12 | (1,4) | 5 |
| 0.42 | (3,2) | 5 |
| 0.28 | (3,4) | 7 |

故

| $Z=X+Y$ | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.18 | 0.54 | 0.28 |

【例 2.42】设 $X$ 和 $Y$ 是两个相互独立的随机变量,其概率密度分别为

$$\varphi_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases};\quad \varphi_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}.$$

试求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

【解】因为 $X$ 与 $Y$ 相互独立,所以联合密度为

$$\varphi(x,y)=\varphi_X(x)\varphi_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(1) 显然,当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

(2) 如图 2-10(a) 所示,当 $0\leqslant z<1$ 时,

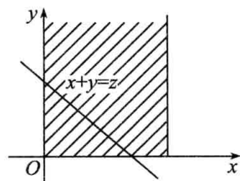
$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}e^{-y}\mathrm{d}y=z-1+e^{-z}.$$

(3) 如图 2-10(b) 所示,当 $z\geqslant 1$ 时,

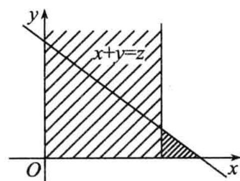
$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}\varphi(z,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}e^{-y}\mathrm{d}y=1+(1-e)e^{-z}.$$

故 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $\varphi_Z(z)=F'_Z(z)$,即

$$\varphi_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ (e-1)e^{-z}, & z\geqslant 1\end{cases}.$$



(a)



(b)

图 2-10

【例 2.43】设随机变量$(X,Y)$的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

试求 $Z=X-Y$ 的概率密度.

【解】如图 2-11 所示,当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_1}3x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}3x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^x 3x\mathrm{d}y+\int_z^1\mathrm{d}x\int_{x-z}^x 3x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3;$$

当 $z\geqslant 1$ 时,$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 3x\mathrm{d}y=1$.

故
$$\varphi_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z^2), & 0\leqslant z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

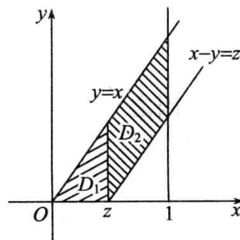


图 2-11

【例 2.44】设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立,且其概率密度分别为

$$\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, & 0<x<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

$$\varphi_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}, & 0<y<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

【解】由题意 $X$ 与 $Y$ 相互独立，于是$(X,Y)$ 的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\varphi_X(x)\varphi_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & 0<x<+\infty,\quad 0<y<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

如图 2-12 所示，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{Z\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^z\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=1-\mathrm{e}^{-z^2}.$$

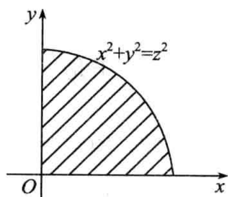



图 2-12

故，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为

$$\varphi_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 2z\mathrm{e}^{-z^2}, & z\geqslant 0\end{cases}.$$

【例 2.45】设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 3, 1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布，试求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

【解】由题设可知 $X$ 和 $Y$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 1\leqslant x\leqslant 3, 1\leqslant y\leqslant 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

设 $F(u)=P\{U\leqslant u\}(-\infty<u<\infty)$ 表示随机变量$U$的分布函数.
如图 2-13 所示，当 $u\leqslant 0$ 时，$F(u)=0$；当 $u\geqslant 2$ 时，$F(u)=1$；
当 $0<u<2$ 时，

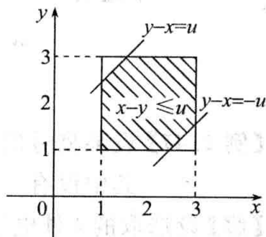



图 2-13

$$F(u)=\iint\limits_{|x-y|\leqslant u}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{|x-y|\leqslant u}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}[4-(2-u)^2]=1-\frac{1}{4}(2-u)^2.$$

故

$$p(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-u), & 0<u<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

【例 2.46】设随机变量$(X,Y)$ 的分布律见表 2-9.

表 2-9

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.01 | 0.03 | 0.05 | 0.07 | 0.09 |
| 1 | 0.01 | 0.02 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.08 |
| 2 | 0.01 | 0.03 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.06 |
| 3 | 0.01 | 0.02 | 0.04 | 0.06 | 0.06 | 0.05 |

试求：(1)$P\{X=2\mid Y=2\}$，$P\{Y=3\mid X=0\}$；(2)$V=\max(X,Y)$ 的分布律；

(3)$U=\min(X,Y)$ 的分布律； (4)$W=V+U$ 的分布律.

【解】(1) $P\{X=2\mid Y=2\}=\dfrac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\dfrac{P\{X=2,Y=2\}}{\sum\limits_{i=0}^{5}P\{X=i,Y=2\}}=\dfrac{0.05}{0.25}=\dfrac{1}{5}.$

类似有 $P\{Y=3\mid X=0\}=\dfrac{P\{Y=3,X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{0.01}{0.03}=\dfrac{1}{3}.$

(2) $P\{V=i\}=P\{\max(X,Y)=i\}=P\{X=i,Y<i\}+P\{X\leqslant i,Y=i\}$

$$=\sum_{k=0}^{i-1}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i\},i=0,1,\cdots,5,$$

于是

| $V=\max(X,Y)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0 | 0.04 | 0.16 | 0.28 | 0.24 | 0.28 |

(3) $P(U=i)=P\{\min(X,Y)=i\}=P\{X=i,Y\geqslant i\}+P\{X>i,Y=i\}$

$$=\sum_{k=i}^{3}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=i+1}^{5}P\{X=k,Y=i\},i=0,1,2,3,$$

于是

| $U=\min(X,Y)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.28 | 0.30 | 0.25 | 0.17 |

(4) 因为 $W=V+U=\max(X,Y)+\min(X,Y)=X+Y$,

于是有

| $W=V+U$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0 | 0.02 | 0.06 | 0.13 | 0.19 | 0.24 | 0.19 | 0.12 | 0.05 |

【例 2.47】设某型号的电子元件寿命(以小时计)近似服从 $N(160,20^2)$ 分布,随机选取 4 件,求其中没有一件寿命小于 180 h 的概率.

【解】设选取的 4 件电子元件的寿命分别为 $T_1,T_2,T_3,T_4,T_i\sim N(160,20^2)$, $i=1,2,3,4$,对应的分布函数为 $F(t)$, 令 $T=\min(T_1,T_2,T_3,T_4)$,由表 2-2 最后一栏有

$$F_{\min}(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-[1-F(t)]^4.$$

于是 $P\{T\geqslant 180\}=1-P\{T<180\}=[1-F(180)]^4.$

因为 $$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

其中,$\Phi(t)$ 为标准正态分布函数,此处 $\mu=160,\sigma=20$,

所以 $$P\{T\geqslant 180\}=\left[1-\Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)\right]^4$$
$$=[1-\Phi(1)]^4=(1-0.8413)^4=(0.1587)^4.$$

【例 2.48】对某种电子装置的输出测量了 5 次,得到的观察值 $X_1,X_2,X_3,X_4,X_5$,设它们是相互独立的变量,且都服从同一分布

$$F(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{8}}, & z\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

试求:$\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}>4$ 的概率.

【解】令 $V=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$,

由于 $X_1,X_2,X_3,X_4,X_5$ 相互独立，且服从同一分布，由表 2-2 最后一栏有

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^5,$$

所求概率
$$P\{V>4\}=1-P\{V\leqslant 4\}=1-F_{\max}(4)$$
$$=1-[F(4)]^5=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5.$$

注 最大(max)、最小(min) 函数是常用的两个特殊函数，须掌握其处理技巧.

## 第 3 节　思维定势与综合题解析

### 一、思维定势

**思维定势 1**　若题设中给出随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则马上联想到应用标准化 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 来处理有关问题.

**【例 2.49】** 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(2<X<4)=0.3$，则 $P(X<0)=$ ______.

**【解】** 
$$P(2<X<4)=P\left(\frac{2-2}{\sigma}<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{4-2}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)$$
$$=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0.5=0.3$$
$$\Rightarrow\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8.$$

故
$$P(X<0)=P\left(\frac{X-2}{\sigma}<\frac{0-2}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$$
$$=1-0.8=0.2.$$

**思维定势 2**　求二维随机变量 $(X,Y)$ 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$ 的问题，应该马上联想到先画出使联合概率密度 $f(x,y)\neq 0$ 的区域，然后定出 $X$ 的变化区间，再在该区间内画一条平行于 $y$ 轴的直线，先与区域边界相交的为 $y$ 的下限，后者为上限，

则 $f_X(x)=\begin{cases}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$. 而 $f_Y(y)$ 的求法类似.

**【例 2.50】** 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求：(1) $X$ 与 $Y$ 的边缘密度 $f_X(x),f_Y(y)$；(2) $X$ 与 $Y$ 是否相互独立？

**【解】** 使 $f(x,y)\neq 0$ 的区域如图 2-14 所示中 $D$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= 24\int_0^x (1-x)y\mathrm{d}y$$
$$= 12x^2(1-x).$$

故 $$f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

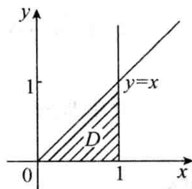


图 2-14

同理 $$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 24y(1-x)\mathrm{d}x, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

$$= \begin{cases} 12(1-y)^2, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

(2) 因为 $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$

所以 $X$ 与 $Y$ 不相互独立.

**思维定势 3** 欲求二维随机变量 $(X,Y)$ 满足条件 $Y \geqslant g(X)$[或 $Y \leqslant g(X)$] 的概率,应该马上联想到二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的计算,其积分域 $D$ 是由联合密度 $f(x,y) \neq 0$ 的平面区域及满足 $Y \geqslant g(X)$[或 $Y \leqslant g(X)$] 的区域的公共部分.

**【例 2.51】** 设甲船到达港口的时间均匀分布在 8 ~ 12 时,乙船到达港口的时间均匀分布在 7 ~ 9 时,两船到达的时间相互独立,求两船到达港口时间相差不超过 5 min 的概率.

**【解】** 设 $X,Y$ 分别表示甲、乙船到达港口的时间,由题设 $X,Y$ 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8 \leqslant x \leqslant 12 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 7 \leqslant y \leqslant 9 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

由于 $X,Y$ 相互独立,故 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{8} & 8 < x < 12, 7 < y < 9 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

5 min 即 $\frac{1}{12}$ h,故欲求的是 $P\left\{|X-Y| \leqslant \frac{1}{12}\right\}$,

画出 $f(x,y) \neq 0$ 的区域[$8 < x < 12, 7 < y < 9$] 及 $|x-y| \leqslant \frac{1}{12}$ 的区域,如图 2-15 所示,

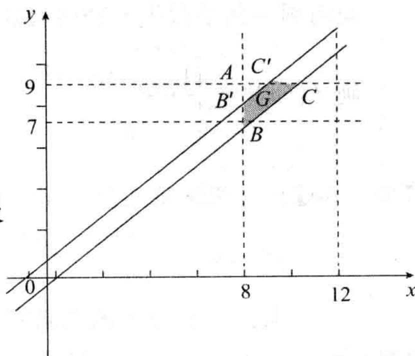


图 2-15

$$P\left\{|X-Y| \leqslant \frac{1}{12}\right\} = \iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{8} \times S_{G的面积}.$$

$S_{G的面积} = \triangle ABC$ 的面积 $- \triangle AB'C'$ 的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2$$
$$=\frac{1}{6}.$$

故
$$P\left\{|X-Y|\leqslant\frac{1}{12}\right\}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{48}.$$

## 二、综合题解析

**【例 2.52】** 假设一设备开机后无故障工作的时间 $X$ 服从指数分布，平均无故障工作的时间 $EX$ 为 5 h. 设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 h 便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 $Y$ 的分布函数 $F(y)$.

**【解】** 设 $X$ 的分布参数为 $\lambda$. 由于 $EX=\frac{1}{\lambda}=5$，可见 $\lambda=\frac{1}{5}$，显然，$Y=\min\{X,2\}$.

对于 $y<0$，$F(y)=0$；对于 $y\geqslant 2$，$F(y)=1$. 设 $0\leqslant y<2$，

有
$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}$$
$$=P\{X\leqslant y\}=1-e^{-\frac{y}{5}}.$$

于是，$Y$ 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\frac{y}{5}}, & 若\ 0\leqslant y<2.\\ 1, & 若\ y\geqslant 2\end{cases}$$

**【例 2.53】** 设 $X$ 与 $Y$ 是两个相互独立的随机变量，它们均匀地分布在 $(0,l)$ 内，试求方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率.

**【解】** 由题设 $X,Y$ 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0<x<l\\ 0, & 其他\end{cases};$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0<y<l\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

由于 $X,Y$ 相互独立，故 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{l^2}, & 0<x<l,0<y<l\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的条件为 $X^2-4Y\geqslant 0$，因此所求概率为 $P\{X^2-4Y\geqslant 0\}$，

（i）当 $l\leqslant 4$ 时，由图 2-16 有 $P\{X^2-4Y\geqslant 0\}=\int_0^l dx\int_0^{\frac{x^2}{4}}\frac{1}{l^2}dy=\frac{l}{12}$.

（ii）当 $l>4$ 时，$P\{X^2-4Y\geqslant 0\}=\int_0^l dy\int_{2\sqrt{y}}^l\frac{1}{l^2}dx=1-\frac{4}{3\sqrt{l}}$.

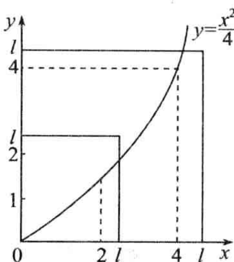



图 2-16

习 题 二

**1. 填空题.**

(1) 设随机变量 $X \sim B(2,p)$，$Y \sim B(3,p)$，若 $P(X \geqslant 1) = \frac{5}{9}$，则 $P(Y \geqslant 1) =$ ______.

(2) 已知随机变量 $X$ 只能取 $-1,0,1,2$ 四个数值，其相应的概率依次为 $\frac{1}{2c},\frac{3}{4c},\frac{5}{8c},\frac{2}{16c}$，则 $c =$ ______.

(3) 用随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 表示下述概率：

$P(X \leqslant a) =$ ______；　　$P(X = a) =$ ______；

$P(X > a) =$ ______；　　$P(x_1 < X \leqslant x_2) =$ ______.

(4) 设 $k$ 在 $(0,5)$ 上服从均匀分布，则方程 $4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$ 有实根的概率为______.

(5) 已知 $P\{X = k\} = \frac{a}{k}$，$P\{Y = -k\} = \frac{b}{k^2}$　$(k = 1,2,3)$，$X$ 与 $Y$ 独立，则 $a =$ ______，$b =$ ______，联合概率分布为______，$Z = X + Y$ 的概率分布为______.

(6) 已知 $(X,Y)$ 的联合密度为 $\varphi(x,y) = \begin{cases} c\sin(x+y), & 0 \leqslant x,y \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 $c =$ ______，$Y$ 的边缘概率密度 $\varphi_Y(y) =$ ______.

(7) 设平面区域 $D$ 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y = 0, x = 1, x = e^2$ 所围成，二维随机变量 $(X,Y)$ 在 $D$ 上服从均匀分布，则 $(X,Y)$ 关于 $X$ 的边缘密度在 $x = 2$ 处的值为______.

(8) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组简单随机样本，则 $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ 服从______.

(9) 如果 $(X,Y)$ 的联合分布律用下列表格给出，

| $(X,Y)$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(2,1)$ | $(2,2)$ | $(2,3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{3}$ | $\alpha$ | $\beta$ |

且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $\alpha =$ ______，$\beta =$ ______.

(10) 设 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| X \ Y | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $0$ |
| $3$ | $\frac{2}{12}$ | $0$ | $\frac{2}{12}$ |

则　① $Z = X + Y$ 的分布律______；　② $V = X - Y$ 的分布律______；

③ $U = X^2 + Y - 2$ 的分布律______.

**2. 单项选择题.**

(1) 如下四个函数哪个是随机变量 $X$ 的分布函数

A. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ \frac{1}{2}, & -2\leqslant x<0\\ 2, & x\geqslant 0\end{cases}$.  B. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi\\ 1, & x\geqslant \pi\end{cases}$.

C. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & x\geqslant \frac{\pi}{2}\end{cases}$.  D. $F(x)=\begin{cases}0, & x<\\ x+\frac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ 1, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$.  【  】

(2) $P(X=k)=c\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $(k=0,2,4,\cdots)$ 是随机变量的 $X$ 的概率分布，则 $\lambda,c$ 一定满足

A. $\lambda>0$.  B. $c>0$.  C. $c\lambda>0$.  D. $c>0$，且 $\lambda>0$.  【  】

(3) $X\sim N(1,1)$，概率密度为 $\varphi(x)$，则

A. $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)=0.5$.  B. $\varphi(x)=\varphi(-x),x\in(-\infty,+\infty)$.

C. $P(X\leqslant 1)=P(X\geqslant 1)=0.5$.  D. $F(x)=1-F(-x),x\in(-\infty,+\infty)$.

【  】

(4) $X,Y$ 相互独立，且都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，则服从区间或区域上的均匀分布的随机变量是

A. $(X,Y)$.  B. $X+Y$.  C. $X^2$.  D. $X-Y$.  【  】

(5) 设随机变量 $X$ 的分布律是

| $X$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $0$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

则 $Y=X^2$ 的分布律为

A.

| $Y=X^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $0$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

B.

| $Y=X^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{25}$ | $0$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{1}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |

C.

| $Y=X^2$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{25}$ | $\left(0+\frac{1}{25}\right)$ | $\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{25}\right)$ |

D.

| $Y=X^2$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

【  】

(6) 设函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$,则

A. $F(x)$ 是随机变量 $X$ 的分布函数.　　B. 不是分布函数.

C. 离散型分布函数.　　D. 连续型分布函数.　　【　】

(7) 设 $X,Y$ 是相互独立的两个随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$,则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数是

A. $F_Z(z)=\max\{F_X(x),F_Y(y)\}$.　　B. $F_Z(z)=\max\{|F_X(x)|,|F_Y(y)|\}$.

C. $F_Z(z)=F_X(x)F_Y(y)$.　　D. 都不是.　　【　】

(8) 设 $X,Y$ 是相互独立的随机变量,其分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$,则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数是

A. $F_Z(z)=F_X(x)$.　　B. $F_Z(z)=F_Y(y)$.

C. $F_Z(z)=\min\{F_X(x),F_Y(y)\}$.　　D. $F_Z(z)=1-[1-F_X(x)][1-F_Y(y)]$.

【　】

(9) 设 $X$ 的密度为 $\varphi(x)$,　而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,则 $Y=2X$ 的概率密度是

A. $\dfrac{1}{\pi(1+4x^2)}$.　　B. $\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$.　　C. $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.　　D. $\dfrac{1}{\pi}\arctan x$.　　【　】

(10) 设随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布密度为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,则

$Z=\dfrac{X+Y}{2}$ 的分布密度是

A. $\varphi_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.　B. $\varphi_Z(z)=\begin{cases}e^{-\frac{(x+y)}{2}}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

C. $\varphi_Z(z)=\begin{cases}4ze^{-2z}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$.　　D. $\varphi_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$.　　【　】

(11) 设两个相互独立的随机变量 $X$ 和 $Y$ 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则下列结论正确的是

A. $P\{X+Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.　　B. $P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.

C. $P\{X-Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.　　D. $P\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.　　【　】

(12) 设随机变量 $X$ 服从指数分布,则 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数是

A. 连续函数.　　B. 至少有两个间断点.

C. 阶梯函数.　　D. 恰好有一个间断点.　　【　】

**3. 证明题.**

(1) $X\sim N(a,\sigma^2)$,证明:$Y=\dfrac{X-a}{\sigma}$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$.

(2) 设 $X,Y$ 是相互独立的随机变量,它们分别服从参数为 $\lambda_1,\lambda_2$ 的泊松分布,证明:$Z=X+Y$

服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

(3) 设 $F(x)$ 是分布函数,证明:对于任意 $h\neq 0$,函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}F(t)\mathrm{d}t$ 也是分布函数.

**4. 计算题.**

(1) 向目标相互独立地射击 5 次,每次命中目标的概率为 0.6,求命中目标的次数 $X$ 的分布密度.

(2) 某射击手有 5 发子弹,射击一次命中率为 0.9,如果他命中目标就停止射击,命不中就一直射击到用完 5 发子弹,求所用子弹数 $X$ 的分布密度.

(3) 设随机变量 $X$ 的分布密度为 $\varphi(x)=A\mathrm{e}^{-x^2+x}$,求 $A$.

(4) 设一批产品中有 10 件正品,3 件次品,现一件一件地随机取出,分别求出在下列各情形中直到取得正品为止所需次数 $X$ 的分布密度.

① 每次取出的产品不放回;② 每次取出的产品经检验后放回,再抽取;③ 每次取出一件产品后再放回一件正品,然后再抽取.

(5) 随机变量 $X$ 的密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

求:① 常数 $c$;② $X$ 落在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 内的概率.

(6) 随机变量 $X$ 的分布密度为

① $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$  ② $\varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 ①,② 的分布函数 $F(x)$.

(7) 设测量从某地到某一目标的距离时带有的随机误差 $X$ 具有分布密度函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-20)^2}{3200}\right),\quad -\infty<x<+\infty.$$

试求:① 测量误差的绝对值不超过 30 的概率;

② 接连测量三次,每次测量相互独立进行,则至少有一次误差的绝对值不超过 30 的概率.

(8) 设电子元件的寿命 $X$ 具有密度

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & 100<x\\ 0, & x\leqslant 100\end{cases},$$

问在 150 h 内,① 三只元件中没有一只损坏的概率是多少?② 三只电子元件全损坏的概率是多少?③ 只有一个电子元件损坏的概率又是多少?

(9) 对圆片直径进行测量,其值在[5,6]上均匀分布,求圆片面积的概率分布.

(10) 设 $X$ 分别为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,$[0,\pi]$ 及 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布变量,求 $Y=\sin X$ 的密度函数.

(11) 已知 $X$ 服从参数为 $p=0.6$ 的 $0-1$ 分布,在 $X=0$,$X=1$ 下,关于 $Y$ 的条件分布分别见表 2-10 和表 2-11:

表 2-10

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(Y \mid X=0)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

表 2-11

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(Y \mid X=1)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

求$(X,Y)$的联合概率分布，以及在$Y \neq 1$时，关于$X$的条件分布.

(12) 设随机变量$X$与$Y$相互独立，并在区间$[0,9]$上服从均匀分布，求随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布密度.

(13) 设$X$与$Y$相互独立，分布密度分别为

$$\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x<0\end{cases};\quad \varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y \geqslant 0 \\ 0, & y<0\end{cases}.$$

求随机变量$Z=X+Y$的分布密度.

(14) 设$X,Y$相互独立，且在$[0,1]$上均匀分布，试求使方程$x^2+2Xx+Y=0$有实根的概率.

(15) 设$(X,Y)$的密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}24y(1-x-y), & x>0,y>0,x+y<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：① $\varphi_X(x),\varphi\{y \mid x\},\varphi\left\{y \mid x=\frac{1}{2}\right\}$；② $\varphi_Y(y),\varphi\{x \mid y\},\varphi\left\{x \mid y=\frac{1}{2}\right\}$.

(16) 假设随机变量$Y$服从参数为$\lambda=1$的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & Y \leqslant k, \\ 1, & Y>k.\end{cases}\quad k=1,2,$$

求：①$X_1$和$X_2$的联合概率分布；②$E(X_1+X_2)$.

## 参考答案

1. (1) $\frac{19}{27}$.

(2) $c=2$.

(3) $P(X \leqslant a)=F(a),P(X=a)=P(X \leqslant a)-P(X<a)=F(a)-F(a-0)$,
$P(X>a)=1-F(a),P(x_1<X \leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

(4) 0.6.

(5) $a=\frac{6}{11},b=\frac{36}{49}$,

| $X$ \ $Y$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $ab$ | $\frac{ab}{4}$ | $\frac{ab}{9}$ |
| 2 | $\frac{ab}{2}$ | $\frac{ab}{8}$ | $\frac{ab}{18}$ |
| 3 | $\frac{ab}{3}$ | $\frac{ab}{12}$ | $\frac{ab}{27}$ |

| $Z$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $24\alpha$ | $66\alpha$ | $251\alpha$ | $126\alpha$ | $72\alpha$ |

$\left(\alpha=\frac{1}{539}\right)$.

(6) $c=\sqrt{2}+1,\varphi_Y(y)=(\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\left(y+\frac{\pi}{8}\right)\quad\left(0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$.

(7) $\frac{1}{4}$.　　(8) $N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{\mu}\right)$.　　(9) $\alpha=\frac{2}{9},\beta=\frac{1}{9}$.

(10) ①

| $X+Y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

②

| $X-Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

③

| $X^2+Y-2$ | $-\frac{15}{4}$ | $-3$ | $-\frac{11}{4}$ | $-2$ | $-1$ | $5$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

**2.** (1)C　(2)B　(3)C　(4)A　(5)D　(6)B　(7)C　(8)D　(9)B　(10)C　(11)B　(12)D

**3.** 略.

**4.** (1)

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | $\frac{40}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{32}{243}$ |

(2)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.9 | 0.09 | 0.009 | 0.0009 | 0.0001 |

(3) $A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$.

(4) ①

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{10}{13}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{12}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}$ |

② $P\{X=k\}=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\left(\frac{10}{13}\right)$.

③

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{10}{13}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{13}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{12}{13}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{13}\cdot 1$ |

(5) ① $c=\frac{1}{\pi}$.　② $\frac{1}{3}$.

(6) $$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ \frac{x}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-\frac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

(7)①0.4931. ②0.87.

(8)① $\frac{8}{27}$. ② $\frac{1}{27}$. ③ $\frac{4}{9}$.

(9) $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<\frac{25}{4}\pi,\\ \sqrt{\frac{4y}{\pi}}-5, & \frac{25}{4}\pi\leqslant y<9\pi,\\ 1, & y\geqslant 9\pi.\end{cases}$ $\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \frac{25}{4}\pi\leqslant y\leqslant 9\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(10) $\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(11)

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |
| 1 | 0.3 | 0.1 | 0.2 |

,

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P (Y ≠ 1) | 0.5 | 0.5 |

(12) $\varphi_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2z^2}, & z\geqslant 1.\end{cases}$

(13) $\varphi_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{6}}), & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

(14) $P(X^2-Y\geqslant 0)=\frac{1}{3}$.

(15) ① $\varphi_X(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$\varphi(y\mid x)=\begin{cases}\frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3}, & x>0,y>0,x+y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\varphi(y\mid x=\frac{1}{2})=\begin{cases}24y(1-2y), & 0<y<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

② $\varphi_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$\varphi(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{2(1-x-y)}{(1-y)^2}, & x>0, y>0, x+y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$\varphi(x\mid y=\frac{1}{2})=\begin{cases}8(\frac{1}{2}-x), & 0<x<\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(16) ①

| $X_1$ \ $X_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $1-e^{-1}$ | 1 |
| 1 | $e^{-1}-e^{-2}$ | $e^{-2}$ |

② $E(X_1+X_2)=e^{-1}+e^{-2}$.

# 第三章　随机变量的数字特征

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、一维随机变量的数字特征(见表3-1)

表 3-1

<table>
<tr><th></th><th>$X$ 为离散型随机变量</th><th>$X$ 为连续型随机变量</th></tr>
<tr><td rowspan="2">数学期望<br>(平均值)$E(X)$</td><td>(1) $X$ 的分布<br>$\begin{array}{c|ccc} X & x_1 & x_2\cdots & x_i\cdots \\ \hline P & p_1 & p_2\cdots & p_i\cdots \end{array}$,<br>$\mathrm{E}(X)=\sum\limits_i x_i p_i$<br>(2) 随机变量函数 $Y=f(X)$,<br>$\mathrm{E}(Y)=\sum\limits_i f(x_i)p_i$<br>(绝对收敛)</td><td>(1) $X$ 的密度函数 $\varphi(x)$,<br>$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x$<br>(2) 随机变量函数 $Y=f(X)$,<br>$\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$<br>(绝对收敛)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{E}(X)$ 的性质<br>(1)$\mathrm{E}(C)=C$　($C$ 为常数)<br>(2)$\mathrm{E}(CX)=C\mathrm{E}(X)$<br>(3)$\mathrm{E}(X+C)=\mathrm{E}(X)+C$<br>(4)$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$<br>(5) 若 $X$ 与 $Y$ 相互独立,则 $\mathrm{E}(XY)=(\mathrm{E}X)\cdot(\mathrm{E}Y)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">方差<br>$\mathrm{D}(X)$<br><br>标准差<br>$\sqrt{\mathrm{D}(X)}$</td><td colspan="2">$\mathrm{D}(X)\triangleq\mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X)$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{D}(X)=\sum\limits_i(x_i-\mathrm{E}X)^2p(x_i)$</td><td>$\mathrm{D}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathrm{E}X)^2\varphi(x)\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{D}(X)$ 的性质<br>(1)$\mathrm{D}(C)=0$　($C$ 为常数)<br>(2)$\mathrm{D}(C+X)=\mathrm{D}(X)$<br>(3)$\mathrm{D}(CX)=C^2\mathrm{D}(X)$<br>(4) 若 $X$ 与 $Y$ 相互独立,则 $\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)$</td></tr>
</table>

续表

| | X 为离散型随机变量 | X 为连续型随机变量 |
| --- | --- | --- |
| 矩 | X 的 $k$ 阶原点矩 $\upsilon_k$ 为 $\upsilon_k = \mathrm{E}(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i$<br>X 的 $k$ 阶中心矩 $\mu_k$ 为 $\mu_k = \mathrm{E}(X-\upsilon_k)^k = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\upsilon_k)^k p_i$ | X 的 $k$ 阶原点矩 $\upsilon_k$ 为 $\upsilon_k = \mathrm{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\mathrm{d}x$<br>X 的 $k$ 阶中心矩 $\mu_k$ 为 $\mu_k = \mathrm{E}(X-\upsilon_k)^k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\upsilon_k)^k\varphi(x)\mathrm{d}x$,<br>其中,$\varphi(x)$ 为密度函数 |

**【例 3.1】**设随机变量 $X$ 服从二项分布 $B(n,p)$,试求 $Y = a^X - 3$ 的数学期望 $\mathrm{E}(Y)$,其中 $a > 0$.

**【分析】**$Y$ 为 $X$ 的函数,一般直接利用函数期望公式进行计算.

**【解】**因 $X$ 的分布律为

$$P(X=k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n,$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(a^X - 3) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(a^k-3)\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k (ap)^k (1-p)^{n-k} - 3\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= [1+(a-1)p]^n - 3.\end{aligned}$$

注 计算中用到了分布律的"归 1"性:$\sum_i p_i = 1$ 以及 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$.

**【例 3.2】**已知连续型随机变量 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1},$$

则 $X$ 的数学期望为 $\mathrm{E}(X) =$ ________;  $X$ 的方差 $\mathrm{D}(X) =$ ________.

**【解】**因为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}},$$

所以

$$\mathrm{E}(X) = 1,\quad \mathrm{D}(X) = \frac{1}{2}.$$

注 连续型随机变量的期望,方差的计算常用公式计算,但有时利用已有的重要分布的期望和方差进行计算能大为简化,故应掌握几个重要分布的期望和方差.

## 二、二维随机变量的数字特征(表 3-2)

表 3-2

| | $(X,Y)$ 为离散型随机变量 | $(X,Y)$ 为连续型随机变量 |
|---|---|---|
| 已知二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布律或联合密度 | 设 $(X,Y)$ 的联合分布律为<br>$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$<br>$(i,j=1,2,\cdots)$<br>则 $E(X)=\sum_i x_i p_i$<br>$=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}$<br>$E(Y)=\sum_j y_j p_j$<br>$=\sum_i\sum_j y_j p_{ij}$<br>$D(X)=\sum_i\sum_j [x_i-E(X)]^2 p_{ij}$<br>$D(Y)=\sum_i\sum_j [y_j-E(Y)]^2 p_{ij}$ | 设 $(X,Y)$ 的联合密度为 $\varphi(x,y)$ 则<br>$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x,y)dxdy$<br>$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_Y(y)dy$<br>$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x,y)dxdy$<br>$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2\varphi_X(x)dx$<br>$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2\varphi(x,y)dxdy$<br>$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}[y-E(Y)]^2\varphi_Y(y)dy$<br>$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[y-E(Y)]^2\varphi(x,y)dxdy$ |
| 二维随机变量 $(X,Y)$ 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望 | 设 $(X,Y)$ 的联合分布律为<br>$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$<br>$(i,j=1,2,\cdots)$<br>则 $E[g(X,Y)]$<br>$=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$<br>(级数绝对收敛) | 设 $(X,Y)$ 的联合密度为 $\varphi(x,y)$<br>则<br>$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\varphi(x,y)dxdy$<br>(二重广义积分绝对收敛) |
| 协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$ | $\mathrm{cov}(X,Y)$<br>$=E[(X-EX)(Y-EY)]$<br>$=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$ | 性质:<br>(1) $\mathrm{cov}(X,X)=D(X)$<br>(2) $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$<br>(3) $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$<br>(4) $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$ |
| 相关系数 $\rho_{XY}$ | $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$<br>$=\dfrac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$ | 性质:<br>(1) $-1\leqslant\rho_{XY}\leqslant 1$<br>(2) 若 $X,Y$ 相互独立,则 $\rho_{XY}=0$<br>(3) $\lvert\rho\rvert=1\Leftrightarrow X$ 与 $Y$ 以概率 1 线性相关,即 $\exists$ 常数 $a,b$ 且 $a\neq 0$,使<br>$P\{X=aY+b\}=1$ |
| $(X,Y)$ 的协方差矩阵 | $(X,Y)$ 的协方差矩阵 $\triangleq\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$<br>其中,$c_{11}=E[(X-EX)^2]$ $c_{12}=E[(X-EX)(Y-EY)]$<br>$c_{21}=E[(Y-EY)(X-EX)]$ $c_{22}=E[(Y-EY)^2]$ | |

**【例 3.3】** 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 上服从均匀分布.

(1) $X$ 与 $Y$ 是否独立?

(2) 求 $X$ 和 $Y$ 的相关系数 $\rho(X,Y)$.

**【解】**(1) 易知 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是易得两个边缘密度为

$$\varphi_X(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & |x|<R;\end{cases}$$

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & |y|<R\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

故有 $\varphi(x,y)\neq\varphi_X(x)\varphi_Y(y)$,即 $X$ 与 $Y$ 不独立.

(2) 因 $\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}},\operatorname{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(X,Y)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$,

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}x\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=0,$$

$$\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}y\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y=0,$$

$$\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xy\frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故 $\rho(X,Y)=0$,即 $X$ 与 $Y$ 不相关.

注 从本例可以看出,两个不相关的随机变量可以不独立,但我们知道独立一定不相关.

## 三、几种重要的数学期望与方差(表 3-3)

表 3-3

| 分布 | 分布律或概率密度 | 数学期望 | 方差 |
|---|---|---|---|
| 1. (0-1) 分布 | $P(X=k)=p^kq^{1-k},k=0,1$<br>$0<p<1,p+q=1$ | $p$ | $pq$ |
| 2. 二项分布 | $P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$<br>$0<p<1,p+q=1$ | $np$ | $npq$ |
| 3. 泊松分布 | $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$<br>$k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| 4. 正态分布 | $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$<br>$-\infty<x<+\infty,\sigma>0$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| 5. 均匀分布 | $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |

续表

| 分布 | 分布律或概率密度 | 数学期望 | 方差 |
|---|---|---|---|
| 6. 指数分布 | $\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda>0), & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $\lambda$ 为参数 | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| 7. 超几何分布 | $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $0\leqslant k\leqslant n\leqslant N, k\leqslant M$ | $n\frac{M}{N}$ | $n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$ |
| 8. 几何分布 | $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\cdots,0<p<1$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |

## 四、重要公式与结论

1. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)$,

特别当 $X$ 与 $Y$ 独立时,$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

2. $\mathrm{cov}(X,Y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \rho(X,Y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad E(XY)=E(X)E(Y)$

$\Leftrightarrow\quad D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

3. $X$ 与 $Y$ 独立 $\Rightarrow$ $\rho(X,Y)=0$,即 $X$ 与 $Y$ 不相关,但反过来不正确.

4. 若$(X,Y)$服从二维正态分布,则

$X$ 与 $Y$ 独立 $\Leftrightarrow$ $X$ 与 $Y$ 不相关.

5. 求期望和方差时几个常用的公式:

(1) $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-q}$. $(|q|<1)$

(2) $a+2aq+3aq^2+\cdots+naq^{n-1}+\cdots=\frac{a}{(1-q)^2}$. $(|q|<1)$

(3) $a+2^2aq+3^2aq^2+\cdots+n^2aq^{n-1}+\cdots=\frac{a(1+q)}{(1-q)^3}$. $(|q|<1)$

(4) $1+\lambda+\frac{1}{2!}\lambda^2+\cdots+\frac{1}{n!}\lambda^n+\cdots=e^{\lambda}$.

(5) $\Gamma-$函数的性质:$\Gamma(\gamma+1)=\gamma\Gamma(\gamma)$,其中,$\Gamma(\gamma)=\int_0^{+\infty}x^{\gamma-1}e^{-x}dx$. $(\gamma>0)$

(6) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

# 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

## 题型一　求一维随机变量的数字特征

**提示** 这类题型主要是求期望和方差,其常用方法有:

1° 为分布律或密度已知的情形,直接按定义计算,对由试验给出的随机变量,先求分布,再按定义计算;

2° 利用期望、方差的性质以及常见分布的期望和方差进行计算；

3° 对较复杂的随机变量，将其分解为简单随机变量进行计算.

**【例 3.4】** 设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

求 $\mathrm{E}(X)$ 及 $\mathrm{D}(X)$.

**【解】** $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$

$\left(\text{因为}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\text{为偶函数},x\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\text{为奇函数,由奇偶函数积分的性质,所以}\mathrm{E}(X)=0\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mathrm{E}(X)]^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2)\Big|_0^{+\infty}=2.\end{aligned}$$

**【例 3.5】** 已知随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \frac{x}{4}, & 0<x\leqslant 4,\\ 1, & x>4\end{cases}$

求 $\mathrm{E}(X)$，$\mathrm{D}(X)$.

**【解】** 随机变量 $X$ 的分布密度为

$$\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{x}{4}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{8}\Big|_0^4=2;$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4=\frac{16}{3};$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}.$$

**【例 3.6】** 设从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，设在各交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，其概率均为 $\frac{2}{5}$，试求途中遇到红灯次数的数学期望.

**【分析】** 因分布未给出，因此须先由试验写出分布律，然后再计算.

**【解】** 令 $X$ 表示途中遇到的红灯次数，于是

$$X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right).$$

即 $X$ 的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{27}{125}$ | $\frac{54}{125}$ | $\frac{36}{125}$ | $\frac{8}{125}$ |

从而
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{3}kP(X=k)=\frac{6}{5}.$$

当然，也可由二项分布的期望直接得到，即

$$\mathrm{E}(X)=np=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}.$$

**【例 3.7】**按规定某车站每天 8:00 ～ 9:00，9:00 ～ 10:00 都恰有一辆客车到站，各车到站时刻是随机的，且各车到站的时间相互独立，其规律为

| 到站时间 | 8:10<br>9:10 | 8:30<br>9:30 | 8:50<br>9:50 |
|---|---|---|---|
| 概　率 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

一旅客 8:20 到车站，求他候车时间的数学期望及方差.

**【解】**该旅客乘 9:10 的车，意味着 8:00 ～ 9:00 这趟车在 8:10 开走了. 他候车时间为 50 min，对应的概率为"第一趟车 8:10 开走，第二趟车 9:10 开，两事件同时发生的概率"，即

$$P\{X=50\}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}.$$

他候车 70 min，90 min 对应的概率类似处理. 于是候车时间的分布律为：

| $X$ | 10 | 30 | 50 | 70 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$ |

故　$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{2}{5}+30\times\frac{2}{5}+50\times\frac{1}{25}+70\times\frac{2}{25}+90\times\frac{2}{25}=30.8(\mathrm{min})$，

$$\mathrm{E}(X^2)=(10)^2\times\frac{2}{5}+(30)^2\times\frac{2}{5}+(50)^2\times\frac{1}{25}+(70)^2\times\frac{2}{25}+(90)^2\times\frac{2}{25}=1540,$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=1540-(30.8)^2=591.36.$$

**【例 3.8】**对某目标进行射出，直到击中为止，如果每次命中率为 $p$，求射击次数的数学期望及方差.

**【解】**设射击次数为随机变量 $X$，其分布律为

| $X$ | 1 | 2 | 3 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $pq$ | $pq^2$ | … | $pq^{n-1}$ | … |

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times p+2\times pq+3\times pq^2+\cdots+n\times pq^{n-1}+\cdots\\&=p(1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}+\cdots)\xlongequal{\text{由公式(2)}}\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}(\text{因为}1-q=p),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=1^2\times p+2^2\times pq+3^2\times pq^2+\cdots+n^2pq^{n-1}+\cdots\\&=p(1^2+2^2q+3^2q^2+\cdots+n^2q^{n-1}+\cdots)\xlongequal{\text{由公式(3)}}p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3}=p\cdot\frac{2-p}{p^3}=\frac{2-p}{p^2},\end{aligned}$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}X)^2=\frac{2-p}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1-p}{p^2}.$$

**【例 3.9】**某人用 $n$ 把钥匙去开门，只有一把能打开，今逐个任取一把试开，求打开此门所需开门

次数 $X$ 的均值及方差,假设(1) 打不开的钥匙不放回;(2) 打不开的钥匙仍放回.

【解】(1) 在打不开门的钥匙不放回的情况下,所需开门次数 $X$ 的可能值为 $1,2,\cdots,n$,注意到 $X=i$ 意味着从第一次到第 $i-1$ 次均未能打开,第 $i$ 次才打开,于是随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+\cdots+n\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{n+1}{2},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{n}+2^2\times\frac{1}{n}+\cdots+n^2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}X)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}(n+1)(n-1).$$

(2) 由于试开不成功,钥匙仍放回,可知 $X$ 可取值为 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 其分布律为

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ | $i$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}$ | $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$ | $\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\frac{1}{n}$ | | $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}$ | $\cdots$ |

故 $$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}+3\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+i\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n}\left[1+2\,\frac{n-1}{n}+3\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+i\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}+\cdots\right]$$

$$\xlongequal[\text{此处 } q=\frac{n-1}{n}]{\text{由公式(2)}}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=n,$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{n}+2^2\times\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n}+3^2\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+i^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n}\left[1+2^2\,\frac{n-1}{n}+3^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+i^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}+\cdots\right]$$

$$\xlongequal[\text{此处 } q=\frac{n-1}{n}]{\text{由公式(3)}}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{n-1}{n}}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^3}=n^2\left(1+\frac{n-1}{n}\right),$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}X)^2=n^2\left(1+\frac{n-1}{n}\right)-n^2=n(n-1).$$

【例 3.10】已知离散型随机变量 $X$ 服从参数为 2 的泊松分布,即 $P(X=k)=\frac{2^k}{k!}\mathrm{e}^{-2}$,$k=0,1,2,\cdots$,则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $\mathrm{E}(Z)=$ ______.

【解】因为 $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}(3X-2)=3\mathrm{E}(X)-2$,而 $\mathrm{E}(X)=2$,

所以 $\mathrm{E}(Z)=3\times2-2=4$.

注 直接利用已知的泊松分布的期望计算.

【例 3.11】设某人先写了 $n$ 封投向不同地址的信，再写 $n$ 个标有这 $n$ 个地址的信封，然后在每个信封内随意装入一封信，试求信与地址配对的个数的数学期望与方差.

【分析】本题是一个"配对问题"，若用先求分布再按定义计算的方法将是非常麻烦的，下面将用数学期望性质来做. 其重要技巧是将一个较复杂的随机变量转化成简单随机变量的和.

【解】设 $X$ 表示配对的个数，$X_i$ 定义如下

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 封信配对} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}, i = 1,2,\cdots,n.$$

于是有 $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, P(X_i = 1) = \frac{1}{n}, P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

因为 $$\mathrm{E}(X_i) = 1 \times \frac{1}{n} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

故 $$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = 1.$$

下面我们来求方差. 求方差时一定要注意的是 $X_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 之间没有独立性，因而不能认为有 $\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(X_1) + \mathrm{D}(X_2) + \cdots + \mathrm{D}(X_n)$.

因为 $\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$，而

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \mathrm{E}[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{E}(X_i X_j), \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(X_i^2) = 1^2 \times \frac{1}{n} + 0^2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

因为随机变量 $X_i X_j (i \neq j)$ 的可能取值为 1 和 0，且

$$P(X_i X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}, P(X_i X_j = 0) = 1 - \frac{1}{n(n-1)},$$

故有 $$\mathrm{E}(X_i X_j) = 1 \times \frac{1}{n(n-1)} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{n(n-1)}\right) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

于是 $$\mathrm{E}(X^2) = n \times \frac{1}{n} + 2\mathrm{C}_n^2 \times \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$

所以 $$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

【例 3.12】某流水作业线上生产出的每个产品为不合格的概率是 $p$，当生产出 $k$ 个不合格品时，即停工检修一次，试求在两次检修之间所生产的产品总数的数学期望和方差.

【解】设 $X$ 表示两次检修之间生产的产品数，$X_i$ 表示生产出第 $i-1$ 个不合格品后至出现第 $i$ 个不合格品时所生产的产品数，则有 $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$，$X_1, X_2, \cdots, X_k$ 独立同分布服从几何分布：

$$P(X_i = j) = (1-p)^{j-1} p, j = 1,2,\cdots.$$

因为 $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{p}, \mathrm{D}(X_i) = \frac{1-p}{p^2}, (i = 1,2,\cdots,k)$. 故

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{p},$$

$$\mathrm{D}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{D}(X_i) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

## 题型二　求一维随机变量函数的数学期望

**提示** 求随机变量函数的期望一般不需先求出随机变量函数的分布，再按定义计算，而是直接用函数期望公式进行计算：$E(Y)=\sum_i g(x_i)p_i$ 或 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi_X(x)\mathrm{d}x$，这里 $Y=g(X)$. 另外要注意随机变量函数的方差或其矩本质上就是函数的期望.

**【例 3.13】** 设随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |

求：(1)$E(-X+1)$，　$D(-X+1)$；　(2)$E(X^2)$，　$D(X^2)$.

**【解】**

| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
| $-X+1$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $X^2$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $4$ |

(1) $E(-X+1)=2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{12}+(-1)\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$.

$$D(-X+1)=DX=E(X^2)-[E(X)]^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\times1+\frac{1}{6}\times0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times4-\left[\frac{1}{3}\times(-1)+\frac{1}{6}\times0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\times1+\frac{1}{4}\times2\right]^2=\frac{97}{72}.$$

(2) $E(X^2)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{6}\times0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times4=\frac{35}{24}$.

$$D(X^2)=\left(\frac{5}{12}\times1+\frac{1}{6}\times0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\times16\right)-\left(\frac{35}{24}\right)^2=\frac{1325}{576}.$$

**【例 3.14】** 设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的指数分布，则数学期望 $E(X+e^{-2X})=$ ______.

**【解】** 由题设可知 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}.$$

$$E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}e^{-3x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

**【例 3.15】** 假设公共汽车起点站于每时的 10 分，30 分，50 分发车，某乘客不知发车的时间，在每小时内任一时刻到达车站是随机的，求乘客到车站等车时间的数学期望.

【解】由于乘客在每小时内任一时刻到达车站是随机的，因此可以认为乘客到达车站的时刻 $X$ 为[0,60]中的均匀分布，于是其概率密度为

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0<t\leqslant 60\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

显然，乘客等候时间 $Y$ 是其到达时刻 $X$ 的函数，可用如下公式表示：

$$Y=g(X)=\begin{cases}10-X, & 0<X\leqslant 10\\ 30-X, & 10<X\leqslant 30\\ 50-X, & 3<X\leqslant 50\\ 60-X+10, & 50<X\leqslant 60\end{cases},$$

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{10}(10-t)\cdot\frac{1}{60}\mathrm{d}t+\int_{10}^{30}(30-t)\frac{1}{60}\mathrm{d}t+\int_{30}^{50}(50-t)\frac{1}{60}\mathrm{d}t+\int_{50}^{60}(70-t)\frac{1}{60}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{60}[(100-50)+(600-400)+(1000-800)+(700-550)]=\frac{25}{3}.\end{aligned}$$

**【例 3.16】**对圆的直径作近似测量，设其值均匀地分布在区间$[a,b]$内，求圆面积的数学期望.

**【解】**设圆的直径为随机变量 $X$，面积为随机变量 $Y$，则

$$Y=f(X)=\frac{\pi}{4}X^2.$$

随机变量 $X$ 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

于是 $E(Y)=E(f(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\pi}{4}x^2\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}(b^2+ab+a^2)$.

**【例 3.17】**设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求随机变量 $Y=f(X)=X^2$ 的方差 $D(Y)$.

**【解】**$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-2$;

$$\begin{aligned}E(X^4)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4\cos x\mathrm{d}x\\&=(x^4\sin x+4x^3\cos x-12x^2\sin x-24x\cos x+24\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24,\end{aligned}$$

$$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24-\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-2\right]^2=20-2\pi^2.$$

**【例 3.18】**设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

已知 $E(X)=0.5$，$D(X)=0.15$，求系数 $a,b,c$.

【解】因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$,所以$\int_{0}^{1}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=1$. 于是

$$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=1. \quad ①$$

又 $$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x,$$

故 $$\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=0.5. \quad ②$$

再 $$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}X^2-(\mathrm{E}X)^2,\qquad 0.15=\mathrm{E}X^2-0.5^2,$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}X^2=0.4=\int_{0}^{1}x^2(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c=0.4. \quad ③$$

解方程组 ①,②,③ 得 $a=12,\quad b=-12,\quad c=3.$

注 已知数字特征可反求未知参数,但要注意密度函数的隐含性质$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$.

## 题型三　求二维随机变量及其函数的数字特征

提示 二维随机变量$(X,Y)$的数字特征主要指$\mathrm{E}(X),\mathrm{E}(Y),\mathrm{D}(X),\mathrm{D}(Y),\mathrm{cov}(X,Y),\rho(X,Y)$,故只要已知$(X,Y)$的联合分布律或联合密度,均可按相应的公式求出其函数的数字特征,主要是期望$\mathrm{E}[g(X,Y)]$,其他的,如方差,协方差等均可转化为函数的期望,故重点掌握函数期望的计算公式:

$$\mathrm{E}[g(X,Y)]=\sum_{j}\sum_{i}g(x_i,y_j)p_{ij},(P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}),$$

或 $$\mathrm{E}[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,[(X,Y)\sim f(x,y)].$$

**【例 3.19】**设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:(1) 系数$A$;(2)$\mathrm{E}(X),\mathrm{E}(Y),\mathrm{D}(X),\mathrm{D}(Y)$;(3)$\rho(X,Y)$.

【解】(1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,即

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}A\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

可得 $$A=\frac{1}{2}.$$

(2) $$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2,$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

类似可得 $\quad E(Y)=\frac{\pi}{4},\quad D(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$

(3) 由 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xy\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-1$,故协方差为

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1.$$

从而

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}=\frac{8\pi-\pi^2-16}{\pi^2+8\pi-32}.$$

**【例 3.20】** 设 $(X,Y)$ 服从在 $A$ 上的均匀分布,其中 $A$ 为 $x$ 轴、$y$ 轴及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成的三角形区域,求 $X,Y,XY$ 的数学期望及方差.

**【解】** 如图 3-1 所示,二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率密度为

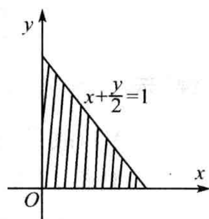


图 3-1

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in A\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2-2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x(2-2x)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x^2(2-2x)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6},$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}y\left(1-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\int_0^2y\left(1-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^2=\frac{2}{3}.$$

$$E(Y^2)=\int_0^2y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{8}y^4\right)\Big|_0^2=\frac{2}{3},$$

$$D(Y)=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1x\mathrm{d}x\int_0^{2-2x}y\mathrm{d}y=\int_0^1x\cdot\frac{1}{2}(2-2x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

$$E(X^2Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y^2\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_A x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{2-2x} y^2 dy = \int_0^1 x^2 \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^{2-2x} dx$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) dx$$

$$= \frac{8}{3} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{45},$$

$$D(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = \frac{2}{45} - \frac{1}{36} = \frac{1}{60}.$$

注 二维随机变量的两个分量的期望、方差也可通过先计算两个边缘密度再按定义计算，这与利用联合密度直接计算本质上是一样的.

**【例 3.21】** 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立，且 $X \sim N(1,2)$，$Y \sim N(0,1)$，试求 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度.

**【解】** 因为相互独立正态随机变量的线性组合仍为正态分布，所以只需确定 $Z$ 的期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$ 即可求出 $Z$ 的密度函数.

因为 $E(Z) = E(2X - Y + 3) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 \times 1 - 0 + 3 = 5$,

$$D(Z) = D(2X - Y + 3) \xlongequal{\text{因为 } X \text{ 与 } Y \text{ 独立}} 2^2 D(X) + D(Y) = 2^2 \times 2 + 1 = 9,$$

所以 $\varphi_Z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(z-E(Z))^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$.

**【例 3.22】** 设二维随机变量 $(X,Y)$ 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ 内服从均匀分布（如图 3-2 所示），求：

(1) 关于 $X$ 的边缘概率密度；(2) $Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$.

**【解】** $(X,Y)$ 的分布密度为

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

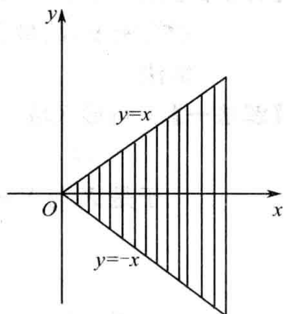



图 3-2

$$(1) \varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) dy$$

$$= \int_{-x}^{x} 1 dy = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

$$(2) D(Z) = D(2X+1) = 2^2 D(X) = 4[E(X^2) - (EX)^2]$$

$$= 4\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_X(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_X(x) dx\right)^2\right]$$

$$= 4\left[\int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left(\int_0^1 x \cdot 2x dx\right)^2\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{2} x^4 - \left(\frac{2}{3} x^3\right)^2\right]_0^1$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{9} x^6\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{9}.$$

**【例 3.23】** 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$Y \sim N(0,\sigma^2)$，求 $E(\sqrt{X^2+Y^2})$，$D(\sqrt{X^2+Y^2})$.

**【解】** 由题设可知 $\quad \varphi_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad \varphi_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}.$

又由于 $X$ 与 $Y$ 相互独立，所以 $(X,Y)$ 的密度为

$$\varphi(x,y)=\varphi_X(x)\varphi_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

于是 $\mathrm{E}(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{化为极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\rho\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{+\infty}\rho^2\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=-\int_0^{+\infty}\rho\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)=-\left(\rho\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\rho\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{\rho}{\sqrt{2}\sigma}=u}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}u=\sqrt{2}\sigma\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma.$$

$$\mathrm{D}(\sqrt{X^2+Y^2})=\mathrm{E}[(\sqrt{X^2+Y^2})^2]-[\mathrm{E}(\sqrt{X^2+Y^2})]^2$$

$$=\mathrm{E}(X^2+Y^2)-\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma\right)^2$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot\rho^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\mathrm{d}\rho-\left(\frac{\pi}{2}\sigma^2\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\rho^2\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)-\frac{\pi}{2}\sigma^2=2\sigma^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2.$$

**【例 3.24】** 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合分布在以点 $(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布(如图 3-3 所示)，试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

**【分析】** 这是一个求二维随机变量(或叫两个随机变量)的函数 $U=X+Y$ 的方差问题，因为已知联合密度，故最简单的做法是直接用函数期望公式计算. 为了比较还另给出了两种解法.

**【解法一】** 三角形区域

$$G=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$$

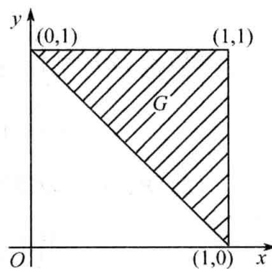


图 3-3

于是 $X$ 与 $Y$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in G\\0,\text{其他}\end{cases},$$

$$\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{E}[(X+Y)^2]-\mathrm{E}^2(X+Y)$$

$$=\iint\limits_G 2(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\left[\iint\limits_G 2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^2$$

$$=\int_0^1\left(\int_{1-x}^1 2(x+y)^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\left[\int_0^1\left(\int_{1-x}^1 2(x+y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\frac{11}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

**【解法二】** 三角形区域为 $G=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$；随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & \text{若}(x,y)\in G\\0, & \text{若}(x,y)\overline{\in}G\end{cases}.$$

以 $f_1(x)$ 表示 $X$ 的概率密度，则当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_1(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x.$$

因此 $$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3};\quad \mathrm{E}(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

同理可得 $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{2}{3}$； $\mathrm{D}(Y)=\dfrac{1}{18}$.

现在求 $X$ 和 $Y$ 的协方差.

$$\mathrm{E}(XY)=\iint\limits_G 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12};$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}.$$

于是 $$\mathrm{D}(U)=\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$$
$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

**【解法三】** 三角形区域为 $G=\{x,y:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,X+Y\geqslant 1\}$；随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G\\ 0, & 若(x,y)\overline{\in} G\end{cases}.$$

以 $f(u)$ 表示 $U=X+Y$ 的概率密度，当 $u<1$ 或 $u>2$ 时，显然 $f(u)=0$.

设 $1\leqslant u\leqslant 2$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant u-x\leqslant 1$ 时，$f(x,u-x)=2$，否则 $f(x,u-x)=0$.

由随机变量之和的概率密度公式有

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,u-x)\mathrm{d}x=\int_{u-1}^{1}2\mathrm{d}x=2(2-u).$$

因此 $$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(U)=\int_{-\infty}^{\infty}uf(u)\mathrm{d}u=2\int_1^2 u(2-u)\mathrm{d}u=\frac{4}{3};$$

$$\mathrm{E}(X+Y)^2=\mathrm{E}(U^2)=\int_{-\infty}^{\infty}u^2f(u)\mathrm{d}u=2\int_1^2 u^2(2-u)\mathrm{d}u=\frac{11}{6};$$

$$\mathrm{D}U=\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{E}(X+Y)^2-[\mathrm{E}(X+Y)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}.$$

**【例 3.25】** 设 $X_1$ 与 $X_2$ 相互独立，且服从相同的分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试证明

$$\mathrm{E}[\max(X_1,X_2)]=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

**【分析】** 本题仍是一个二维随机变量函数的数学期望问题，可按其公式计算. 我们给出两种不同解法，其中解法一的积分技巧是较强的，而解法二的技巧在于作恰当的变换.

**【解法一】** 由随机变量函数的数学期望公式，有

$$\mathrm{E}[\max(X_1,X_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，$f(x,y)=f_{X_1}(x)f_{X_2}(y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$.

于是

$$\begin{aligned}E[\max(X_1,X_2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}xf(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}yf(x,y)dy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-\mu)f(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}(y-\mu)f(x,y)dy+\mu\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)f(x,y)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)f(y,x)dx+\mu\\&=\mu+2\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)f(x,y)dx\\&=\mu+2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\\&=\mu+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}dy=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\quad\text{(利用概率积分)}.\end{aligned}$$

**【解法二】** 设 $Y_1=\dfrac{X_1-\mu}{\sigma},Y_2=\dfrac{X_2-\mu}{\sigma}$,

则 $Y_1$ 与 $Y_2$ 独立同服从 $N(0,1)$,而

$\max(X_1,X_2)=\max(\mu+\sigma Y_1,\mu+\sigma Y_2)=\mu+\sigma\max(Y_1,Y_2)$.

又因为 $\quad \max(Y_1,Y_2)=\dfrac{1}{2}(Y_1+Y_2+|Y_1-Y_2|)$,

故
$$\begin{aligned}E[\max(Y_1,Y_2)]&=\frac{1}{2}[E(Y_1)+E(Y_2)+E(|Y_1-Y_2|)]\\&=\frac{1}{2}E(|Y_1-Y_2|).\end{aligned}$$

因为 $Y_1-Y_2\sim N(0,2)$,做

$$E(|Y_1-Y_2|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{u^2}{4}du}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}ue^{-\frac{u^2}{4}}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

所以有

$$\begin{aligned}E[\max(X_1,X_2)]&=E[\mu+\sigma\max(Y_1,Y_2)]=\mu+\sigma E[\max(Y_1,Y_2)]\\&=\mu+\sigma\cdot\frac{1}{2}E(|Y_1-Y_2|)=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

**【例 3.26】** 设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2),Y\sim N(0,\sigma^2)$,$X$ 与 $Y$ 相互独立,又设 $\zeta=\alpha X+\beta Y$,$\eta=\alpha X-\beta Y$,($\alpha,\beta$ 为不相等常数),求:

(1) $E(\zeta),E(\eta),D(\zeta),D(\eta),\rho_{\zeta\eta}$;

(2) 问当 $\alpha$ 与 $\beta$ 满足什么关系时,$\zeta,\eta$ 不相关.

**【解】** (1) $E(\zeta)=E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)=\alpha\times 0+\beta\times 0=0$.

$E(\eta)=E(\alpha X-\beta Y)=\alpha E(X)-\beta E(Y)=\alpha\times 0-\beta\times 0=0$.

$D(\zeta)=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$.

同样 $D(\eta)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$.

$$\begin{aligned}\rho_{\zeta\eta}&=\frac{E(\zeta\eta)-E(\zeta)E(\eta)}{\sqrt{D(\zeta)}\sqrt{D(\eta)}}=\frac{E(\alpha^2X^2-\beta^2Y^2)-0}{\sqrt{D(\zeta)}\sqrt{D(\eta)}}\\&=\frac{\alpha^2[E(X^2)-(E(X))^2]-\beta^2[E(Y^2)-(E(Y))^2]}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}\\&=\frac{\alpha^2D(X)-\beta^2D(Y)}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\frac{\alpha^2\sigma^2-\beta^2\sigma^2}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.\end{aligned}$$

(2) 当 $\rho_{\zeta\eta}=0$ 时,即 $|\alpha|=|\beta|$ 时,$\zeta$ 与 $\eta$ 不相关.

**【例 3.27】** 设$(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

(1) 判别 $X,Y$ 是否相互独立,是否相关;(2) 求 $E(XY),D(X+Y)$.

**【解】** (1)$(X,Y)$ 关于 $X$ 的边缘密度:

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

$(X,Y)$ 关于 $Y$ 的边缘密度

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-y, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

因为 $\varphi_X(x)\varphi_Y(y)=\begin{cases}(\frac{3}{2}-x)(\frac{3}{2}-y),0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}\neq\varphi(x,y)$

所以 $X,Y$ 不相互独立.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(\frac{3}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{12},$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\left(\frac{3}{2}-y\right)\mathrm{d}y=\frac{5}{12},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xy(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}.$$

因为 $\rho_{XY}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{12}\right)^2}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\neq 0$. 所以 $X$ 与 $Y$ 相关.

(2) $E(XY)=\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)\\&=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)E(Y)].\end{aligned}$$

因为 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^1 x^2\left(\frac{3}{2}-x\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{11}{144}$,$D(Y)=\frac{11}{144}$,

所以 $D(X+Y)=\frac{11}{144}+\frac{11}{144}+2\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}\right)=\frac{5}{36}$.

**【例 3.28】** 如果 $X$ 与 $Y$ 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$,则必有

(A) $X$ 与 $Y$ 独立. (B) $X$ 与 $Y$ 不相关.

(C) $D(Y)=0$. (D) $D(X)\cdot D(Y)=0$. 【 】

**【解】** 因为 $D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y)$,

$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{cov}(X,Y)$,

又由题设 $D(X+Y)=D(X-Y)$,所以 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0,$$

故 $X$ 与 $Y$ 不相关，即选(B).

**【例 3.29】** 将一枚硬币重复掷 $n$ 次，以 $X$ 和 $Y$ 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 $X$ 与 $Y$ 的相关系数等于

(A) $-1$.　　(B) $0$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $1$.　　【　】

**【解】** 因为 $X+Y=n$，即 $Y=-X+n$，故 $X$ 与 $Y$ 之间有严格的线性关系，且为负相关，所以 $\rho(X,Y)=-1$，即选(A).

注 本题也可利用相关系数公式计算得到：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(X,n-X)=\operatorname{cov}(X,n)-\operatorname{cov}(X,X)$$
$$=-\operatorname{cov}(X,X)=-\mathrm{D}(X),\mathrm{D}(Y)=\mathrm{D}(X),$$

故
$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=-\frac{\mathrm{D}(X)}{\mathrm{D}(X)}=-1.$$

## 题型四　有关数字特征的证明题

提示 一般利用相应数字特征的性质和定义不难得证明.

**【例 3.30】** 设 $A,B$ 是二随机事件，随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 出现}\\ -1, & \text{否则}\end{cases};\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 出现}\\ -1, & \text{否则}\end{cases}.$$

试证明 $X$ 和 $Y$ 不相关的充要条件是 $A$ 与 $B$ 相互独立.

**【证明】** 由数学期望和函数期望计算公式有

$$\mathrm{E}(X)=P(A)-P(\overline{A})=2P(A)-1,\mathrm{E}(Y)=P(B)-P(\overline{B})=2P(B)-1,$$
$$\mathrm{E}(XY)=P(AB)-P(A\overline{B})-P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B})$$
$$=P(AB)-[P(A)-P(AB)]-[P(B)-P(AB)]+[1-P(A)-P(B)+P(AB)]$$
$$=4P(AB)-2P(A)-2P(B)+1.$$

于是
$$\operatorname{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$
$$=4P(AB)-4P(A)P(B).$$

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ 当且仅当 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 $X$ 与 $Y$ 不相关的充要条件为 $A$ 与 $B$ 相互独立.

**【例 3.31】** 设随机变量 $X$ 在区间$[a,b]$中取值，证明：

(1) $a\leqslant \mathrm{E}(X)\leqslant b$;　　(2) $\mathrm{D}(X)\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

**【证】** (1) 因为 $a\leqslant X\leqslant b$，所以 $\mathrm{E}(a)\leqslant\mathrm{E}(X)\leqslant\mathrm{E}(b)$，即 $a\leqslant\mathrm{E}(X)\leqslant b$.

(2) 因为
$$\mathrm{E}[(X-x)^2]=\mathrm{E}(X^2)-2x\mathrm{E}(X)+x^2$$
$$=[x-\mathrm{E}(X)]^2+\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2$$
$$=[x-\mathrm{E}(X)]^2+\mathrm{D}(X).$$

所以当 $x=\mathrm{E}(x)$ 时，$\mathrm{E}[(X-x)^2]$ 取最小值 $\mathrm{D}(X)$.

于是，当 $x=\frac{a+b}{2}$ 时，有

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}\{[X-\mathrm{E}(X)]^2\}\leqslant\mathrm{E}\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\leqslant\mathrm{E}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

**【例 3.32】** 设 $\varphi(x)$ 是正值非减函数，$X$ 是连续型随机变量，且 $\mathrm{E}[\varphi(X)]$ 存在，证明：

$$P\{X \geqslant a\} \leqslant \frac{\mathrm{E}[\varphi(X)]}{\varphi(a)}.$$

**【证】** 设 $X$ 的概率密度为 $f(x)$，由题设有 $X \geqslant a \Leftrightarrow \varphi(X) \geqslant \varphi(a)$.

于是 $$P\{X \geqslant a\} = P\{\varphi(X) \geqslant \varphi(a)\} = \int_{\varphi(x)\geqslant\varphi(a)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{\varphi(x)\geqslant\varphi(a)} \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\varphi(a)}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{E}[\varphi(X)]}{\varphi(a)}.$$

## 题型五 数字特征在经济中的应用

**提示** 有关数字特征的应用题主要是随机变量函数的数学期望，求解这类问题的关键是找出函数关系.

**【例 3.33】** 假设由自动线加工的某种零件的内径 $Z$(mm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小于 10 或大于 12 的为不合格品，其余为合格品，销售每件合格品获利，销售每件不合格的亏损，已知销售利润 $T$(单位：元) 与销售零件的内径 $Z$ 有如下关系：

$$T = \begin{cases} -1, & \text{若 } Z < 10 \\ 20, & \text{若 } 10 \leqslant Z \leqslant 12, \\ -5, & \text{若 } Z > 12 \end{cases}$$

问平均内径 $\mu$ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大?

**【解】** 平均利润就是销售利润 $T$ 的数学期望，即 $\mathrm{E}(T)$. 由题设可知平均利润为

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T) &= 20P\{10 \leqslant Z \leqslant 12\} - P\{Z < 10\} - 5P\{Z > 12\} \\ &= 20[\Phi(12-\mu) - \Phi(10-\mu)] - \Phi(10-\mu) - 5[1-\Phi(12-\mu)] \\ &= 25\Phi(12-\mu) - 21\Phi(10-\mu) - 5,\end{aligned}$$

其中，$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数，设 $\varphi(x)$ 为标准正态密度，则

$$\frac{\mathrm{dE}(T)}{\mathrm{d}\mu} = -25\varphi(12-\mu) + 21\varphi(10-\mu).$$

令 $\dfrac{\mathrm{dE}(T)}{\mathrm{d}\mu} = 0$，得 $\dfrac{-25}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} + \dfrac{21}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} = 0.$

$$\Rightarrow 25\mathrm{e}^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} = 21\mathrm{e}^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} \Rightarrow \mu = \mu_0 = 11 - \frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}.$$

由题意知，当 $\mu = \mu_0 = 11 - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{25}{21}$ 时，平均利润最大.

**【例 3.34】** 设某产品每周需求量 $Q$ 取 1,2,3,4,5 为值，是等可能的，生产每件产品的成本为 $C_1 = 3$ 元；每件产品的售价为 $C_2 = 9$ 元；没售出的产品以每件 $C_3 = 1$ 元的费用存入仓库，问生产者每周生产多少件产品能使所期望的利润最大.

**【解】** 设每周产量为 $N$，显然 $N$ 不应大于 5，每周利润为需求量 $Q$ 的函数，即有下列函数关系：

$$T = \begin{cases} (C_2 - C_1)N, & \text{若 } Q > N \\ C_2Q - C_1N - C_3(N-Q), & \text{若 } Q \leqslant N \end{cases} = \begin{cases} 6N, & \text{若 } Q > N, \\ 10Q - 4N, & \text{若 } Q \leqslant N. \end{cases}$$

利润的期望值

$$\mathrm{E}(T)=6NP\{Q>N\}+(10Q-4N)P\{Q\leqslant N\}.$$

由于需求量 $Q$ 是等可能地取值 1,2,3,4,5,所以取各值的概率为$\frac{1}{5}$,于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T)&=6N\sum_{n=N+1}^{5}\frac{1}{5}+10\sum_{n=1}^{N}n\cdot\frac{1}{5}-4N\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{5}\\&=\frac{6}{5}N(5-N)+2\cdot\frac{1+N}{2}\cdot N-\frac{4}{5}N^2=7N-N^2.\end{aligned}$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N}\mathrm{E}(T)=7-2N=0,得\ N=3.5.$$

因为$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}N^2}\mathrm{E}(T)\Big|_{N=3.5}=-2<0$,所以当 $N=3.5$ 时所期望的利润达到最大值,由于需求量 $Q$ 与生产量 $N$ 应取正整数,所以应取 $N=3$ 或 $N=4$. 此时利润的最大期望值为 12 元.

**【例 3.35】**按节气出售的某种节令商品,每售出 1 kg 可获利 $a$ 元,过了节气处理剩余的这种商品,每售出 1 kg 净亏损 $b$ 元. 设某店在季度内这种商品的销量 $X$ 是一随机变量,$X$ 在区间$(t_1,t_2)$内服从均匀分布. 为使商店所获利润的数学期望最大,问该店应进多少货?

**【解】**设 $t$(单位:kg)表示进货数,$t_1\leqslant t\leqslant t_2$,进货 $t$ 所获利润记为 $Y$,则 $Y$ 是随机变量 $X$ 的函数,其函数关系为

$$Y=\begin{cases}aX-(t-X)b, & t_1<X\leqslant t\\ at, & t<X<t_2\end{cases}.$$

$X$ 的概率密度为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{t_2-t_1}, & t_1<x<t_2\\ 0\ , & 其他\end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\int_{t_1}^{t}[ax-(t-x)b]\cdot\frac{1}{t_2-t_1}\mathrm{d}x+\int_{t}^{t_2}at\cdot\frac{1}{t_2-t_1}\mathrm{d}x\\&=\frac{\left[-\frac{a+b}{2}t^2+(bt_1+at_2)t-\frac{a+b}{2}t_1^2\right]}{t_2-t_1}.\end{aligned}$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{E}(Y)=\frac{[-(a+b)t+at_2+bt_1]}{t_2-t_1}=0,$$

得驻点 $t=\frac{at_2+bt_1}{a+b}$. 由此可知,该店应进$\frac{at_2+bt_1}{a+b}$ kg 商品,才可使利润的数学期望最大.

**【例 3.36】**设某种商品每周的需求量 $X$ 是一随机变量,服从区间[10,30]上的均匀分布,而经销商店进货数量为区间[10,30]中的某一整数,商店每销售一单位商品可获利 500 元;若供大于求,则削价处理,每处理 1 单位商品亏损 100 元;若供不应求,则可从外部调剂供应,此时每 1 单位商品仅获 300 元,为使商店所获利润期望值不少于 9280 元,试确定最少进货量.

**【解】**设进货数量为 $a$,则利润 $L$ 为随机变量 $X$ 的函数:

$$L=\begin{cases}500a+(X-a)300, a<X\leqslant 30\\500X-(a-X)100, 10\leqslant X\leqslant a\end{cases}=\begin{cases}300X+200a, a<X\leqslant 30,\\600X-100a, 10\leqslant X\leqslant a.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(L)&=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}L\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x-100a)\mathrm{d}x+\frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x+200a)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{20}\left(600\times\frac{x^2}{2}-100ax\right)\Big|_{10}^{a}+\frac{1}{20}\left(300\times\frac{x^2}{2}+200ax\right)\Big|_{a}^{30}\\&=-7.5a^2+350a+5250\geqslant 9280.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 7.5a^2-350a+4030\leqslant 0\Rightarrow\frac{62}{3}\leqslant a\leqslant 26.$$

故利润期望值不少于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

**【例 3.37】** 一商店经销某种商品，每周进货数量 $X$ 与顾客对该种商品的需求量 $Y$ 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $[10,20]$ 上的均匀分布(见图 3-4)，商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，商店可以从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

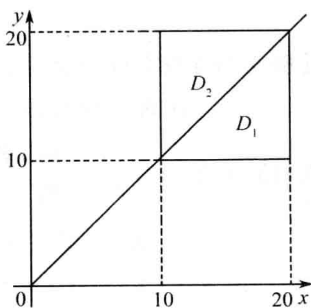



图 3-4

**【解】**

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, 10\leqslant x\leqslant 20\\0,\ 其他\end{cases};$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{10}, 10\leqslant y\leqslant 20\\0, 其他\end{cases}.$$

设 $Z$ 表示商店每周所得的利润，则

$$Z=\begin{cases}1000Y, & Y\leqslant X\\1000X+500(Y-X)=500(X+Y), & Y>X\end{cases}.$$

由于 $X$ 与 $Y$ 相互独立，所以 $X,Y$ 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{100}, & 10\leqslant x\leqslant 20, 10\leqslant y\leqslant 20\\0, & 其他\end{cases}.$$

故

$$\begin{aligned}E(Z)&=\iint_{D_1}1000y\times\frac{1}{100}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}500(x+y)\times\frac{1}{100}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=10\int_{10}^{20}\mathrm{d}x\int_{10}^{x}y\mathrm{d}y+5\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{10}^{y}(x+y)\mathrm{d}x\\&=10\int_{10}^{20}\frac{1}{2}(x^2-100)\mathrm{d}x+5\int_{10}^{20}\left(\frac{3}{2}y^2-10y-50\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{20000}{3}+5\times 1500\approx 14166.67(元).\end{aligned}$$

注 从上面几个例题可以看出，求解这类题型首先要正确写出随机变量之间的函数关系，其次要弄清楚哪个是随机变量，哪个是确定性的参变量.

# 第3节 思维定势与综合题解析

## 一、思维定势

**思维定势** 涉及$n$次试验中某事件发生的次数$X$的数字特征的问题，马上要联想到对$X$作(0-1)分析.

即令 $X_i=\begin{cases}0, & 第\ i\ 次不发生\\ 1, & 第\ i\ 次发生\end{cases}$，则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

**【例3.38】**设事件$A$在第$i$次试验中出现的概率为$p_i(i=1,2,\cdots,n)$，$X$表示$n$次独立试验中$A$出现的次数，求$\mathrm{E}(X)$，$\mathrm{D}(X)$.

**【解】**令 $X_i=\begin{cases}0, & 第\ i\ 次试验\ A\ 不出现\\ 1, & 第\ i\ 次试验\ A\ 出现\end{cases}$，

则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

因为 $P\{X_i=1\}=P(A)=p_i$，

$$P\{X_i=0\}=P(\overline{A})=1-p_i=q_i(i=1,2,\cdots,n)$$

所以 $\mathrm{E}(X_i)=p_i$，

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

$$\mathrm{D}(X_i)=\mathrm{E}(X_i^2)-[\mathrm{E}(X_i)]^2$$

$$=1^2p_i+0\cdot q_i-p_i^2=p_iq_i,$$

又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

故 $\mathrm{D}(X)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p_iq_i$.

## 二、综合题解析

**【例3.39】**今有两封信欲投入编号为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的3个邮筒，设$X,Y$分别表示投入第Ⅰ号和第Ⅱ号邮筒的信的数目.(1)求$(X,Y)$的联合分布；(2)$X$与$Y$是否独立；(3)令$U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$，求$\mathrm{E}(U)$和$\mathrm{E}(V)$.

**【解】**(1)由题设可知，$X,Y$的可取值为0,1,2.

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{两封信均投入第Ⅲ邮筒\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{两封信中有一封投入第Ⅰ号筒，另一封投入第Ⅲ号筒\}$$

$$=\frac{\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_1^1}{3^2}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_1^1}{3^2}=\frac{2}{9},$$

$P\{X=2,Y=0\}=\frac{C_2^2}{3^2}=\frac{1}{9}$.

同理可求得 $P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{9}$,$P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{9}$,$P\{X=1,Y=2\}=0$,

$P\{X=2,Y=1\}=0$,$P\{X=2,Y=2\}=0$.

由以上结果可得$(X,Y)$的分布律

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |
| 1 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |

(2) $X,Y$ 的边缘分布律

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_{i\cdot}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_{\cdot j}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

因为 $P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{9}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}$,

所以 $X,Y$ 不独立.

(3) $U=\max\{X,Y\}$ 的可能取值为 0,1,2.

$P\{U=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{9}$,

$P\{U=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$,

$P\{U=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=0\}+$

$P\{X=2,Y=1\}=\frac{2}{9}$,

所以 $E(U)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{9}=\frac{10}{9}$.

$V=\min\{X,Y\}$ 的可能取值 0,1,2.

$P\{V=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=2\}+$

$P\{X=2,Y=0\}+P\{X=2,Y=0\}=\frac{7}{9}$,

$P\{V=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{2}{9}$,

$P\{V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=0$,

所以 $E(V)=0\times\frac{7}{9}+1\times\frac{2}{9}+2\times 0=\frac{2}{9}$.

【例 3.40】已知随机变量 $X$ 和 $Y$ 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，且 $X$ 与 $Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1) 求 $Z$ 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$；(2) 求 $X$ 与 $Z$ 的相关系数 $\rho_{XZ}$；(3) 问 $X$ 与 $Z$ 是否相互独立?为什么?

【解】$X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$.

(1) $E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{3}$，

$$D(Z)=D\left(\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2D(X)+\left(\frac{1}{2}\right)^2D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D\left(\frac{X}{3}\right)}\sqrt{D\left(\frac{Y}{2}\right)}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times4^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{3^2}\times3^2}\sqrt{\frac{1}{2^2}\times4^2}$$

$$=1+4-2=3.$$

(2) $$\text{cov}(X,Z)=\text{cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}\text{cov}(X,X)+\frac{1}{2}\text{cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times4$$

$$=0,$$

故 $\rho_{XZ}=\dfrac{\text{cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=0$.

(3) 因 $Z$ 不一定服从正态分布，$(X,Z)$ 更不一定为正态分布，故尽管 $X$ 与 $Z$ 不相关，$X$ 与 $Z$ 仍不一定相互独立.

【例 3.41】假设二维随机变量 $(X,Y)$ 在矩形

$$G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y\\ 1, & X>Y\end{cases};\qquad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}.$$

求：(1) $U$ 和 $V$ 的联合分布；(2) $U$ 和 $V$ 的相关系数 $\rho$.

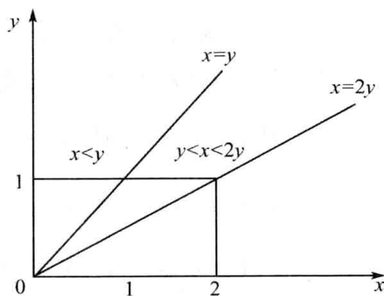


图 3-5

【解】由题设可知(如图 3-5 所示)：

$$P(X\leqslant Y)=\frac{1}{4},P(X>2Y)=\frac{1}{2},P(Y<X\leqslant 2Y)=\frac{1}{4}.$$

(1) $(U,V)$ 所有可能取值为：$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$.

且
$$P(U=0,V=0)=P(X\leqslant Y,X\leqslant 2Y)=P(X\leqslant Y)=\frac{1}{4};$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\leqslant Y,X>2Y)=0;$$

$$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\leqslant 2Y)=P(Y<X\leqslant 2Y)=\frac{1}{4};$$

$$P(U=1,V=1)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) 由(1) 的结构易知 $UV$，$U$ 和 $V$ 的分布律分别为

$$UV \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix};\quad U \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix};\quad V \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

于是,有

$$\mathrm{E}(U) = \frac{3}{4}, \mathrm{D}(U) = \frac{3}{16}; \mathrm{E}(V) = \frac{1}{2}, \mathrm{D}(V) = \frac{1}{4};$$

$$\mathrm{E}(UV) = \frac{1}{2}; \mathrm{cov}(U,V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V) = \frac{1}{8};$$

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sqrt{\mathrm{D}(U)\mathrm{D}(V)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**【例 3.42】**设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$.

(1) 求 $X$ 的数学期望 $\mathrm{E}(X)$ 和方差 $\mathrm{D}(X)$;

(2) 求 $X$ 与 $|X|$ 的协方差,并问 $X$ 与 $|X|$ 是否不相关?

(3) 问 $X$ 与 $|X|$ 是否相互独立?为什么?

**【解】**(1) $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = 0$,

$$\mathrm{D}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2.$$

(2) $\mathrm{E}(X|X|) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = 0$,

$\mathrm{cov}(X, |X|) = \mathrm{E}(X|X|) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(|X|) = 0$.

$\Rightarrow \quad \rho_{X|X|} = \dfrac{\mathrm{cov}(X, |X|)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(|X|)}} = 0$. 故 $X$ 与 $|X|$ 不相关.

(3) 对给定 $0 < a < +\infty$,显然事件$\{|X| < a\}$包含在事件$\{X < a\}$内,且 $P\{X < a\} < 1$, $P\{|x| < a\} > 0$.

故 $\quad P\{X < a, |X| < a\} = P\{|X| < a\}$.

但 $\quad P\{X < a\} \cdot P\{|X| < a\} < P\{|X| < a\}$,

所以 $P\{X < a, |X| < a\} \neq P\{X < a\} \cdot P\{|X| < a\}$.

故 $X$ 与 $|X|$ 不独立.

## 习　题　三

**1. 填空题.**

(1) 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立,$\mathrm{D}(X) = 2$,$\mathrm{D}(Y) = 4$,$\mathrm{D}(2X - Y) =$ ________.

(2) 已知随机变量 $X \sim N(-3,1)$,$Y \sim N(2,1)$,且 $X$ 与 $Y$ 相互独立,$Z = X - 2Y + 7$,则 $Z \sim$ ________.

(3) 投掷 $n$ 枚骰子,则出现的点数之和的数学期望________.

(4) 设离散型随机变量 $\xi$ 的取值是在两次独立试验中事件 $A$ 发生的次数,如果在这些试验中事件发生的概率相同,并且已知 $\mathrm{E}(X) = 0.9$,则 $\mathrm{D}(X) =$ ________.

(5) 设 $X \sim N(0,1)$,$Y = X^{2n}$($n$ 为正整数),则 $\rho_{XY} =$ ________.

(6) 设随机变量 $X$ 在区间$[-1,2]$上服从均匀分布,随机变量 $Y = \begin{cases} 1, & 若\ X > 0 \\ 0, & 若\ X = 0 \\ -1, & 若\ X < 0 \end{cases}$,则方差

$DY =$ ________.

(7) 若随机变量 $X_1, X_2, X_3$ 相互独立，且服从相同的两点分布 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$，则 $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$ 服从 ________ 分布，$E(X) =$ ________，$D(X) =$ ________.

(8) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个相互独立的随机变量，且 $X \sim N(0,1)$，$Y$ 在 $(-1,1)$ 上服从均匀分布，则 $\text{cov}(X,Y) =$ ________.

(9) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为：$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$\varphi(y) = \begin{cases} e^{-(y-5)}, & y > 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 $E(XY) =$ ________.

(10) 设随机变量 $X_1, X_2, X_3$ 相互独立，其中 $X_1$ 在 $[0,6]$ 服从均匀分布，$X_2$ 服从正态分布 $N(0,2^2)$，$X_3$ 服从参数为 $\lambda = 3$ 的泊松分布，记 $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$，则 $D(Y) =$ ________.

**2. 选择题.**

(1) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立同分布，记 $U = X - Y, V = X + Y$，则随机变量 $U$ 和 $V$ 必然

A. 不独立. B. 独立.

C. 相关系数不为零. D. 相关系数为零. 【 】

(2) 设 $P(X = n) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$，$(n = 1,2,\cdots)$，则 $E(X) =$

A. 0. B. 1.

C. 0.5. D. 不存在. 【 】

(3) $X_1, X_2, X_3$ 都服从 $[0,2]$ 上的均匀分布，则 $E(3X_1 - X_2 + 2X_3) =$

A. 1. B. 3.

C. 4. D. 2. 【 】

(4) 已知 $X$ 与 $Y$ 的联合分布如下表所示，则有

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.05 | 0.25 |
| 1 | 0 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0 |

A. $X$ 与 $Y$ 不独立. B. $X$ 与 $Y$ 独立.

C. $X$ 与 $Y$ 不相关. D. $X$ 与 $Y$ 彼此独立且相关. 【 】

(5) 设离散型随机变量 $X$ 的可能取值为：$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$，且 $E(X) = 2.3, E(X^2) = 5.9$，则 $x_1, x_2, x_3$ 所对应的概率为

A. $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.7$. B. $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$.

C. $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.2$. D. $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.3$. 【 】

(6) 设 $X$ 与 $Y$ 为两个随机变量，则下列等式中正确的是

A. $E(X+Y) = E(X)E(Y)$. B. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

C. $E(XY) = E(X)E(Y)$. D. $D(XY) = D(X)D(Y)$. 【 】

(7) 现有10张奖券，其中8张为2元，2张为5元，令某人从中随机地无放回地抽取3张，则此人得奖的金额的数学期望为

A. 6. B. 12. C. 7.8. D. 9. 【 】

(8) 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 服从正态分布，$X \sim N(\mu, 4^2)$，$Y \sim N(\mu, 5^2)$，记 $P_1 = P\{X \leqslant \mu - 4\}$，$P_2 = P\{Y \geqslant \mu + 5\}$，则

A. 对任何 $\mu$，都有 $P_1 = P_2$.
B. 对任何实数 $\mu$，都有 $P_1 \leqslant P_2$.
C. 只有 $\mu$ 的个别值，才有 $P_1 = P_2$.
D. 对任何实数 $\mu$，都有 $P_1 > P_2$. 【 】

(9) 随机变量 $\zeta = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为

A. $E(X) = E(Y)$.
B. $E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$.
C. $E(X^2) = E(Y^2)$.
D. $E(X^2) + E^2(X) = E(Y^2) + E^2(Y)$.

【 】

(10) 人的体重 $X \sim \varphi(x)$，$E(X) = a$，$D(X) = b$，10个人的平均体重记为 $Y$，则下列结论正确的是

A. $E(Y) = a$. B. $E(Y) = 0.1a$. C. $D(Y) = 0.01b$. D. $D(Y) = b$.

【 】

**3. 证明题.**

(1) 设 $X$ 是随机变量，$c$ 是常数，证明：$D(X) < E\{(X - c)^2\}$，其中 $c \neq E(X)$.

(2) 设 $X$ 和 $Y$ 为相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

试证：它们的卷积，即随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度也服从正态分布.

(3) 设 $X,Y$ 相互独立，证明：$D(XY) = D(X)D(Y) + [E(X)]^2 D(Y) + [E(P)]^2 D(X)$.

(4) 设 $x_i$ 和 $x_k$ 为随机变量 $X$ 的任意两个可取值，$E(X)$，$D(X)$ 分别为其数学期望与方差，则

$$E\left[X - \frac{x_i + x_k}{2}\right]^2 \geqslant D(X).$$

**4. 计算题.**

(1) 设 $X$ 的分布律为 $P(X = k) = \dfrac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$，$(k = 0,1,2,3,\cdots, a > 0)$，试求 $E(X)$，$D(X)$.

(2) 设随机变量 $X$ 具有概率密度 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x| \leqslant \dfrac{x}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求 $E(X)$，$D(X)$.

(3) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率分布为

| $(X,Y)$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ | $(2,0)$ | $(2,1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p\{X = x, Y = y\}$ | 0.10 | 0.15 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.15 |

求 $E\left[\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}\right]$.

(4) 一汽车沿一街道行驶需要通过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以 $X$ 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求：(1) $X$ 的概率分布；(2) $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

(5) 设$(X,Y)$的概率密度

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}4xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求$\mathrm{E}(\sqrt{X^2+Y^2})$.

(6) 设$(X,Y)$服从区域$D=\{(x,y):0<x<1,0<y<x\}$上的均匀分布,求相关系数$\rho_{XY}$.

(7) 在长为$l$的线段上任选两点,求两点间距离的数学期望与方差.

(8) 设$X,Y$为服从正态分布$N(a,\sigma^2)$的随机变量,且$X$与$Y$相互独立,求$\mathrm{E}[\min(X,Y)]$.

(9) 设随机变量$X$的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|},(-\infty<x<+\infty)$$

求$\mathrm{E}(X),\mathrm{D}(X)$.

(10) 设$(X,Y)$的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

求$\mathrm{D}(X),\mathrm{D}(Y),\rho(X,Y)$.

(11) 假设一部机器在一天内发生故障的概率为0.2,机器发生故障时全天停止工作,若一周5个工作日里无故障,可获利润10万元,发生一次故障仍可获利润5万元;发生二次故障所获利润为0元;发生三次或三次以上故障就要亏损2万元,求一周内期望利润是多少?

(12) 设二维随机变量$(X,Y)$的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)],$$

其中$\varphi_1(x,y)$和$\varphi_2(x,y)$都是二维正态密度函数,且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为$\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$.它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零,方差都是1.

① 求随机变量$X$和$Y$的密度函数$f_1(x)$和$f_2(y)$,及$X$和$Y$的相关系数$\rho$(可直接利用二维正态密度的性质);

② 问$X$与$Y$是否独立?为什么?

## 参考答案

**1.** (1) 12.　(2) $N(0,5)$.　(3) $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}n$.　(4) $\mathrm{D}(X)=0.495$.　(5) $\rho_{XY}=0$.

(6) $\frac{8}{9}$.　(7) $B(Y,p)$,　$\mathrm{E}X=0.6$,　$\mathrm{D}X=0.48$.

(8) 0.　(9) $\mathrm{E}(XY)=4$.　(10) 46.

**2.** (1) D　(2) D　(3)C　(4)A　(5)B

(6)A　(7)C　(8)A　(9)B　(10)A

**3.** 略.

**4.** (1)$\mathrm{E}(X)=a,\mathrm{D}(X)=a+a^2$.　(2)$\mathrm{E}(X)=0$.　(3)0.25.

(4)

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^3}$ |

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{67}{96}.$$

(5)$E(\sqrt{X^2+Y^2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.　　(6)$\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.　　(7)$E(X)=\frac{l}{3}$，　$D(X)=\frac{l^2}{18}$.

(8)$E[\min(X,Y)]=a-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.　　(9)$E(X)=\mu$，　$D(X)=2$.

(10)$D(X)=D(Y)=\frac{1}{4}$，　$\rho_{XY}=0$.　　(11)5.216(万元).

(12) ①$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，$\rho=0$；

②$f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$，故 $X$ 与 $Y$ 不相互独立.

# 第四章　大数定律和中心极限定理

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、切比雪夫不等式

**1. 切比雪夫不等式与大数定律**

设 $X$ 为随机变量，且有有限方差，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

或者

$$P\{|X - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

**2. 大数定律**

(1) 切比雪夫大数定律：设 $X_1, X_2, \cdots$ 为两两不相关的随机变量序列，且它们的方差均有限，并有公共上界，即存在常数 $c$，使

$$\mathrm{D}(X_i) \leqslant c, i = 1,2,\cdots$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

(2) 伯努利大数定律：设 $Y_n$ 表示 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 发生的次数，即 $Y_n \sim B(n,p)$，其中 $p = P(A)$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

(3) 辛钦大数定律：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，且数字期望 $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ 存在，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

### 二、中心极限定理

**1. 林德伯格—列维定理**

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，$\mathrm{E}(X_i) = \mu$，$\mathrm{D}(X_i) = \sigma^2$，$i = 1,2,\cdots$ 则对任意实数 $x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

**2. 棣莫弗—拉普拉斯定理**

设 $Y_n$ 表示 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 发生的次数，即 $Y_n \sim B(n,p)$，$p = P(A)$，则对任意实数 $x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

## 三、重要公式与结论

**1. 切比雪夫不等式的一般形式**

设 $X$ 的 $r$ 阶绝对矩存在，$r > 0$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r} \quad (r > 0).$$

特别有

(1) $P\{|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \dfrac{E(|X - E(X)|)}{\varepsilon}$,

(2) $P\{|X - E(X)|\} \geqslant \varepsilon\} \leqslant \dfrac{E(|X - E(X)|^2)}{\varepsilon^2} = \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

**2. 近似计算公式**

(1) 当 $n$ 很大，$p$ 很小时，二项概率有下列近似公式(即 Poisson 定理)：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad 其中\ \lambda = np.$$

(2) $X_1, X_2, \cdots$ 满足中心极限定理的条件，$E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = \sigma^2 (i = 1,2,\cdots,n)$，$n$ 很大时有下列近似公式

$$P\left\{a \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a).$$

## 四、注意

(1) 德莫弗－拉普拉斯定理实际上就是林德伯格－勒维定理在随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同 0－1 分布的情形.

(2) 切比雪夫不等式主要用来对期望、方差已知的随机变量取值的概率作粗略估计.

(3) 大数定律是参数估计中矩估计的理论依据，也是判别估计一致性的主要方法.

(4) 中心极限定理主要用于近似计算.

# 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　有关切比雪夫不等式与大数定律的命题

**提示** 直接利用切比雪夫不等式，并且注意不等式中期望和方差的位置不要弄错.

**【例 4.1】** 设随机变量 $X$ 的数学期望 $E(X) = \mu$，方差 $D(X) = \sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X - \mu| \geqslant 3\sigma\} \leqslant$ ________.

【解】令 $\varepsilon = 3\sigma$，则由切比雪夫不等式 $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$，有

$$P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}.$$

【例 4.2】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n$ 个相互独立同分布的随机变量，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=8$，$(i=1,2,\cdots,n)$，对于 $\overline{X}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{n}$，写出所满足的切比雪夫不等式________，并估计 $P\{|\overline{X}-\mu|<4\}\geqslant$ ________.

【解】$E(\overline{X})=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$，

$D(\overline{X})=D\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\cdot nD(X_i)=\dfrac{8}{n}$，

于是 $\overline{X}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{n}$ 所满足的切比雪夫不等式为

$$P\{|\overline{X}-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}=\frac{8}{n\varepsilon^2},$$

$$P\{|\overline{X}-\mu|<4\}\geqslant 1-\frac{D(\overline{X})}{4^2}=1-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{8}{n}=1-\frac{1}{2n}.$$

【例 4.3】设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的数学期望分别为 $-2$ 和 $2$，方差分别为 $1$ 和 $4$，而相关系数为 $-0.5$，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant$ ________.

【解】令 $Z=X+Y$，则 $E(Z)=E(X)+E(Y)=-2+2=0$，

$$\begin{aligned}D(Z)&=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)\\&=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=1+4+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1\times2=3,\end{aligned}$$

于是 $\quad P\{|X+Y|\geqslant 6\}=P\{|Z-E(Z)|\geqslant 6\}\leqslant\dfrac{D(Z)}{6^2}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}.$

【例 4.4】设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布，其分布函数为

$$F(x)=a+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{b},b\neq 0,$$

则辛钦大数定律对此序列

(A) 适用. (B) 当常数 $a,b$ 取适当的数值时适用.

(C) 不适用. (D) 无法判别. 【 】

【解】辛钦大数定律成立的条件是随机变量 $X$ 的数学期望存在，即 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\frac{dF(x)}{dx}\right|dx$ 收敛，

因为
$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{b}{\pi(b^2+x^2)},$$

所以
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{dF(x)}{dx}\right|dx&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|b||x|}{\pi(b^2+x^2)}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{2|b|}{\pi}\int_0^A\frac{x}{b^2+x^2}dx\\&=\frac{|b|}{\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{d(b^2+x^2)}{b^2+x^2}=\frac{|b|}{\pi}\lim_{A\to+\infty}\ln\left(1+\frac{A^2}{b^2}\right)=+\infty,\end{aligned}$$

故辛钦大数定律不适用，即选(C).

【例 4.5】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立同分布，且 $E(X_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<n\right\}=$

________.

【解】由辛钦大数定律有(取 $\varepsilon = 1$)

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0\right| < 1\right\} = 1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 1\right\} = 1.$$

又显然有 $\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 1\right\} \subset \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i < n\right\}$,故

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i < n\right\} \geqslant \lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 1\right\} = 1.$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i < n\right\} = 1$,即应填 1.

## 题型二　有关中心极限定理的命题

提示 这类问题主要以两种形式出现:一是直接给出独立同分布随机变量序列;二是通过实际问题间接给出.其求解步骤都可归纳为:

1° 根据实际问题,设随机变量 $X$ 或独立同分布随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$,令 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$;

2° 分析 $X$ 服从什么分布,并求数学期望 $\mathrm{E}X$ 和方差 $\mathrm{D}X$;

3° 将该随机变量 $X$ 标准化,即 $\frac{X-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}}$,则

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} < \frac{X-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} < \frac{b-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{b-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}}\right),$$

其中 $\Phi(\ )$ 是标准正态分布函数.

【例 4.6】设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布序列,且 $X_i (i = 1, 2, \cdots)$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布,则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$. (B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n}\lambda} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$. (D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{n\lambda} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

其中 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

【解】$\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{D}(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$, $Y_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}P\{Y_n \leqslant x\} = \lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i - n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$ 可见该选(A).

**【例 4.7】** 某人要测量 $A$,$B$ 两地之间的距离,限于测量工具,将其分成 1200 段进行测量,设每段测量误差(单位:km)相互独立,且均服从$(-0.5,0.5)$上的均匀分布.试求总距离测量误差的绝对值不超过 20 km 的概率.

**【分析】** 利用独立同分布情形下的林德伯格 — 勒维定理.

**【解】** 设 $X_i$ 表示第$i$ 段上的测量误差,则 $X_i \sim U(-0.5,0.5)$,$i=1,2,\cdots,1200$,从而要求的概率为 $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right| \leqslant 20\right\}$,因为 $X_i$ 独立同分布,且

$$E(X_i)=0, D(X_i)=\frac{1}{12},\quad i=1,2,\cdots,1200.$$

于是由中心极限定理知,$\sum_{i=1}^{1200}X_i$ 近似服从 $N(0,100)$.

故
$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right| \leqslant 20\right\} = P\left\{\frac{-20-0}{10} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{1200}X_i}{10} \leqslant \frac{20-0}{10}\right\} = \Phi(2)-\Phi(-2)$$
$$= 2\Phi(2)-1 = 0.90.$$

**【例 4.8】** 抽样检查产品质量时,如果发现次品多于 10 个,则拒绝接受这批产品,设某批产品的次品率为 10%,问至少应抽取多少个产品检查才能保证拒绝接收该产品的概率达到 0.9?

**【解】** 设 $n$ 为至少应抽取的产品数,$X$ 为其中的次品数

$$X_k = \begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 次检查时为次品,}\\ 0, & \text{第 } k \text{ 次抽查时为正品.}\end{cases}$$

则
$$X=\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad E(X_k)=0.1,\quad D(X_k)=0.1(1-0.1)=0.09.$$

由德莫弗 — 拉普拉斯定理,有

$$P\{10 < X\} = P\left\{\frac{10-n\times 0.1}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}} < \frac{X-n\times 0.1}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}\right\} \approx 1-\Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right).$$

由题意 $1-\Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)=0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)=0.1$.查表得

$$\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}} = -1.28 \Rightarrow n = 147.$$

**【例 4.9】** (1) 一个复杂系统由 100 个相互独立的元件组成,在系统运行期间每个元件损坏的概率为 0.10,又知为使系统正常运行,至少必须有 85 个元件工作,求系统的可靠度(即正常运行的概率);(2) 上述系统假如由 $n$ 个相互独立的元件组成,而且又要求至少有 80% 的元件工作才能使整个系统正常运行,问 $n$ 至少为多大时才能保证系统的可靠度为 0.95?

**【解】** (1) 设 $X_k = \begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 个元件没损坏,}\\ 0, & \text{第 } k \text{ 个元件损坏.}\end{cases}$

$X$ 为系统正常运行时完好的元件个数,于是 $X=\sum_{k=1}^{100}X_k$.由题设可知 $X_k(k=1,2,\cdots,$

100) 服从(0－1) 分布.

$X=\sum_{k=1}^{100}X_k$ 服从二项分布 $B(100,0.9)$，于是

$E(X)=100\times 0.9=90,\quad D(X)=npq=100\times 0.9\times 0.1=9,$

故所求概率为 $P\{X>85\}=1-P\{X\leqslant 85\}=1-P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}}\leqslant\frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\}$

$$=1-P\left\{\frac{X-90}{3}\leqslant -\frac{5}{3}\right\}=1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)\approx 0.952.$$

(2) $P\{0.8n\leqslant X\}=0.95$,

而 $P\{0.8n\leqslant X\}=P\left\{\frac{0.8n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\leqslant\frac{X-0.9n}{\sqrt{n}\times 0.3}\right\}=P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{3}\leqslant\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$

$$\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.95.$$

故 $\frac{\sqrt{n}}{3}=1.65\Rightarrow n=25.$

**【例 4.10】** 某车间有 200 台车床，由于各种原因每台车床只有 60% 的时间在开动，每台车床开动期间耗电量为 $E$，问至少供给此车间多少电量才能以 99.9% 的概率保证此车间不因供电不足而影响生产.

**【解】** 设 $X_k=\begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 台车床开动},\\ 0, & \text{第 } k \text{ 台车床不开}.\end{cases}$ 令 $x=\sum_{k=1}^{200}X_k$——车间开动的车床数，则

$E(X_k)=0.6,\qquad D(X_k)=0.6\times 0.4=0.24,$

$E(X)=200\times 0.6=120,\qquad D(X)=200\times 0.24=48.$

不影响生产需开动的车床数为 $n$，由德莫弗－拉普拉斯定理，有

$$P\{X\leqslant n\}=P\left\{\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\leqslant\frac{n-120}{\sqrt{48}}\right\}\geqslant 0.999.$$

即 $\Phi\left(\frac{n-120}{\sqrt{48}}\right)\geqslant 0.999$，查表得 $\frac{n-120}{\sqrt{48}}\geqslant 3.01$. 取 $n=141$，

从而可知，给车间供电 $141E$ 就能以不小于 99.9% 的概率保证正常生产.

**【例 4.11】** 一生产线生产的产品成箱包装，每箱重量是随机的. 假设每箱平均重 50 kg，标准差为 5 kg. 若用最大载重量为 5 t 的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977[$\Phi(2)=0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数].

**【解】** 设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是装运的第 $i$ 箱的重量(单位:kg)，$n$ 为所求箱数，由条件可以把 $X_1$，$X_2,\cdots,X_n$ 看做独立同分布的随机变量，而 $n$ 箱的总重量 $T_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$. 由题设 $E(X_i)=50,\sqrt{D(X_i)}=5,E(T_n)=50n,\sqrt{D(T_n)}=5\sqrt{n}$ (单位:kg). 由勒维－林德伯格中心极限定理，$T_n\sim N(50n,25n)$

$$P\{T_n\leqslant 5000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2)$$

$$\Rightarrow\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2\Rightarrow n<98.0199.$$

故最多可装98箱.

注 如【例4.8】中,虽然作为服从二项分布的随机变量$X$,有事件$(10 < X) = (10 < X \leqslant n)$,但在用中心极限定理做近似计算时,不能将$P(10 < X)$写成$P(10 < X \leqslant n)$来计算,因为写成后者以后一般会产生更大的误差.其他例题也有类似问题,请不要弄错.

## 习 题 四

**1. 填空题.**

(1) 设$Y_n$是$n$次伯努利试验中事件$A$出现的次数,$p$为$A$在每次试验中出现的概率,则对任意$\varepsilon > 0$,有$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\dfrac{Y_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) =$ ________.

(2) 设随机变量$X$和$Y$的数学期望是2,方差分别为1和4,而相关系数为0.5,则根据切比雪夫不等式$P(|X-Y| \geqslant 6) \leqslant$ ________.

**2. 计算题.**

(1) 设随机变量$X$的概率密度为$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$,利用切比雪夫不等式估计概率$P\{0 < X < 6\}$.

(2) 某厂有400台同型机器,各台机器发生故障的概率均为0.02,假设各台机器相互独立工作,试求机器出故障的台数不少于2台的概率.

(3) 设供电网中有10000盏灯,夜晚每一盏灯开着的概率都是0.7,假设各灯开、关时间彼此无关,计算同时开关的灯数在6800与7200之间的概率.

(4) 设某产品的不合格品率为0.005,任取10000件,问不合格品不多于70件的概率.

(5) 检查员逐个地检查某产品,每次花10 s检查一个,但有的产品需要重复检查一次再用去10 s,假设每个产品需要重复检查的概率为$\dfrac{1}{2}$,试求在8 h内检查员检查的产品多于1900个的概率.

### 参 考 答 案

**1.** (1)0.  (2) $\dfrac{1}{12}$.

**2.** (1) $P\{0 < X < 6\} \geqslant \dfrac{2}{3}$.

(2)0.9859.  (3)0.999.  (4)0.998.

(5) 设$T_i$表示检查第$i$个产品所需时间,则$T_i$独立同分布,且

$$T_i = \begin{cases} 10, & \text{第 } i \text{ 个产品没重复检查}, \\ 20, & \text{否则}, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,1900$$

易得 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{1900} T_i \leqslant 8 \times 3600\right) = 0.916.$

# 第五章　数理统计的基本概念

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、几个基本概念

**1. 总体、个性和样本**

在数理统计中，称研究对象的全体（通常为数量指标的集合）为总体，组成总体的每一个元素为个体；从总体中随机抽取若干个体，这些个体称为样本，个体的个数称为样本容量（或样本大小）.

通常总体用随机变量 $X$ 表示，容量为 $n$ 的样本用 $n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 表示. 若 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立且与总体 $X$ 同分布，则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为简单随机样本（也简称样本）.

**2. 统计量**

不含总体分布中任何未知参数的样本的函数称为统计量. 下面为常用的一些统计量.

(1) 样本均值　$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$

(2) 样本方差　$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$

(3) 样本 $k$ 阶原点矩　$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$

(4) 样本 $k$ 阶中心矩　$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k.$

(5) 次序统计量　设样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，现将观测值按由小到大的顺序重新排列得到 $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$，记取值为 $x_{(k)}$ 的样本分量为 $X_{(k)}$，则称 $X_{(1)}$，$X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的次序统计量.

**3. 分位数**

若存在 $x_\alpha$，使 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$，则称 $x_\alpha$ 为 $X$ 的概率分布的（上侧）$\alpha$ 分位数.

**4. 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布**

若总体 $X$ 为一个连续型随机变量，密度函数为 $f_X(x)$，则样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i).$$

若总体 $X$ 为一个离散型随机变量，分布律为 $P(X = x_i) = p_i, i = 1,2,\cdots$，则样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布律为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i).$$

## 二、三个抽样分布——$\chi^2$ 分布、$t$ 分布与 $F$ 分布

### 1. $\chi^2$ 分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且同服从正态分布 $N(0,1)$，则随机变量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

所服从的分布称为自由度为 $n$ 的 $\chi^2$ 分布，并记为 $\chi^2(n)$.

$\chi^2$ 分布有下列性质：

若 $X\sim\chi^2(n),Y\sim\chi^2(m)$，且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$.

### 2. $t$ 分布

设 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则随机变量

$$T=X\Big/\sqrt{\frac{Y}{n}}$$

所服从的分布称为自由度为 $n$ 的 $t$ 分布，并记为 $t(n)$. $t$ 分布的密度函数关于 $y$ 轴对称，且其极限分布为标准正态分布.

### 3. $F$ 分布

设 $X\sim\chi^2(m),Y\sim\chi^2(n)$，且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则称随机变量

$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

所服从的分布为自由度为 $(m,n)$ 的 $F$ 分布，并记为 $F(m,n)$.

## 三、正态总体下常用统计量的性质

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则有

(1) $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，　$\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$；

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；

(3) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

(4) $\overline{X}$ 与 $S^2$ 相互独立；

(5) $\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sim t(n-1)$.

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两个总体相互独立，则有

(6) $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$；

(7) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m\sigma_1^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n\sigma_2^2} \sim F(m,n)$;

(8) $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$,

其中,$S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2, S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$;

(9) 当两总体的方差相同时,即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$,有

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} \sim t(m+n-2),$$

其中,
$$S_W=\sqrt{\frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2]}.$$

## 四、重要公式与结论

(1) 统计量是随机变量,本身不含总体分布中的未知参数,但它的分布可能含总体分布中的未知参数.

(2) 样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 取自总体 $X$,$X_i$ 相互独立且与 $X$ 同分布 $(i=1,2,\cdots,n)$.

(3) 无论总体 $X$ 是何分布,只要有 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 来自 $X$,且 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$,则

① $E(\overline{X})=\mu, D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$;

② $E(S^2)=\sigma^2, E(S^{*2})=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$.

其中,$S^{*2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

(4) 抽样分布的补充性质.

① 若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有

$$E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n.$$

② 若 $T \sim t(n)$,则

$$E(T)=0, D(T)=\frac{n}{n-2} \quad (n>2).$$

若 $T$ 的上侧 $\alpha$ 分位数记作 $t_\alpha(n)$,则

$$t_\alpha(n)=-t_{1-\alpha}(n).$$

③ 若 $F \sim F(m,n)$,则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n,m)$.

若 $F$ 的上侧 $\alpha$ 分位数记作 $F_\alpha(m,n)$,则

$$F_\alpha(m,n)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}.$$

④ 若 $U \sim N(0,1)$,$u_\alpha$ 为其上侧 $\alpha$ 分位数,则 $u_\alpha=-u_{1-\alpha}$.

## 五、经验分布函数

假设 $X$ 为随机变量;$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为从小到大排列的一组样本值. 令

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & 当 x<x_1,\\ 1/n, & 当 x_1\leqslant x<x_2,\\ \vdots & \\ k/n, & 当 x_k\leqslant x<x_{k+1},\\ \vdots & \\ 1, & 当 x\geqslant x_n.\end{cases}$$

称 $F_n(x)$ 为经验分布函数(或样本分布函数).

性质:$F_n(x)=\{X\leqslant x\}$ 的频率.

## 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量

**提示** 既然统计量是随机变量,于是也可对它求数学期望、方差等,但为了使计算简便,熟记几个常用统计量的数字特征是有益的.

**【例 5.1】** 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,令

$$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|,试求 \mathrm{E}(Y),\mathrm{D}(Y).$$

**【分析】** 因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,从而 $|X_i-\mu|$ 也独立同分布$(i=1,2,\cdots,n)$,于是根据数字特征的性质,只须求 $\mathrm{E}(|X_i-\mu|)$ 和 $\mathrm{D}(|X_i-\mu|)$

**【解】** 令 $Y_i=X_i-\mu$,则 $Y_i\sim N(0,\sigma^2)$.

于是
$$\mathrm{E}(|X_i-\mu|)=\mathrm{E}(|Y_i|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

故
$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(|X_i-\mu|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

而
$$\mathrm{D}(|X_i-\mu|)=\mathrm{D}(|Y_i|)=\mathrm{E}(Y_i^2)-[\mathrm{E}(|Y_i|)]^2$$
$$=\mathrm{D}(Y_i)-\frac{2}{\pi}\sigma^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2.$$

故
$$\mathrm{D}(Y)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(|X_i-\mu|)=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}.$$

**【例 5.2】** 设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$,$(n\geqslant 2)$,其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $\mathrm{E}(Y)$.

**【分析】** 利用
$$\mathrm{E}(S^2)=\mathrm{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right]=\sigma^2,$$

即 $\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right]=(n-1)\sigma^2$ 进行计算较简便.若直接利用期望的性质进行计算,则是很复杂的.故掌握几个常用统计量的数字特征是必要的.

【解】令 $\overline{X}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$,

显然有 $2\overline{X}=\overline{X}'+\overline{X}''$. 并注意到 $X_i-\overline{X}'$ 与 $X_{n+i}-\overline{X}''(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立. 因此

$$\begin{aligned}
E(Y)&=E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\Big]=E\Big\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')+(X_{n+i}-\overline{X}'')]^2\Big\}\\
&=E\Big\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')^2+2(X_i-\overline{X}')(X_{n+i}-\overline{X}'')+(X_{n+i}-\overline{X}'')^2]\Big\}\\
&=E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}')^2\Big]+0+E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i}-\overline{X}'')^2\Big]\\
&=(n-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2=2(n-1)\sigma^2.
\end{aligned}$$

**【例 5.3】** 从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 $n$ 的样本,如果要求其样本均值位于区间(1.4, 5.4)内的概率不小于 0.95,问样本容量 $n$ 至少应取多大?

**【分析】** 利用统计量 $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 即可得到结果.

**【解】** 令 $\overline{X}$ 表示样本均值,则因为

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-3.4}{6}\sim N(0,1),$$

故

$$\begin{aligned}
P(1.4<\overline{X}<5.4)&=P(-2<\overline{X}-3.4<2)\\
&=P\left\{\frac{|\overline{X}-3.4|}{6/\sqrt{n}}<\frac{2}{6/\sqrt{n}}\right\}\\
&=P\left\{\sqrt{n}\,\frac{|\overline{X}-3.4|}{6}<\frac{1}{3}\sqrt{n}\right\}\\
&=2\Phi\Big(\frac{1}{3}\sqrt{n}\Big)-1\geqslant 0.95.
\end{aligned}$$

查表得 $\frac{1}{3}\sqrt{n}\geqslant 1.96$,即 $n\geqslant 34.57$. 故 $n$ 至少应取 35.

**【例 5.4】** 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_7)$ 取自总体 $X\sim N(0,0.5^2)$,则 $P\Big\{\sum_{i=1}^{7}X_i^2>4\Big\}=$ ________.

**【解】** 因为 $\sum_{i=1}^{7}\Big(\frac{X_i}{0.5}\Big)^2\sim\chi^2(7)$,于是

$$P\Big\{\sum_{i=1}^{7}X_i^2>4\Big\}=P\Big\{\sum_{i=1}^{7}\Big(\frac{X_i}{0.5}\Big)^2>16\Big\}.$$

查表可知 $\chi^2_{0.025}(7)=16.03$,故答案应填 0.025.

## 题型二　求统计量的分布

**提示** 弄清楚三个重要分布:$\chi^2$ 分布、$t$ 分布与 $F$ 分布所对应的随机变量的结构是求解这类问题的关键.

**【例 5.5】** 设 $X$ 与 $Y$ 相互独立且都服从 $N(0,3^2)$,而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 $X$ 和 $Y$ 的简单随机样本,则统计量

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$$

服从的分布是________.

【解】易知分子$\sum_{i=1}^{9}X_i \sim N(0,3^4)$，于是$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i \sim N(0,1)$，而$\sum_{i=1}^{9}(Y_i/3)^2 \sim \chi^2(9)$，由$t$分布的定义有

$$U=\frac{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(Y_i/3)^2}} \sim t(9).$$

故答案应填$t(9)$.

【例 5.6】设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\qquad S_4^2==\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为$n-1$的$t$分布的随机变量是

(A)$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.　　(B)$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$.

(C)$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$.　　(D)$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.　　【　】

【解】因为

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),\frac{nS_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

故易知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1),$$

即应选(B).

【例 5.7】设总体$X \sim N(0,1^2)$，从总体中取一个容量为6的样本$X_1,X_2,\cdots,X_6$，设$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，试确定常数$C$，使随机变量$CY$服从$\chi^2$分布.

【解】因为$X_1+X_2+X_3 \sim N(0,\sqrt{3}^2)$，所以$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1^2)$

于是$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$，　同理$\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$.

由于$\chi^2$分布的可知性，故

$$\frac{1}{3}Y=\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(2).$$

可知$C=\frac{1}{3}$.

【例 5.8】设总体$X \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2$是总体的一个样本，求$Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$的分布.

【解】$Y=\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\Big/\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2$,

又

$$X_1+X_2 \sim N(0,2\sigma^2),\quad X_1-X_2 \sim N(0,2\sigma^2),$$

于是

$$\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1),\quad \left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

且易验证$X_1+X_2$与$X_1-X_2$相互独立.由统计量$F$的定义可知$Y \sim F(1,1)$.

【例 5.9】设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 $X$ 的简单随机样本，

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,\quad Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}.$$

证明:统计量 $Z$ 服从自由度为 2 的 $t$ 分布.

【证明】设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则

$$EY_1=EY_2=\mu,DY_1=\frac{1}{36}D\Big(\sum_{i=1}^{6}X_i\Big)=\frac{1}{36}\times 6\sigma^2=\frac{1}{6}\sigma^2,$$

$$DY_2=\frac{1}{3^2}\times 3\sigma^2=\frac{1}{3}\sigma^2.$$

由于 $Y_1$ 和 $Y_2$ 相互独立,可知 $E(Y_1-Y_2)=0$.

$$D(Y_1-Y_2)=D(Y_1)+D(Y_2)=\frac{1}{6}\sigma^2+\frac{1}{3}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{2}.$$

从而
$$U=\frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1).$$

由正态总体样本方差的性质,可知 $\chi^2=\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$. 由于 $Y_1,Y_2,S^2$ 相互独立,可见 $Y_1-Y_2$ 与 $S^2$ 独立. 于是,由服从 $t$ 分布随机变量的结构,易知

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{U}{\sqrt{\chi^2/2}}\text{ 服从自由度为 2 的 } t \text{ 分布.}$$

## 第 3 节　思维定势

**思维定势**　若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $X$ 的一组简单随机样本,则凡是涉及统计量 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的分布问题,一般联想到用 $\chi^2$ 分布,$t$ 分布和 $F$ 分布的定义进行讨论.

【例 5.10】设 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本,$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$. 则当 $a=$ ________,$b=$ ________时,统计量 $X$ 服从 $\chi^2$ 分布,其自由度为________.

【解】设 $Y_1=X_1-2X_2,Y_2=3X_3-4X_4$,则 $E(Y_1)=E(Y_2)=0,D(Y_1)=20,D(Y_2)=100$. 因此 $Y_1\sim N(0,20),Y_2\sim N(0,100)$. 更进一步

$$\frac{Y_1}{\sqrt{20}}\sim N(0,1),\frac{Y_2}{\sqrt{100}}\sim N(0,1)$$

由 $\chi^2$ 分布的定义知

$$I=\left(\frac{Y_1}{\sqrt{20}}\right)^2+\left(\frac{Y_2}{\sqrt{100}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2).$$

故 $a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$,自由度为 2.

习 题 五

**1. 填空题.**

(1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，且随机变量 $Y = C\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$，则常数 $C =$ ________.

(2) 设 $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 取自正态总体 $X \sim N(0, 2^2)$ 的样本且 $Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$，则 $a =$ ________，$b =$ ________ 时，$Y$ 服从 $\chi^2$ 分布，自由度为________.

(3) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体为 $\chi^2(n)$ 分布的样本，则 $\mathrm{E}(\overline{X}) =$ ________，$\mathrm{D}(\overline{X}) =$ ________.

**2. 单项选择题.**

(1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，则样本二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 的方差为

A. $\sigma^2$.　　B. $\frac{\sigma^2}{n}$.　　C. $\frac{2\sigma^4}{n}$.　　D. $\frac{\sigma^4}{n}$.　　【　】

(2) 设 $X_1, X_2$ 为取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 必

A. 线性相关.　　B. 不相关.　　C. 相关但非线性相关.　　D. 不独立.　　【　】

(3) 设总体 $X$ 服从正态分布 $N(0, 2^2)$，而 $X_1, \cdots, X_{15}$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本，则随机变量 $Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)}$ 所服从的分布为

A. $\chi^2(15)$.　　B. $t(14)$.　　C. $F(10,5)$.　　D. $F(1,1)$.　　【　】

**3. 计算题.**

(1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为 $N(0, 0.3^2)$ 的一个样本，求 $P\left[\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right]$.

(2) 从一正态总体中抽取容量为 10 的样本，若有 2% 的样本均值与总体均值之差的绝对值在 4 以上，试求总体的标准差.

(3) 设总体 $X \sim N(72, 100)$，为使样本均值大于 70 的概率不小于 0.95，问样本容量至少应取多大？

(4) 设总体 $X$ 服从 $N(\mu, 4)$，样本 $(X_1, \cdots, X_n)$ 来自 $X$，$\overline{X}$ 为样本均值. 问样本容量 $n$ 至少应取多大才能使

① $\mathrm{E}(|\overline{X} - \mu|^2) \leqslant 0.1$；

② $P(|\overline{X} - \mu| \leqslant 0.1) \geqslant 0.95$.

(5) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$(X_1, \cdots, X_n)$ 为取自 $X$ 的样本，问样本容量 $n$ 至少应取多大才能使

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant 1.5\right) \geqslant 0.95.$$

(6) 从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$（其中 $\mu$ 和 $\sigma > 0$ 均为未知）中抽取一容量为 16 的样本，$S^2$ 为样本方差，求：

① $P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} > 2.041\right)$；

② 方差 $\mathrm{D}(S^2)$.

(7) 设 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，证明

① $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2-n(\overline{X}-\mu)^2$;

② $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$.

(8) 随机观察总体 $X$,得 10 个数据:3.2,2.5,−4,2.5,0,3,2,2.5,4,2.求经验分布函数.

(9) 考察某块麦田发生某种虫害的程序,若选取8个样本点,每点规定1 m²,实测害虫数量为:0,2,3,0,1,0,1,2.求害虫总体 $X$ 的经验分布函数.

参 考 答 案

**1.** (1) $\frac{1}{n\sigma^2}$. (2) $\frac{1}{20},\frac{1}{100}$,2. (3) $n$,2.

**2.** (1)C (2)B (3)C

**3.** (1) $P(\chi^2(10)>16)=0.1$.

(2) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}}\sim N(0,1)$,$P(|\overline{X}-\mu|>4)=0.02$,可得 $\sigma=5.43$.

(3) $n\geqslant 68.0625$.

(4) ① $E|\overline{X}-\mu|^2=D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{4}{n}\leqslant 0.1$,故 $n\geqslant 40$.

② 利用中心极限定理可得 $n\geqslant 1537$.

(5) 利用 $\chi^2$ 分布可得 $n\geqslant 27$.

(6) ①0.99 ② $\frac{2}{15}\sigma^4$.

(7) 直接验证即可.

$$(8)F_{10}(x)=\begin{cases}0, & x<-4,\\ \frac{1}{10}, & -4\leqslant x<0,\\ \frac{2}{10}, & 0\leqslant x<2,\\ \frac{4}{10}, & 2\leqslant x<2.5,\\ \frac{7}{10}, & 2.5\leqslant x<3,\\ \frac{8}{10}, & 3\leqslant x<3.2,\\ \frac{9}{10}, & 3.2\leqslant x<4,\\ 1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$

$$(9)F_8(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{3}{8}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{5}{8}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{7}{8}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

# 第六章　参数估计

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、矩估计与最大似然估计

**1. 点估计的概念**

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$X$的样本,若将样本的某个函数$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$作为总体分布中未知参数$\theta$的估计,则称$\hat{\theta}$为$\theta$的点估计量.在抽样后,$\hat{\theta}$的值$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为$\theta$的估计值.

**2. 矩估计法**

设总体$X$的分布中含有$m$个未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$,其$k$阶原点矩$\mathrm{E}(X^k)=\alpha_k(\theta_1,\cdots,\theta_m)$,$k=1,2,\cdots,m$.令

$$\alpha_k(\theta_1,\cdots,\theta_m)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i^k,k=1,2,\cdots,m,$$

则由上述方程所求得的解$\hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,$k=1,2,\cdots,m$称为未知参数$\theta_k$的矩估计量,简称矩估计.只要求掌握$m=1,2$的情形.

**3. 最大似然估计法**

设总体$X$的概率密度为$f(x;\theta_1,\cdots,\theta_m)$(若$X$为离散型,则用分布律代替),$\theta_1,\cdots,\theta_m$为未知参数.记$x_1,\cdots,x_n$为样本$X_1,\cdots,X_n$的观测值,则称

$$L(X_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$$

为似然函数,若有$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$,$(i=1,\cdots,m)$使得

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_m)=\max_{(\theta_1,\cdots,\theta_m)}L(x_1,\cdots,x_n;\vartheta_1,\cdots,\theta_m),$$

则称$\hat{\theta}_i(x_i,\cdots,x_n)$为$\theta_i$的最大似然估计值,而将$\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)$称为$\theta_i$最大似然估计量$(i=1,2,\cdots,n)$.只要求掌握$m=1,2$的情形.

**【例 6.1】** 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自$X$的样本,试求:

(1)$\mu,\sigma^2$的矩估计;

(2)$\mu,\sigma^2$的最大似然估计.

**【解】** (1) 因为$\mathrm{E}(X)=\mu$,$\mathrm{D}(X)=\sigma^2$,故令

$$\begin{cases}\mu=\overline{X}\\ \sigma^2=M_2\end{cases},$$

其中,$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,于是有$\mu,\sigma^2$的矩估计为

$$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

(2) 总体 $X$ 的密度为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,\sigma>0.$$

于是似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)=f(x_1;\mu,\sigma^2)\cdot\cdots\cdot f(x_n;\mu,\sigma^2)$$
$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

两边取对数有

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2},$$

于是

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=0,\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=0$,即得 $\mu,\sigma^2$ 的最大似然估计为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

## 二、估计量的评选标准

### 1. 无偏性

设 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $\theta$ 的估计量,若 $E(\hat{\theta})=\theta$,则称 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计.

### 2. 有效性

设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均为 $\theta$ 的无偏估计,若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$,则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

### 3. 一致性

设 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的估计量,若对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1$$

[上式即表示 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于 $\theta$,常记为 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta,n\to\infty$],则称 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的一致估计量(或相合估计量).

**【例 6.2】** 设 $X_1,X_2$ 是取自总体 $N(\mu,1)$($\mu$ 未知)的一个样本.试证如下三个估计量都是 $\mu$ 的无偏估计量,并确定最有效的一个:

$$\hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2,$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2,$$

$$\hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2,$$

【解】$E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=1\quad(i=1,2)$，于是

$$E(\hat{\mu}_1)=\frac{2}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)=\frac{2}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu,$$

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{4}\mu+\frac{3}{4}\mu=\mu,$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu,$$

故 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$ 均为 $\mu$ 的无偏估计.

因为 $X_1$ 与 $X_2$ 独立，

所以

$$D(\hat{\mu}_1)=\frac{4}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9},$$

$$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{5}{8},$$

$$D(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

比较可知 $\hat{\mu}_3$ 是 $\mu$ 的最有效估计量.

【例 6.3】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，试适当选择常数 $C$，使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计.

【解】由题设 $E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=\sigma^2\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$. 由题意

$$E\left[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2)\right]=\sigma^2,$$

即

$$C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=\sigma^2.$$

由于 $X_i,X_{i+1}$ 的独立性有

$$\begin{aligned}E(X_{i+1}-X_i)^2&=D(X_{i+1}-X_i)\\&=D(X_{i+1})+D(X_i)\\&=2\sigma^2.\end{aligned}$$

故

$$C\sum_{i=1}^{n-1}2\sigma^2=\sigma^2\Rightarrow C=\frac{1}{2(n-1)}.$$

## 三、区间估计

设 $\theta$ 为总体 $X$ 的分布中的未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 $X$ 的样本，若存在两个统计量 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使得对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 有

$$P\{\hat{\theta}_1\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2\}=1-\alpha,$$

则称$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$为 $\theta$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 分别称为置信下限和置信上限.

正态总体未知参数的置信区间如表 6-1 所示.

表 6-1

| 待估参数 | | 抽样分布 | 双侧置信区间 |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\sigma^2$ 已知 | $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$ | $\left(\overline{X}-u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ <br> $P\{\lvert U\rvert\geqslant u_\alpha\}=\alpha$ |
| | $\sigma^2$ 未知 | $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ | $\left(\overline{X}-t_\alpha\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_\alpha\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$ <br> $P\{\lvert T\rvert\geqslant t_\alpha=\alpha\}$ |
| $\sigma^2$ | $\mu$ 已知 | $W'=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$ | $\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_\alpha^2(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}\right]$ <br> $P\{W'\geqslant\chi_\alpha^2(n)\}=P\{W'\leqslant\chi_{1-\alpha}^2(n)\}=\dfrac{\alpha}{2}$ |
| | $\mu$ 未知 | $W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ | $\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right]$ |
| $\mu_1-\mu_2$ | $\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 已知 | $U=\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$ | $\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-u_\alpha\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\right.$ <br> $\left.(\overline{X}-\overline{X}_2)+u_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$ <br> $P\{\lvert U\rvert\geqslant u_\alpha\}=\alpha$ |
| | 已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 但 $\sigma^2$ 未知 | $T=\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ <br> $S^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ | $\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_\alpha(n_1+n_2-2)\cdot S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\right.$ <br> $\left.(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_\alpha(n_1+n_2-2)\cdot S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right]$ <br> $P\{\lvert T\rvert\geqslant t_\alpha\}=\alpha$ |
| $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | | $F=\dfrac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ | $\left[\dfrac{1}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\right.$ <br> $\left.F_\alpha(n_2-1,n_1-1)\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right]$ <br> $P\{F\geqslant F_\alpha(n_1-1,n_2-1)\}=\dfrac{\alpha}{2}$, <br> $P\left\{\dfrac{1}{F}\geqslant F_\alpha(n_2-1,n_1-1)\right\}=\dfrac{\alpha}{2}$ |

注 关于求置信区间的问题，应该说比较简单. 只要记住上述几个公式即可(当然能推导出此公式为好).

**【例 6.4】** 设总体 $X$ 的方差为 1，据来自 $X$ 的容量为 100 的简单随机样本，测得均值为 5，则 $X$ 的期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为________.

**【分析】** 当样本容量较大时，可将总体看做正态总体，于是本题属于已知方差，求均值的置信区间的问题，所求置信区间即为 $\left[\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，代入数值即得答案为

$[4.8,5.2]$.

## 四、重要公式与结论

(1)$E(\overline{X})=E(X)$,$E(S^2)=D(X)$,即样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 $S^2$ 分别是总体 $X$ 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 的无偏估计量.

(2) 样本的任意 $k$ 阶原点矩均是对应的总体 $k$ 阶原点矩的一致估计.

(3) 若 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计,且 $D(\hat{\theta})\to 0(n\to\infty)$,则 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的一致估计.

(4) 若 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的矩估计,$g(x)$ 为连续函数,则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计.

(5) 若 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的最大似然估计,$g(x)$ 为单调函数,则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的最大似然估计.

(6) 若$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$为 $\theta$ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间,$g(x)$ 为单调增加函数(或单调减少),则 $[g(\hat{\theta}_1),g(\hat{\theta}_2)]$(或$[g(\hat{\theta}_2),g(\hat{\theta}_1)]$)为 $g(\theta)$ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间.

# 第 2 节　重要题型的解题方法和技巧

## 题型一　求矩估计和最大似然估计

**提示** (1) 对于矩估计,只有一个未知参数时,令 $\overline{X}=E(X)$;有两个未知参数时,例如,$X\sim N(\mu,\sigma^2)(\mu,\sigma^2$ 未知),则 $\mu,\sigma^2$ 的矩估计量分别为 $\hat{\mu}=\overline{X}$,$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

(2) 对于最大似然估计,其求解步骤为:

① 写出似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$;

② 取对数 $\ln L$;

③ 求偏导数$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}$,$i=1,2,\cdots,m$;

④ 判断方程(组) $\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0$ 是否有解.若有解,则其解即为所求最大似然估计;若无解,则最大似然估计常在 $\theta_i$ 的边界点上达到.

**【例 6.5】** 一个罐子里装有黑球和白球,黑、白球数之比为 $a:1$.现有放回地一个接一个地抽球,直至抽到黑球为止,记 $X$ 为所抽的白球个数.这样做了 $n$ 次之后,获得一组样本 $X_1$,$X_2,\cdots,X_n$.基于此,求未知参数 $a$ 的矩估计和最大似然估计.

**【解】** 由题意知,随机变量 $X$ 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{a}{a+1}\cdot\left(\frac{1}{a+1}\right)^k,k=0,1,2,\cdots,$$

则 $EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{a}{a+1}\cdot\left(\frac{1}{a+1}\right)^k=\frac{a}{(a+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{a+1}\right)^{k-1}=\frac{1}{a}$,

令 $\overline{X}=EX\Rightarrow\hat{a}=\frac{1}{\overline{X}}$,即 $a$ 的矩估计 $\hat{a}=\frac{1}{\overline{X}}$.

对于给定的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,似然函数为

$$L(a)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{a}{a+1}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{X_i}\right]=\left(\frac{a}{a+1}\right)^n\left(\frac{1}{a+1}\right)^{\sum_{i=1}^{n}X_i},\text{于是}$$

$$\ln L(a)=n\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\ln(a+1).$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(a)}{\mathrm{d}a}=0$，则 $n\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}\right)-\dfrac{1}{a+1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=0\Rightarrow\hat{a}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

故 $a$ 的最大似然估计 $\hat{a}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

**【例 6.6】**设 $X$ 服从$(0,\theta)(\theta>0)$上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X$ 的样本，求 $\theta$ 的最大似然估计量与矩估计量.

**【解】**(1) $X$ 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

似然函数为 $\quad L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i\leqslant\theta,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

显然，当 $\theta>0$ 时，$L(\theta)$ 是单调减函数，$\theta$ 越小，$L(\theta)$ 就越大，但 $\theta\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，所以 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 是 $\theta$ 的最大似然估计量.

(2) 因 $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{x}{\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$,

令 $\quad\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $\quad$ 即$\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$，得 $\theta$ 的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}$.

**【例 6.7】**设随机变量 $X$ 的密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$,

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $x$ 的 $n$ 次观测值，试求 $\sigma$ 的最大似然估计.

**【解】**似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma)=\dfrac{1}{(2\sigma)^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$,

$$\ln L=(-n)\ln(2\sigma)-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

令 $\quad\dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=0$，得 $\sigma$ 的最大似然估计$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

**【例 6.8】**已知某种白炽灯泡寿命服从正态分布，在某星期中所生产的该种灯泡中随机抽取 10 只，测得其寿命(以小时计)为 1067,919,1196,785,1126,936,918,1156,920,948. 设总体参数均未知，试用最大似然估计法估计该星期中生产的灯泡能使用 1300 h 以上的概率.

**【解】**设总体，即白炽灯泡寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 由【例 6.1】可知 $\mu,\sigma^2$ 的最大似然估计为

$$\hat{\mu}=\overline{X}=997.1.$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10}X_i^2-10\overline{X}^2\right)=15574.29,$$

$$\hat{\sigma}\approx124.80.$$

故 $\quad P\{X>1300\}$ 的最大似然估计为 $1-\Phi\left(\dfrac{1300-997.1}{124.80}\right)=0.008$.

**【例 6.9】**设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

其中,$\theta>-1$ 是未知参数,$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的一个容量为 $n$ 的简单随机样本,分别用矩估计法和最大似然估计法求 $\theta$ 的估计量.

**【解】**总体 $X$ 的数学期望 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,

样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,令 $\overline{X}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,解之得未知参数 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值,则似然函数为

$$L=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod\limits_{i=1}x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

当 $0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$L>0$,且

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,\quad \frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0$,解得 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$,

从而 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

**【例 6.10】**设总体 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(x-\mu)/\theta}, & x\geqslant\mu\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

其中 $\theta>0$,$\theta,\mu$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 $X$ 的样本.试求 $\theta,\mu$ 的最大似然估计量.

**【解】**因为似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & x_i\geqslant\mu,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其他\end{cases},$$

于是 $$\ln L=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{\theta}\mu$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n}{\theta^2}\mu \quad ①$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{n}{\theta}>0. \quad ②$$

由②可知 $\ln L$ 关于 $\mu$ 单调增加,即 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta,\mu)$ 关于 $\mu$ 单调增加,又因为 $\mu\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$,故 $\mu$ 的最大似然估计为

$$\hat{\mu}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}.$$

另外，由式①，令$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}=0$，即得$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\},$$

注 从本例可以看出，最大似然估计可能在驻点，即似然方程的解上取得，也可能在未知参数的边界点上取得.

**【例 6.11】**设$Z=\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自$X$的样本.试求$\mathrm{E}(X)$的最大似然估计.

**【解】**因为$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{e}^Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$

$$=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.$$

故$\mathrm{E}(X)$为未知参数$\mu$与$\sigma^2$的函数，且分别为$\mu$与$\sigma^2$的单调增加函数.由最大似然估计的性质可知，只须求出$\mu,\sigma^2$的最大似然估计.因为对于总体$X$的样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，对应地有总体$Z=\ln X$的样本$Z_1=\ln X_1,Z_2=\ln X_2,\cdots,Z_n=\ln X_n$，故易得$\mu,\sigma^2$的最大似然估计量为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\hat{\mu})^2.$$

所以有$\mathrm{E}(X)$的最大似然估计量为

$$\mathrm{E}(\hat{X})=\mathrm{e}^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}=\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2\right].$$

**【例 6.12】**设总体$X$的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $\theta^2$ | $1-2\theta$ |

其中$\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$是未知参数，利用总体$X$的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求$\theta$的矩估计值和最大似然估计值.

**【解】**$\mathrm{E}X=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$,

$\overline{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2.$

令$\mathrm{E}X=\overline{x}$，即$3-4\theta=2$,

解得$\theta$的矩估计值为　$\hat{\theta}=\frac{1}{4}.$

对于给定的样本值，似然函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)},$$

令　$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，　解得　$\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}.$

因$\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$不合题意,所以$\theta$的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$

## 题型二 评价估计的优劣

**提示** 无偏性、有效性一般按定义判断,而一致性常用大数定律或重要结论来判断.

**【例 6.13】** 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是随机变量$X$的一个样本,试证:估计量$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,

$W=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iX_i$($\alpha_i\geqslant 0$为常数,$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$)都是$E(X)$的无偏估计,且$\overline{X}$的方差不超过$W$的方差.

**【证】** 因为$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot nE(X)=E(X)$,

$$E(W)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE(X)=E(X)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=E(X),$$

所以$\overline{X}$,$W$均为$E(X)$的无偏估计.

因为$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n}D(X)$,

$$D(W)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2D(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2D(X)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)D(X).$$

又由于 $(n-1)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j$. 即

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j}{n}.$$

而
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^2=1,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\geqslant\frac{1}{n}.\quad 故\ D(\overline{X})\leqslant D(W).$$

注 也可用 Lagrange 乘数法求函数$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$在条件$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$下的条件极值而得证.

**【例 6.14】** 设从均值为$\mu$,方差为$\sigma^2>0$的总体中分别抽取容量为$n_1,n_2$的两个独立样本,样本均值分别记为$\overline{X}_1,\overline{X}_2$. 试证:对于任意满足$a+b=1$的常数$a$和$b$,$T=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$都是$\mu$的无偏估计,并问$a,b$为多少时,$D(T)$达到最小?

**【分析】** 此类问题实质上是高等数学中的最值问题,不同课程之间的联系须引起注意.

**【证明】** 设总体为$X$,由已知有$E(X)=\mu$,$D(X)=\sigma^2$,于是

$$\begin{aligned}E(T)&=E(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=aE(\overline{X}_1)+bE(\overline{X}_2)\\&=aE(X)+bE(X)=(a+b)\mu=\mu.\end{aligned}$$

即 $T=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$是$\mu$的无偏估计. 因为

$$D(T) = D(a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2) = a^2 D(\overline{X}_1) + b^2 D(\overline{X}_2)$$

$$= a^2 \frac{\sigma^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma^2}{n_2} = \left[\frac{a^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2}{n_2}\right]\sigma^2.$$

为了求 $D(T)$ 的最小值,令

$$\frac{dD(T)}{da} = \left[\frac{2a}{n_1} - \frac{2(1-a)}{n_2}\right]\sigma^2 = 0.$$

解之得 $a = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$,并且 $\dfrac{d^2 D(T)}{da^2} = \dfrac{2(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}\sigma^2 > 0$,

故当 $a = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$ 时,$D(T)$ 达到最小,即此时有

$$a = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, b = \frac{n_2}{n_1 + n_2}.$$

**【例 6.15】** 设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自 $X$ 的简单随机样本.

(1) 求 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$;

(3) 讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性和一致性(相合性).

**【解】** (1) 因为 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^\theta \dfrac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x) dx = \dfrac{1}{2}\theta.$

于是,令 $E(X) = \overline{X}$,这里 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$,即 $\dfrac{1}{2}\theta = \overline{X}$,得 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

(2) $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = 4D(\overline{X}) = \dfrac{4}{n}D(X).$

因为 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^\theta \dfrac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x) dx = \dfrac{6}{20}\theta^2$,

故 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{\theta^2}{20}$. 于是 $D(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{5n}\theta^2$.

(3) 因为 $E(\hat{\theta}) = E(2\overline{X}) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = 2 \times \dfrac{1}{2}\theta = \theta$,

故 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 为 $\theta$ 的无偏估计量. 又 $D(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{5n}\theta^2 \to 0 (n \to \infty)$,故

$\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 为 $\theta$ 的一致估计.

## 题型三　区间估计或置信区间的命题

**提示** 区间估计可分为两类问题,一种是直接求未知参数的置信区间,即正问题,这类问题只须按相应的公式计算;另一种是已知置信区间或其长度反求置信区间中的未知量,例如样本容量等,即逆问题.

**【例 6.16】** 从一批钉子中随机抽取 16 枚,测得其长度(单位:cm) 为

2.14,　2.10,　2.13,　2.15,　2.13,　2.12,　2.13,　2.10

2.15， 2.12， 2.14， 2.10， 2.13， 2.11， 2.14， 2.11

假设钉子的长度 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，在下列两种情况下分别求总体均值 $\mu$ 的置信度为 90% 的置信区间.

(1) 已知 $\sigma = 0.01$； (2) $\sigma$ 未知.

**【解】**由观察值可得

$$\bar{x} = 2.125, \quad S = 0.01713.$$

(1) 已知 $\sigma = 0.01$， $1-\alpha = 0.90$， $\frac{\alpha}{2} = 0.05$， $n = 16$.

选取随机变量 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

由 $P\{|U| < u_{0.05}\} = 0.90$，查标准正态分布表得 $u_{0.95} = 1.645$.

计算 $$\bar{x} - \frac{u_{0.95}\times\sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 - \frac{1.645\times 0.01}{\sqrt{16}} = 2.121,$$

$$\bar{x} + \frac{u_{0.95}\times\sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 + \frac{1.645\times 0.01}{\sqrt{16}} = 2.129.$$

故所求的置信区间为(2.121,2.129).

(2) 由于 $\sigma$ 未知，因此用随机变量 $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，由 $P\{|T| < t_{0.05}(n-1)\} = 0.90$，

查 $t$ 分布表得 $$t_{0.05}(15) = 1.7531.$$

计算得 $$\bar{x} - t_{0.05}(15)\frac{S}{\sqrt{n}} = 2.125 - \frac{1.753\times 0.01713}{\sqrt{16}} \approx 2.117,$$

$$\bar{x} + t_{0.05}(15)\frac{S}{\sqrt{n}} = 2.125 + \frac{1.753\times 0.01713}{\sqrt{16}} \approx 2.133.$$

故所求的 $\mu$ 的置信度为 0.90 的区间为(2.117,2.133).

**【例 6.17】**随机地取某种炮弹 9 发作试验，测得炮口速度的样本标准差 $S = 11$(m/s). 设炮口速度 $X$ 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，求这种炮弹的炮口速度的标准差 $\sigma$ 的 95% 的置信区间.

**【解】**$1-\alpha = 0.95$， $\frac{\alpha}{2} = 0.025$， $n = 9$， $S = 11$.

取随机变量 $$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

由 $$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha,$$

查 $\chi^2$ 分布表，得 $\chi^2_{0.025}(8) = 17.535$， $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$.

故 $\sigma$ 的 95% 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{17.535}}, \frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{2.18}}\right) = (7.4, 21.1).$$

**【例 6.18】**假设 0.50,1.25,0.80,2.00 是来自总体 $X$ 的简单随机样本值，已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(1) 求 $X$ 的数学期望 $E(X)$(记 $E(X)$ 为 $b$)；

(2) 求 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(3) 利用上述结果求 $b$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

**【分析】** $Y$ 的分布已知,而 $X = e^Y$,于是,由一个随机变量函数的数学期望公式即可求得 $E(X)$,由于 $\mu$ 为正态总体 $Y$ 的均值,于是由单正态总体,方差已知时区间估计公式即得 $\mu$ 的置信区间,$b$ 为 $\mu$ 的函数,利用此函数关系即可求得 $b$ 的置信区间.

**【解】** (1) 因 $Y$ 的密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}, -\infty < y < +\infty.$$

于是,(令 $t = y - \mu$)

$$b = E(X) = E(e^Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^y e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t+\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$= e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} dt = e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

(2) 当置信度 $1-\alpha = 0.95$ 时,$\alpha = 0.05$,从而置信水平 $\alpha = 0.05$ 的双侧分位数 $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$,总体 $Y \sim N(\mu,1)$. 故 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间是

$$\left(\overline{Y} - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}, \overline{Y} + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}\right),$$

其中,$\overline{Y}$ 表示总体 $Y$ 的样本均值. 于是,将已知数据代入得

$$\overline{y} = \frac{1}{4}(\ln 0.5 + \ln 0.8 + \ln 1.25 + \ln 2) = \frac{1}{4}\ln 1 = 0,$$

故 $\mu$ 的 0.95 置信区间为 $(-0.98, 0.98)$.

(3) 因为 $b = e^{\mu+\frac{1}{2}}$,而 $e^x$ 单调递增,故 $b$ 的 0.95 置信区间为 $(e^{-0.98+\frac{1}{2}}, e^{0.98+\frac{1}{2}})$,即 $(e^{-0.48}, e^{1.48})$.

**【例 6.19】** 设 $X_1,\cdots,X_{2n}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,18)$ 的样本,$Y_1,\cdots,Y_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_2, 16)$ 的样本,要使 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95% 置信区间的长度不超过 $l$,问 $n$ 至少要取多大?

**【分析】** 因两个总体的方差已知,于是可选用对应的区间估计公式而求得 $n$.

**【解】** 因为置信区间的下限、上限分别为

$$(\overline{X} - \overline{Y}) - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, (\overline{X} - \overline{Y}) + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}.$$

于是置信区间的长度

$$L = 2u_{0.025}\sqrt{\frac{18}{2n} + \frac{16}{n}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{n}} \times 1.96 \leqslant l.$$

故 $n \geqslant \frac{384.16}{l^2}$. 即 $n$ 至少要取 $\left[\frac{384.16}{l^2}\right] + 1$ $\left(\text{假定}\frac{384.16}{l^2}\text{为非正整数}\right)$.

## 习　题　六

**1. 填空题.**

(1) 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $\sigma^2$ 已知，总体均值 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\overline{X}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，则 $\lambda=$ ________.

(2) 设由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，得样本均值 $\overline{X}=5$，则未知参数 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为________.

(3) 设 $X_1,X_2$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，若 $CX_1+\frac{1}{1999}X_2$ 为 $\mu$ 的一个无偏估计，则 $C$ = ________.

(4) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $X\sim U(\theta,\theta+1)(\theta>0)$ 的样本，则 $\theta$ 的矩估计量为________；最大似然估计量为________.

(5) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$a,b$ 为常数，且 $0<a<b$，则随机区间

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{b},\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{a}\right]$$

的长度 $L$ 的数学期望为________.

**2. 选择题.**

(1) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma^2$ 已知，则总体均值 $\mu$ 的置信区间长度 $l$ 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是

A. 当 $1-\alpha$ 缩小时，$l$ 缩短.　　B. 当 $1-\alpha$ 缩小时，$l$ 增大.

C. 当 $1-\alpha$ 缩小时，$l$ 不变.　　D. 以上说法均错.　　【　　】

(2) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$ 已知，若样本容量 $n$ 和置信度 $1-\alpha$ 均不变，则对于不同的样本观测值，总体均值 $\mu$ 的置信区间的长度

A. 变长.　　B. 变短.　　C. 不变.　　D. 不能确定.【　　】

(3) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且同分布，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$D(X_i)=\sigma^2$，则 $S$

A. 是 $\sigma$ 的一致估计.　　B. 是 $\sigma$ 的无偏估计.

C. 是 $\sigma$ 的是通过似然函数求的.　　D. 与 $\overline{X}$ 相互独立.　　【　　】

(4) 设 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计，且 $D(\hat{\theta})\neq 0$，则 $\hat{\theta}^2$ 必为 $\theta^2$ 的

A. 无偏估计.　　B. 有偏估计.　　C. 一致估计.　　D. 有效估计.【　　】

(5) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则 $\mu^2+\sigma^2$ 的矩估计量为

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.　　B. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

C. $\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$.　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.　　【　　】

(6) 设总体 $X$ 的分布中未知参数 $\theta$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是 $[T_1,T_2]$，即

$$P(T_1 \leqslant \theta \leqslant T_2) = 1-\alpha,$$

则下列说法正确的是

A. 对 $T_1,T_2$ 的观测值 $t_1,t_2,\theta \in [t_1,t_2]$.　B. $\theta$ 以 $1-\alpha$ 的概率落入区间 $[T_1,T_2]$.

C. 区间 $[T_1,T_2]$ 以 $1-\alpha$ 的概率包含 $\theta$.　D. $\theta$ 的数学期望 $E(\theta)$ 必属于 $[T_1,T_2]$.

【　】

**3. 计算与证明题.**

(1) 设总体 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布，$X_1,\cdots,X_n$ 为样本，试求 $\lambda$ 的矩估计和最大似然估计.

(2) 设总体 $X$ 服从 $(a,b)$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 $X$ 的样本，试求 $a^3,b^3$ 的矩估计和最大似然估计.

(3) 设总体 $X$ 的密度函数为　$f(x,\mu,\sigma^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x^{-1} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x>0,$

其中，$-\infty < \mu < +\infty, \sigma^2 > 0$ 为未知参数，试求 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的最大似然估计.

(4) 设总体 $X$ 服从 $(0,\theta)$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 $X$ 的样本.

① 求 $\theta$ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$，并讨论其无偏性和一致性；

② 求 $\theta$ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_2$，并讨论其无偏性和一致性.

(5) 设总体 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda a x^{a-1} e^{-\lambda x^a}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0, a > 0)$$

据来自总体 $X$ 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求未知参数 $X$ 的最大似然估计量.

(6) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 $X$ 的样本，$\alpha_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$，证明

① $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ 为 $E(X)$ 的无偏估计；

② 在上述所有无偏估计中，以 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 最有效.

(7) 设某产品的性能指标 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机抽取 20 个产品进行检测，检测后经计算得这些产品的性能指标均值 $\overline{X} = 5.21$，方差 $S^2 = 0.049$，试求 $X$ 的标准差 $\sigma$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

(8) 设某产品的性能指标在技术改进前服从正态分布 $N(\mu_1, 2.18^2)$，而在改进后服从 $N(\mu_2, 1.76^2)$，现对改进前的产品随机抽取 200 个，算得均值为 5.32，改进后的产品抽取 100 个，算得均值为 5.76，试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95% 的置信区间.

参　考　答　案

**1.** (1) $\lambda = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　(2) (4.412, 5.588).　(3) $\dfrac{1998}{1999}$.　(4) $\overline{X}-\dfrac{1}{2}, \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.　(5) $n\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\sigma^2$.

**2.** (1) A　(2) C　(3) A　(4) B　(5) D　(6) C

**3.** (1) $\lambda$ 的矩估计 $\hat{\lambda}_1 = \overline{X}$，$\lambda$ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}_2 = \overline{X}$，其中 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

(2) $a^3,b^3$ 的矩估计为 $\hat{a}^3=(\overline{X}-\sqrt{3M_2})^3,\hat{b}^3=(\overline{X}+\sqrt{3M_2})^3$. 其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$;$a^3,b^3$ 的最大似然估计为 $\hat{a}^3=X_{(1)}^3,\hat{b}^3=X_{(n)}^3$,其中 $X_{(1)},X_{(n)}$ 分别为样本的最小、最大次序统计量.

(3)$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\hat{\mu})^2$.

(4)①$\hat{\theta}_1=2\overline{X}$,且具有无偏性和一致性;②$\hat{\theta}_2=\max\limits_{l\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$,为有偏估计,但有一致性.

(5)$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^a}$.　　(6) 利用多元函数求极值为 Lagrange 乘数法.

(7) 先求 $\sigma^2$ 的置信区间[0.0282,0.1043],于是得 $\sigma$ 的置信区间[0.168,0.323].

(8) 为两正态总体下,方差已知,均值差的区间估计. 置信区间为[−0.899,0.019].

# 第七章　假设检验

## 第1节　重要概念、定理和公式的剖析

### 一、显著性检验的基本思想

为了对总体的分布类型或分布中的未知参数作出推断，首先对它们提出一个假设 $H_0$，然后在 $H_0$ 为真的条件下，通过选取恰当的统计量来构造一个小概率事件，若在一次试验中，小概率事件居然发生了，就完全有理由拒绝 $H_0$ 的正确性，否则没有充分理由拒绝 $H_0$ 的正确性，从而接受 $H_0$，这就是显著性检验的基本思想.

### 二、假设检验的基本步骤

(1) 由实际问题提出原假设 $H_0$(与备选假设 $H_1$)；

(2) 选取适当的统计量，并在 $H_0$ 为真的条件下确定该统计量的分布；

(3) 根据问题要求确定显著性水平 $\alpha$(一般题目中会给定)，从而得到拒绝域；

(4) 由样本观测值计算统计量的观测值，看是否属于拒绝域，从而对 $H_0$ 作出判断.

### 三、两类错误

当 $H_0$ 本来是正确的，但检验后作出了拒绝 $H_0$ 的判断，这种错误称为第一类错误，也称拒真错误；当 $H_0$ 本来是不正确的，但检验后作出了接受 $H_0$ 的判断，这种错误称为第二类错误，也称受伪错误。

## 四、正态总体未知参数的假设检验(见表 7-1)

表 7-1 (检验水平为 $\alpha$)

| | | 原假设 $H_0$ | $H_0$ 下的检验统计量及分布 | 备择假设 $H_1$ | $H_0$ 的拒绝域 |
|---|---|---|---|---|---|
| 一个正态总体 | $\sigma^2$ 已知 | $\mu=\mu_0$ | 当 $\mu=\mu_0$ 时,<br>$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ | $\mu\neq\mu_0$ | $\lvert U\rvert>u_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $\begin{cases}\overline{X}>\mu_0+u_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ \overline{X}<\mu_0-u_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{cases}$ |
| | | $\mu\leqslant\mu_0$ | | $\mu>\mu_0$ | $U>u_\alpha$ 即 $\overline{X}>\mu_0+u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| | | $\mu\geqslant\mu_0$ | | $\mu<\mu_0$ | $U<-\mu_\alpha$ 即 $\overline{X}<\mu_0-u_\alpha\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| | $\sigma^2$ 未知 | $\mu=\mu_0$ | 当 $\mu=\mu_0$ 时,<br>$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ | $\mu\neq\mu_0$ | $\lvert T\rvert>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\begin{cases}\overline{X}>\mu_0+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}\\ \overline{X}<\mu_0-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}\end{cases}$ |
| | | $\mu\leqslant\mu_0$ | | $\mu>\mu_0$ | $T>t_\alpha(n-1)$ 即 $\overline{X}>\mu_0+t_\alpha(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ |
| | | $\mu\geqslant\mu_0$ | | $\mu<\mu_0$ | $T<-t_\alpha(n-1)$ 即 $\overline{X}>\mu_0-t_\alpha(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ |
| | $\mu$ 已知 | $\sigma^2=\sigma_0^2$ | 当 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 时,<br>$W'=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\sim\chi^2(n)$ | $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ | $W'>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $W'<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ |
| | | $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ | | $\sigma^2>\sigma_0^2$ | $W'>\chi^2_\alpha(n)$ |
| | | $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ | | $\sigma^2<\sigma_0^2$ | $W'<\chi^2_{1-\alpha}(n)$ |
| | $\mu$ 未知 | $\sigma^2=\sigma_0^2$ | 当 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 时,<br>$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ | $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ | $W>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $W<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ |
| | | $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ | | $\sigma^2>\sigma_0^2$ | $W>\chi^2_\alpha(n-1)$ |
| | | $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ | | $\sigma^2<\sigma_0^2$ | $W<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ |
| 两个正态总体 | $\sigma_1^2$,$\sigma_2^2$ 已知 | $\mu_1-\mu_2=\delta$ | 当 $\mu_1-\mu_2=\delta$ 时,<br>$U=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$ | $\mu_1-\mu_2\neq\delta$ | $\lvert U\rvert>u_{\frac{\alpha}{2}}$ |
| | | $\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ | | $\mu_1-\mu_2>\delta$ | $U>u_\alpha$ |
| | | $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ | | $\mu_1-\mu_2<\delta$ | $U<-u_\alpha$ |
| | $\sigma_1^2$,$\sigma_2^2$ 未知但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ | $\mu_1-\mu_2=\delta$ | 当 $\mu_1-\mu_2=\delta$ 时,<br>$T=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-\delta}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$<br>$S^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ | $\mu_1-\mu_2\neq\delta$ | $\lvert T\rvert>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ |
| | | $\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ | | $\mu_1-\mu_2>\delta$ | $T>t_\alpha(n_1+n_2-2)$ |
| | | $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ | | $\mu_1-\mu_2<\delta$ | $T<-t_\alpha(n_2+n_2-2)$ |
| | $\mu_1$,$\mu_2$ 未知 | $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ | 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时,<br>$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ | $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ | $F>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F<F_{\frac{\alpha}{2}}^{-1}(n_2-1,n_1-1)$ |
| | | $\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$ | | $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ | $F>F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ |
| | | $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$ | | $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ | $F<F_\alpha^{-1}(n_2-1,n_1-1)$ |

## 五、假设检验与区间估计的联系

参数的假设检验与区间估计虽然是统计推断的两种不同形式，但它们也有密切的联系.下面通过一种具体的情形予以说明：设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$ 已知，$x_1,\cdots,x_n$ 为样本观测值.对给定的显著水平 $\alpha$，检验假设

$$H_0:\mu=\mu_0,\quad H_1:\mu\neq\mu_0.$$

易知选取检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，可得 $\mu_0$ 的接受域为

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\frac{\alpha}{2}}$$

即

$$\mu_0\in\left(\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad ①$$

另外，由单正态总体在方差已知时，$\mu$ 的区间估计公式可知，此时 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计是 $\left(\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，这正好为式①.因此由假设检验（$\mu=\mu_0$）的接受域即可得到 $\mu$ 的区间估计，而且不难发现反之亦然.其他情形也有类似的结果.但也要指出的是在统计结果的解释上，这两种统计推断形式是有差别的，在此不再赘述.

# 第2节　重要题型的解题方法和技巧

### 题型一　正态总体的均值和方差的假设检验

**提示** 假设检验的问题一般可按下列步骤进行：

(1) 根据具体问题作出假设；

(2) 选取相应的检验统计量；

(3) 写出拒绝域或接受域；

(4) 将已知数据代入统计量进行计算即可做出判断.

**【例 7.1】** 食品厂用自动装罐机装罐头食品，每罐标准重量为 500 g，每隔一定时间需要检验机器的工作情况，现抽 10 罐，测得其重量(单位:g)：

495，　510，　505，　498，　503，　492，　502，　512，　497，　506.

假设重量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试问机器工作是否正常（$\alpha=0.02$）？

**【解】** ① $H_0:\mu=500$，② 因 $\sigma^2$ 未知，所以选取统计量，在 $H_0$ 成立的条件下

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-500}{S/\sqrt{10}}\sim t(9).$$

由样本数据，得 $\overline{x}=502$，　$s=6.5$，　$T_0=\dfrac{502-500}{6.5/\sqrt{10}}=0.97$.

查 $t$ 分布表，得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.01}(9)=2.82$.

因为 $|T_0|=0.97<2.82$，故可认为自动装罐机工作正常.

**【例 7.2】** 用包装机包装某种洗衣粉，在正常情况下，每袋重量为 1000 g，标准差 $\sigma$ 不能超过 15 g.假设每袋洗衣粉的净重服从正态分布.某天检验机器工作的情况，从已装好的袋中随

机抽取 10 袋，测得其净重(单位:g) 为

1020， 1030， 968， 994， 1014， 998， 976， 982， 950， 1048.

问这天机器是否工作正常($\alpha = 0.05$)?

【解】① $H_0:\sigma^2 \leqslant 15^2$，② 选取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$.

对于 $\alpha = 0.05$，查 $\chi^2$ 分布表，得 $\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$. 由样本数据，得

$$\bar{x} = 998, \quad s = 30.23, \quad \chi_0^2 = \frac{9 \times 30.23^2}{15^2} = 36.5540.$$

因为 $\chi_0^2 = 36.554 > \chi^2_{0.05}(9) = 16.919$，

故拒绝接受 $H_0$，即包装机在这天工作不正常，应调整.

【例 7.3】设$(X_1,\cdots,X_m)$ 是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，$(Y_1,\cdots,Y_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 均未知，但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，试在显著性水平 $\sigma$ 下，检验下列假设

$$H_0:\mu_1 - \mu_2 = \delta, \quad H_1:\mu_1 - \mu_2 > \delta,$$

$\delta$ 为已知常数.

【分析】首先备选假设 $H_1$ 不写成 $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$，是因为根据实际问题不须考虑或不可能有$\mu_1 - \mu_2 < \delta$ 的情形，其次要在 $H_0$ 为真的条件下找到恰当的统计量，这与 $\delta = 0$ 的情形是类似的.

【解】选取下列检验统计量

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \sigma}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} \sim t(m+n-2),$$

其中 $$S_W^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}.$$

于是对显著性水平 $\alpha$，可得拒绝域

$$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} \sim t(m+n-2).$$

其中 $t_\alpha(m+n-2)$ 为 $t(m+n-2)$ 分布的 $\alpha$ 分位数，

即 $$P\left\{\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} \geqslant t_\alpha(m+n-2)\right\} = \alpha.$$

注 本题为单边检验问题，不难发现它与双边检验并没有什么本质的不同，只是拒绝域仅在一侧选取.

## 题型二 有关两类错误的命题

提示 正确理解两类错误的含义是求解的关键.

【例 7.4】设$(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu,4)$ 的一个样本. 在显著性水平 $\alpha$ 下检验

$$H_0:\mu = 0, \quad H_1:\mu \neq 0.$$

现取拒绝域 $W = \left\{(x_1,\cdots,x_n) \mid \sqrt{n}\,\dfrac{|\bar{x}|}{2} > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$. 当实际情况为 $\mu = 1$ 时，试求犯第二类错误的概率.

【分析】第二类错误的概率为 $P$(接受 $H_0 \mid H_0$ 为假) $= P$(样本观测值不属于拒绝域 $\mid \mu = 1$)

【解】设犯第二类错误的概率为$\beta$，则因为$H_0$不成立，$\mu=1$时，总体$X\sim N(1,4)$，于是$\overline{X}\sim N\left(1,\frac{4}{n}\right)$，故

$$\beta=P\left\{\sqrt{n}\frac{|\overline{X}|}{2}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=P\left\{|\overline{X}|\leqslant\frac{2u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}=\Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}+u_{\frac{\alpha}{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-u_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

注 当样本容量$n$与显著性水平$\alpha$给定时即可查表算出$\beta$，当$n$不大时，一般$\beta$都比较大，这也是显著性检验中为什么“拒绝$H_0$”是可靠的，而“接受$H_0$”是不大可靠的原因. 另外可以看出当容量$n\to\infty$时，$\beta\to 0$，故要两类错误都尽可能小，必须将容量取得足够大.

【例 7.5】设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$未知，$x_1,\cdots,x_n$为来自$X$的样本值，现对$\mu$进行假设检验. 若在显著性水平$\alpha=0.05$下拒绝了$H_0:\mu=\mu_0$，则当显著性水平改为$\alpha=0.01$时，下列结论正确的是

(A) 必拒绝$H_0$.　　(B) 必接受$H_0$.

(C) 第一类错误的概率变大.　　(D) 可能接受，也可能拒绝$H_0$.　　【　】

【解】因为此时假设检验的拒绝域为

$$|t|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

故对固定的样本值，$\alpha$变小时，上述不等式不一定仍成立，所以选(D).

## 习　题　七

**1. 填空题.**

(1) 设$(X_1,\cdots,X_n)$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\sigma^2$未知，现要检验假设$H_0:\mu=\mu_0$，则应选取的统计量是________；当$H_0$成立时，该统计量服从________分布.

(2) 在显著性检验中，若要使犯两类错误的概率同时变小，则只有增加________.

**2. 单项选择题.**

(1) 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$已知，$x_1,\cdots,x_n$为取自$X$的样本观测值，现在显著性水平$\alpha=0.05$下接受了$H_0:\mu=\mu_0$. 若将$\alpha$改为0.01时，下面结论中正确的

A. 必拒绝$H_0$.　　B. 必接受$H_0$.

C. 犯第一类错误概率变大.　　D. 犯第二类错误概率变小.　　【　】

(2) 在假设检验中，$H_0$表示原假设，$H_1$为备选假设，则称为犯第二类错误的是

A. $H_1$不真，接受$H_1$.　　B. $H_0$不真，接受$H_1$.

C. $H_0$不真，接受$H_0$.　　D. $H_0$为真，接受$H_1$.　　【　】

(3) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\mu$和$\sigma^2$为未知参数，且

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i;Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

则检验假设$H_0:\mu=0$时，应选取的统计量为

A. $\sqrt{n(n-1)}\frac{\overline{X}}{Q}$.　　B. $\sqrt{n}\frac{\overline{X}}{Q}$.　　C. $\sqrt{n-1}\frac{\overline{X}}{Q}$.　　D. $\sqrt{n}\frac{\overline{X}}{Q^2}$.　　【　】

**3. 计算题.**

(1) 设用过去的铸造方法，零件强度服从正态分布，其标准差为 1.6(kg/mm²). 为了降低成本，改变了铸造方法，测得用新方法铸出的零件强度如下：

51.9， 53.0， 52.7， 54.1， 53.2，
52.3， 52.5， 51.1， 54.7.

问改变方法后零件强度的方差是否发生了显著变化(取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

(2) 一自动车床加工零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，车床正常工作时，加工零件长度均值为 10.5，经过一段时间的生产后，要检验一下这一车床是否工作正常. 为此随机抽取该车床加工的零件 31 个，算得均值为 11.08，标准差为 0.516. 设加工零件长度的方差不变，问此车库是否可以认为工作正常?($\alpha$ 取 0.05)

(3) 设有甲、乙两种零件彼此可以代用，但乙零件比甲零件制造简单、造价低，经过试验获得它们的抗压强度如下表所示.(单位:kg/cm²)

| 甲种零件 | 88 | 87 | 92 | 90 | 91 |
|---|---|---|---|---|---|
| 乙种零件 | 89 | 89 | 90 | 84 | 88 |

已知甲、乙两种零件的抗压强度分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$. 问能否在保证抗压强度质量下，用乙种零件代替甲种零件?($\alpha$ 取 0.05)

(4) 在正态总体 $X\sim N(\mu,1)$ 中抽取容量为 100 的样本，经计算样本均值为 5.32，

① 试检验 $H_0:\mu=5$ 是否成立(取 $\alpha=0.01$)，

② 计算上述检验在 $H_1:\mu=4.8$ 下犯第二类错误的概率.

## 参考答案

**1.** (1) $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$， $t(n-1)$.  (2) 样本容量.

**2.** (1)B (2)C (3)A

**3.** (1) $\mu$ 未知，方差的检验，$H_0:\sigma^2=1.6^2$.

$$\chi^2_{0.025}(8)<\chi^2=\frac{(9-1)S^2}{\sigma^2}=3.73<\chi^2_{0.975}(8)$$

故接受 $H_0$，即方差没有显著变化.

(2) 选取检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$，$H_0:\mu=\mu_0=10.5$，检验结果为不能认为车床工作正常.

(3) $H_0:\mu_1-\mu_2=0$，$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$，

检验结果为接受 $H_0$，即可用乙代替甲.

(4)① 拒绝 $H_0$.  ②$\beta=0.7257$.

# 附录　课后习题答案详解

# 第一篇　高等数学

## 第一章　函数、极限和连续

### 习题一

**1. 填空题**

(1)【解】可得 $e^a = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax} = \int_{-\infty}^{a} te^t\,dt = (te^t - e^t)\Big|_{-\infty}^{a} = ae^a - e^a$，所以 $a = 2$.

(2)【解】$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+n} < \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i} < \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+1}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n} = \dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{2}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

(3)【解】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = c \neq 0$，所以 $b = 0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2} \xlongequal{a=1} \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} = c \neq 0.\ \text{即}\ a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}.$$

(4)【解】$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h} = -\dfrac{1}{2}f'(3) = -1$.

(5)【解】$f[f(x)] = 1$.

(6)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = 2.$$

(7)【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+a\cos x}{1} = f'(0)+a = b+a = A$.

(8)【解】$0 \neq k = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x+bxe^x)-1-ax}{x^3(1+bx)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+bxe^x-1-ax}{x^3}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to0}\frac{e^x+bxe^x+be^x-a}{3x^2} \xlongequal{b+1=a} \lim_{x\to0}\frac{e^x+2be^x+bxe^x}{6x}.$$

所以 $2b+1 = 0, b = -\dfrac{1}{2}, a = \dfrac{1}{2}$.

(9)【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

(10)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1990n^{1989}}{kn^{k-1}+\cdots}=A$,

所以 $k-1=1990,k=1991;\dfrac{1}{k}=A,A=\dfrac{1}{1991}$.

**2. 选择题**

(1)【解】令 $f(x)=1,\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$,则 $\varphi[f(x)]=1,f[\varphi(x)]=1$,排除 A,C. 令 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ -1 & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$,$[\varphi(x)]^2=1$,排除 B,D. 若 $g(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在$(-\infty+\infty)$内连续,则 $\varphi(x)=g(x)f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,矛盾. 所以 D 是答案.

(2)【解】B 是答案.

(3)【解】$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,故选 D.

(4)【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0=f(0)=a$,故选 A.

(5)【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=1$,故选 B.

(6)【解】$8=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^5x^{100}+\cdots}{x^{100}+\cdots}=a^5,a=\sqrt[5]{8}$,故选 C.

(7)【解】C 为答案.

(8)【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2^x\ln 2+3^x\ln 3)=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1$. 故选 B.

(9)【解】$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)(1+2x)(1+3x)+a=0,1+a=0,a=-1$,故选 A.

(10)【解】$2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{a}{\cos^2 x}+b\sin x}{\frac{-2c}{1-2x}+2xde^{-x^2}}=-\dfrac{a}{2c}$,

所以 $a=-4c$,故选 D.

**3. 计算题**

(1)①【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e$.

②【解】$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sin x}{1}}=e^2$.

③【解】令 $y=\dfrac{1}{x}$,则

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(\sin 2y+\cos y)^{\frac{1}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(\sin 2y+\cos y)}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{2\cos y-\sin y}{\sin 2y+\cos y}}=e^2$.

④【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(2)①【解】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{3x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

②【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$\frac{x^2-x^2(1-\cos x^2)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-(x^2+1)\cos^2x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\cos^2x+2(x^2+1)\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x\cos^2x+\sin2x}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{2x^2\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos^2x+4x\cos x\sin x+2\cos2x}{12x^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos^2x+2\cos2x}{12x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x\sin x-4\sin2x}{24x}+\frac{5}{6}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin2x}{24x}+\frac{5}{6}=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}.$$

③**【解】** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x\cdot\sqrt{1-x^2})}{\tan x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x\cdot\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cos x}\left(-\sqrt{1-x^2}\sin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x\right)}{2x}$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{2x\cos x}+\frac{1}{2(1-x^2)}\right)=-1.$$

(3)①**【解】** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[e^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\frac{1}{n}}\xlongequal{令x=\frac{1}{n}}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$

$$=-2\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=e^2.$$

②**【解】** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln\sqrt[n]{n}}\xlongequal{令\sqrt[n]{n}=x}\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1.$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}x=1.$

③**【解】** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left((n-1)x+\frac{1+1+\cdots+(n-1)}{n}a\right)\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}a=x+\frac{1}{2}a.$

④**【解】** $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}}}\right]$

$\forall i<j,\frac{1}{1+\frac{1}{n^i}}<\frac{1}{1+\frac{1}{n^j}}$,从而$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^i}\right)^{\frac{1}{i}}}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^j}\right)^{\frac{1}{i}}}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^j}\right)^{\frac{1}{j}}}$

因此$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}>\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}\right]>\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)=1.$

⑤**【解】** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}.$

⑥【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \xlongequal{x=1/n,c=b/a} a\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1+c^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= a\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1+c^x}{2}-1)\frac{1}{x}} = a\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+c^x-2}{2x}} = a\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{c^x\ln c}{2}} = a\mathrm{e}^{\frac{\ln c}{2}} = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

**4.**【解】$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x} = \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x} = 0.$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2} = \lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-1}{3x} = \lim_{x\to0^-}-\frac{\sin x}{3} = 0.$$

所以，$f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

**5. 求下列函数的间断点并判别类型**

①【解】$f(0^+) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = 1$，$f(0^-) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = -1$，

所以 $x=0$ 为第一类间断点.

②【解】$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x = \begin{cases}-x, & |x|\geqslant 1\\ x, & |x|<1\end{cases}$.

显然，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$，所以，$x=1$，$x=-1$ 为第一类间断点.

③【解】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\sin1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$. 所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点；

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在. 所以 $x=1$ 为第二类间断点；

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$不存在，而 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{4x+\pi}{-2\sin x} = -\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为第一类可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-k\pi-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\infty$，$(k=1,2,\cdots)$ 所以 $x=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 为第二类无穷间断点.

**6.**【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^3+x+b\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^5}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{3ax^2+1+b\mathrm{e}^{-x^2}}{5x^4} \xlongequal{\text{分子极限为0,所以 } b=-1} \lim_{x\to0}\frac{3ax^2+1-\mathrm{e}^{-x^2}}{5x^4}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{6ax+2x\mathrm{e}^{-x^2}}{20x^3} = \lim_{x\to0}\frac{3a+x\mathrm{e}^{-x^2}}{10x^2}$$

$$\xlongequal{\text{分子极限为0,所以 } a=-\frac{1}{3}} \lim_{x\to0}\frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2}}{20x} = -\frac{1}{10}.$$

**7.**【解】由于 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，

因此$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2x}$ 存在. 所以

$\lim\limits_{x\to0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(\alpha+\beta\sin x)]=0$. 即

$$0 = \lim_{x\to0}\frac{1+\sin x+\sin^2x-(\alpha+\beta\sin x)^2}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+(\alpha+\beta\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1-\alpha^2)+(1-2\alpha\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2x}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}+(\alpha+\beta\sin x)} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha} = 1-\alpha,$$

所以 $\alpha = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\beta)+(1-\beta^2)\sin x}{\sin x\cdot(\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+\beta\sin x))}.$$

若上式极限存在,必须分子为 0,即 $1-2\beta=0,\beta=\frac{1}{2}$.

**8.【解】**因为极限存在,从而 $a=\frac{1}{5}$.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1}{\frac{1}{x}}\xlongequal{令 y=\frac{1}{x}}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(1+7y+2y^5)^{\frac{1}{5}}-1}{y}$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{5}(1+7y+2y^5)^{-\frac{4}{5}}(7+10y^4)=\frac{7}{5}.\text{所以 } b=\frac{7}{5}.$$

**9.【解】**当 $\alpha\leqslant 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^\alpha\sin\frac{1}{x}\right)$不存在,所以 $x=0$ 为第二类间断点;

当 $\alpha>0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^\alpha\sin\frac{1}{x}\right)=0$,所以 $\beta=-1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续;$\beta\neq-1$ 时,$x=0$ 为第一类跳跃间断点.

**10.【解】**$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$.

所以,$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)\right)=0$. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,所以 $f(x),f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin 3x}{x}=-3$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}-3+f(x)+3}{x^2}=0$,即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\frac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^2}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}.$$

因为 $\dfrac{9}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}$,

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=9$. 即 $f''(0)=9$.

# 第二章　导数与微分

## 习题二

**1. 填空题**

(1)**【解】**$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,\mathrm{d}t=\int_{x^2}^{0}\cos t^2\,\mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$.

(2)**【解】**$f'(x)=\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\dfrac{(-1)^1 2\cdot 1!}{(1+x)^{1+1}}$,假设 $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k 2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$,则

$f^{(k+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{k+1}2\cdot(k+1)!}{(1+x)^{k+1+1}}$,所以 $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

(3)**【解】**$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\sin t}{2t},\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2t},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(-\dfrac{\sin t}{2t}\right)'_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2t\cos t-2\sin t}{4t^2}\dfrac{1}{2t}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

(4)**【解】**隐函数求导得:$\mathrm{e}^{x+y}(1+y')-(y+xy')\sin xy=0$,

即得：$y' = \dfrac{y\sin xy - e^{x+y}}{e^{x+y} - x\sin xy}$.

(5)【解】由 $f(-x) = -f(x)$，得 $-f'(-x) = -f'(x)$，所以 $f'(-x) = f'(x)$，

所以 $f'(x_0) = f'(-x_0) = k$.

(6)【解】$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + m\Delta x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - n\Delta x)}{\Delta x}$

$= m\lim\limits_{m\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + m\Delta x) - f(x_0)}{m\Delta x} + n\lim\limits_{n\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 - n\Delta x) - f(x_0)}{-n\Delta x} = (m+n)f'(x_0)$.

(7)【解】$k\lim\limits_{k\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + k\Delta x) - f(x_0)}{k\Delta x} = \dfrac{1}{3}f'(x_0)$，所以 $kf'(x_0) = \dfrac{1}{3}f'(x_0)$，所以 $k = \dfrac{1}{3}$.

(8)【解】$\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = -f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$，所以 $f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{x^2}{2}$.

令 $x^2 = 2$，所以 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

(9)【解】$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)\cos f(x) f'[\sin f(x)]\cos(f[\sin f(x)])$.

(10)【解】对隐函数求导得：$e^{2x+y}(2 + y') - (y + xy')\sin(xy) = 0$.

所以切线斜率 $k = y'(0) = -2$. 法线斜率为$\dfrac{1}{2}$，法线方程为

$y - 1 = \dfrac{1}{2}x$，即 $x - 2y + 2 = 0$.

**2. 选择题**

(1)【解】"$\Leftarrow$"：因为 $F'(0)$ 存在，所以 $F'(0^+) = F'(0^-)$，于是

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x) - f(0)) + f(x)\sin x}{x} = f'(0) + f(0).$$

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(f(x) - f(0)) - f(x)\sin x}{x} = f'(0) - f(0).$$

所以 $f'(0) + f(0) = f'(0) - f(0)$，$2f(0) = 0$，$f(0) = 0$.

"$\Rightarrow$"：已知 $f(0) = 0$，所以

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x) - f(0)) + f(x)\sin x}{x} = f'(0) + f(0) = f'(0).$$

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(f(x) - f(0)) - f(x)\sin x}{x} = f'(0) - f(0) = f'(0).$$

所以 $F'(0) = f'(0)$ 存在. 即答案为 A.

(2)【解】因为 $f(x)$ 是连续函数，$F'(x) = f(e^{-x})(e^{-x})' - f(x) = -e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$. 所以答案是 A.

(3)【解】因为 $f(x) = [f(x)]^2$，且 $f(x)$ 具有任意阶导数，

所以 $f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2![f(x)]^3$. 假设 $f^{(k)}(x) = k![f(x)]^{k+1}$，

所以 $f^{(k+1)}(x) = (k+1)k![f(x)]^k f'(x) = (k+1)![f(x)]^{k+2}$，由数学归纳法知：

$f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1}$ 对一切正整数成立. 即答案为 A.

(4)【解】因为 $f(1+x) = af(x)$，且 $f'(0) = b$，

所以，$b = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{a}f(1+x) - \frac{1}{a}f(1)}{x} = \dfrac{1}{a}f'(1)$，

所以 $f'(1)=ab$. 即答案为 D.

(5)【解】依题意知：$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\geqslant 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$. $f''(x)=\begin{cases}24x, & x\geqslant 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$,

所以，$f'''(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{24x-0}{x}=24$,

$f'''(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{12x-0}{x}=12$,

所以 $n=2$,C 是答案.

(6)【解】因为 $f(x)$ 可导，所以由微分定义 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

即答案为 B.

(7)【解】在 $x=0$ 处可导一定在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)$,

所以 $b=0$. $f'(0^+)=f'(0^-)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{x}$，所以 $a=0$，即答案为 C.

(8)【解】由 $f'(0)$ 存在可推出 A 中的极限值为 $\dfrac{1}{2}f'(0)$，B 中的极限值为 $-f'(0)$，D 中的极限值为 $f'(0)$，而 C 中的极限值为 0. 反之 A，C 中的极限值存在，不一定 $f'(0)$ 存在，举反例如下：$y=|x|$，排除 A，C. D 中的极限值存在，$f'(0)$ 不一定存在，举反例如下：

$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，排除 D. 即答案为 B.

(9)【解】若取 $y=x$，则 A 不正确；若取 $y=x^2$，则 B 不正确；若取 $y=x$，则 C 不正确；D 是答案.

(10)【解】$f(x)=0$，取 $a=0$. 排除 A；$f(x)=x^2+x+1$，取 $a=0$. $f(0)=1>0$，$f'(0)=1>0$，$|f(x)|=f(x)$，在 $x=0$ 处可导. 排除 C；$f(x)=-x^2-x-1$，取 $a=0$. 排除 D；所以 B 是答案.

**3. 计算题**

(1)【解】$y'=\dfrac{-\sin(10+3x^2)\cdot 6x}{\cos(10+3x^2)}=-6x\tan(10+3x^2)$.

(2)【解】$y'=f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]\cdot\dfrac{1}{x+\sqrt{a+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a+x^2}}\right)$

$=\dfrac{f'[\ln(x+\sqrt{a+x^2})]}{\sqrt{a+x^2}}$.

(3)【解】$\mathrm{e}^{y^2}y'=2x\cos x^2+2yy'\cos y^2\Rightarrow y'=\dfrac{2x\cos x^2}{\mathrm{e}^{y^2}-2y\cos y^2}$.

(4)【解】$\dfrac{2x+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\dfrac{y'x-y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$.

$x+yy'=y'x-y$，所以 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

(5)【解】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t$,

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-(\cos t+\sin t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\cos t+\sin t)^2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\dfrac{2}{\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)^3}$.

(6)【解】$\mathrm{d}x=(2y+1)\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}u=\dfrac{3}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}}(2x+1)\mathrm{d}x$

$\dfrac{(2y+1)\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+x}(2x+1)\mathrm{d}x}$

$\frac{dy}{du}=\frac{2}{3(2y+1)\sqrt{x^2+x}(2x+1)}$.

(7)【解】由题意知：$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(e^{3t}-1)3e^{3t}}{f'(t)}$，所以$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=3$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=3\frac{[f''(e^{3t}-1)3(e^{3t})^2+3e^{3t}f'(e^{3t}-1)]f'(t)-e^{3t}f'(e^{3t}-1)f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=3\frac{[3f''(0)+3f'(0)]f'(0)-f'(0)f''(0)}{[f'(0)]^3}=\frac{9f'(0)+6f''(0)}{[f'(0)]^2}$.

(8)【解】由$\begin{cases}x=te^t\\ e^t+e^y=2e\end{cases}$得 $y_t'=-\frac{e^t}{e^y}=\frac{e^t}{e^t-2e}$.

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\frac{e^t}{e^t-2e}}{e^t+te^t}=\frac{1}{(1+t)(e^t-2e)}$，

所以$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=-\frac{1}{2e}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1+t)(e^t-2e)}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{2e^t-2e+te^t}{(1+t)^3(e^t-2e)^2e^t},$$

所以$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\frac{1}{8e^2}$ 在 $t=1$ 处的曲率为 $k=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=1}=\frac{\frac{1}{8e^2}}{\left(1+\frac{1}{4e^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=e(1+4e^{-2})^{-\frac{3}{2}}$.

**4.【解】**(1)$f(x)$ 在 $x=0$ 点连接，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=a$，

所以$\lim\limits_{x\to0}(g(x)-\cos x)=0, g(0)=\cos 0=1$，

$$\text{所以 } a=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)+1-\cos x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=g'(0)+0=g'(0).$$

$$(2)f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-a}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-\cos x-ax}{x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x-ax}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(\xi)x^2-\cos x-ax}{x^2}(0<\xi<x)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}g''(\xi)x^2-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}(g''(0)+1),$$

$$\text{所以 } f'(x)=\begin{cases}\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq0\\ \frac{1}{2}(g''(0)+1), & x=0\end{cases}.$$

**5.【解】**$F(x)$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$，所以 $c=f(-0)=f(0)$；

因为 $F(x)$ 二阶可导，所以 $F'(x)$ 连续，所以 $b=f'_-(0)=f'(0)$，且

$F'(x)=\begin{cases}f'(x), & x\leqslant0\\ 2ax+f'_-(0), & x>0\end{cases}$，$F''(0)$ 存在，所以 $F''_-(0)=F''_+(0)$，

所以 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2ax+f'_-(0)-f'(0)}{x}=2a$，所以 $a=\frac{1}{2}f''(0)$.

**6.【解】**$f(x)=-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}$，

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},$$

$f^{(2k+1)}(0)=0,k=0,1,2,\cdots,f^{2k}(0)=n!,k=0,1,2,\cdots$

**7.【解】** 使用莱布尼茨高阶导数公式

$$f^{(n)}(x)=x\cdot(\ln x)^{(n)}+n(\ln x)^{(n-1)}=x(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+n(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$=(-1)^{n-2}(n-2)!\left[\frac{-(n-1)}{x^{n-1}}+\frac{n}{x^{n-1}}\right]=(-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}},$$

所以 $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-2}(n-2)!$.

**8.【解】** 因为 $y=(\arcsin x)^2$，所以 $y'=2\arcsin x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$y''=2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\arcsin x\left[-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right](-2x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

所以 $(1-x^2)y''=2+xy'$.

对上式二边求 $n-1$ 阶导数.按莱布尼兹公式有

$$(1-x^2)(y'')^{(n-1)}+(1-x^2)'C_{n-1}^1(y'')^{(n-2)}+(1-x^2)''C_{n-1}^2(y'')^{(n-3)}=x(y')^{(n-1)}+x'C_{n-1}^1(y')^{(n-2)},$$

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-2x(n-1)y^{(n)}-2\frac{(n-1)(n-2)}{2!}y^{(n-1)}=xy^{(n)}+(n-1)y^{(n-1)},$$

所以 $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0$.

# 第三章　不定积分

## 习题三

**1.** (1)**【解】** 因为 $\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\dfrac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

所以 $\displaystyle\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$

(2)**【解】** 因为 $\left(\mathrm{d}\arctan\dfrac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{(1-x)^2}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，

所以 $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\int\arctan\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$

(3)**【解】** 因为 $\mathrm{d}\,\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

所以 $\displaystyle\int\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)^2+C.$

(4)**【解】** 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^8+1)}=-\int\frac{t^7\,\mathrm{d}t}{t^8+1}=-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}t^8}{t^8+1}=-\frac{1}{8}\ln(1+t^8)+c=-\frac{1}{8}\ln\left(1+\frac{1}{x^8}\right)+C.$$

(5)**【解】** $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$$

**2.** (1)**【解】** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}\xlongequal{x+1=\tan t}$

$\int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\int \frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$

(2)**【解】**令 $x = \tan t$,则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\mathrm{d}t = \int \frac{(1-\sin^2 t)\mathrm{d}\sin t}{\sin^4 t} = \int \frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^4 t} - \int \frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3\sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

(3)**【解】**令 $x = \tan t$,则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(2\tan^2 t+1)\cos t} = \int \frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t+1}$$

$$= \arctan\sin t + c = \arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

(4)**【解】**令 $x = a\sin t, \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t.\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t.$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\mathrm{d}t}{a\cos t} = a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a^2 t - \frac{1}{4}a^2\sin 2t + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

(5)**【解】**令 $x = \sin t$,

$$\int \sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x = \int \cos^4 t\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t = \int \frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{8}\int(1+\cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + C$$

$$= \frac{3}{8}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin 2t(1+\frac{1}{4}\cos 2t) + C$$

$$= \frac{3}{8}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin t\cos t\left(1+\frac{1}{4}-\frac{\sin^2 t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{3}{8}\arcsin x + \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}(5-2x^2) + C.$$

(6)**【解】**令 $x = \frac{1}{t}$,则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{令 t = \sin u} -\int \sin u\cos^2 u\mathrm{d}u$$

$$= \int \cos^2 u\mathrm{d}\cos u = \frac{1}{3}\cos^3 u + C = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3} + C.$$

(7)**【解】**令 $x = \frac{1}{t}$. 则 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$

$$\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{令 t = \sin u} -\int(\sin u+1)\mathrm{d}u = \cos u - u + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin\frac{1}{x} + C.$$

**3.** (1)**【解】**$\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-1+e^{-2x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(e^x-e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2+1} = \arctan(e^x-e^{-x}) + C.$

(2)**【解】**令 $t = 2^x, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t\ln 2}.$

$$\int\frac{dx}{2^x(1+4^x)}=\int\frac{dt}{t^2(1+t^2)\ln2}=\frac{1}{\ln2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=-\frac{1}{\ln2}\left(\frac{1}{t}+\arctan t\right)+C$$

$$=-\frac{1}{\ln2}\left(\frac{1}{2^x}+\arctan2^x\right)+C.$$

**4.** (1)【解】$\int\frac{x^5}{(x-2)^{100}}dx=-\frac{1}{99}\int x^5d(x-2)^{-99}=-\frac{x^5}{99(x-2)^{99}}+\frac{5}{99}\int x^4(x-2)^{-99}dx$

$$=-\frac{x^5}{99(x-2)^{99}}-\frac{5x^4}{9702(x-2)^{98}}+\frac{10}{4851}\int x^3(x-2)^{-98}dx$$

$$=-\frac{x^5}{99(x-2)^{99}}-\frac{5x^4}{9702(x-2)^{98}}-\frac{10x^3}{470547(x-2)^{97}}-\frac{5x^2}{7528752(x-2)^{96}}-$$

$$\frac{x}{71523144(x-2)^{95}}-\frac{1}{71523144(x-2)^{94}}+c.$$

(2)【解】令 $x=1/t$，则

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^4+1}{t^4}}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^4}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{1+(t^2)^2}}$$

$$\xlongequal{令 t^2=\tan u}-\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2u}{\sec u}du=-\frac{1}{2}\ln|\tan u+\sec u|+c=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C.$$

**5.** (1)【解】$\int x\cos^2xdx=\frac{1}{2}\int x(1+\cos2x)dx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\int xd\sin2x$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin2x-\frac{1}{4}\int\sin2xdx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin2x+\frac{1}{8}\cos2x+C.$$

(2)【解】$\int\sec^3xdx=\int\frac{1}{\cos x}d\tan x=\frac{\sin x}{\cos^2x}-\int\sec x\tan^2xdx$

$$=\sec x\tan x-\int(\sec^2x-1)\sec xdx=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|-\int\sec^3xdx.$$

$\int\sec^3xdx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$

(3)【解】$\int\frac{(\ln x)^3}{x^2}dx=-\int(\ln x)^3d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}(\ln x)^3+\int\frac{3(\ln x)^2}{x^2}dx$

$$=-\frac{(\ln x)^3}{x}-\frac{3(\ln x)^2}{x}+\int\frac{6\ln x}{x^2}dx=-\frac{(\ln x)^3}{x}-\frac{3(\ln x)^2}{x}-\frac{6\ln x}{x}+\int\frac{6}{x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x}[(\ln x)^3+3(\ln x)^2+6\ln x+6]+C.$$

(4)【解】$\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)-\int xd\cos(\ln x)=x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)dx$

$$=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]-\int\cos(\ln x)dx,$$

所以$\int\cos(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$

(5)【解】$\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3x}dx=\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$$=-\frac{1}{4}\int x\csc\frac{x}{2}d\csc\frac{x}{2}=-\frac{1}{8}\int xd\csc^2\frac{x}{2}=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int\csc^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C.$$

**6.** (1)【解】$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\frac{1}{1-x^2}$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

令 $x = \tan t$，则 $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int\frac{1}{1-\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}dt$$

$$= \int\frac{\cos t}{1-2\sin^2 t}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\sqrt{2}\sin t}{1-2\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x} + C.$$

所以 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x} + C.$

(2)**【解】** $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int\arctan x\, d\sqrt{1+x^2}$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

(3)**【解】** $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int\arctan e^x\, de^{-2x}$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int\frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{e^x(1+e^{2x})}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C.$$

**7.【解】** $\int f(x)dx = \begin{cases}\int(x\ln(1+x^2)-3)dx, & x \geqslant 0 \\ \int(x^2+2x-3)e^{-x}dx, & x < 0\end{cases}$

$$= \begin{cases}\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}[x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + C, & x \geqslant 0 \\ -(x^2+4x+1)e^{-x} + C_1, & x < 0\end{cases}.$$

由于 $\int f(x)dx$ 连续，所以 $C = -1 + C_1, C_1 = 1 + C$.

即 $\int f(x)dx = \begin{cases}\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}[x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + C, & x \geqslant 0 \\ -(x^2+4x+1)e^{-x} + 1 + C, & x < 0\end{cases}.$

**8.【解】** 令 $t = e^x, x = \ln t, f'(t) = a\sin(\ln t) + b\cos(\ln t)$，

$f(x) = \int[a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)]dx = \frac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x) + (b-a)\cos(\ln x)] + C.$

**9.** (1)**【解】** $\int 3^{x^2+3x}(2x+3)dx = \int 3^{x^2+3x}d(x^2+3x) = \frac{3^{x^2+3x}}{\ln 3} + C.$

(2)**【解】** $\int(3x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}(3x-1)dx = \frac{1}{2}\int(3x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}d(3x^2-2x+5)$

$$= \frac{1}{5}(3x^2-2x+5)^{\frac{5}{2}} + C.$$

(3)【解】因为 $d\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,所以

$$\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{1}{2}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2+C.$$

(4)【解】因为 $d\ln(1+\sqrt{1+x^2})=\dfrac{x/\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$,

所以 $\displaystyle\int\frac{xdx}{(1+x^2+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})}=\int\frac{d\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})}$

$$=\ln|\ln(1+\sqrt{1+x^2})|+C.$$

**10.【解】**$\displaystyle\int\frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx=\int\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2e^x}dx-\int\frac{f(x)}{xe^x}dx$

$$=\int\frac{1}{e^x}d\frac{f(x)}{x}-\int\frac{f(x)}{xe^x}dx$$

$$=\frac{1}{e^x}\frac{f(x)}{x}+\int\frac{f(x)}{xe^x}dx-\int\frac{f(x)}{xe^x}dx=\frac{f(x)}{xe^x}+C.$$

**11.【解】**令 $t=\cos x+2$,则 $\cos x=t-2$,从而

$$f'(t)=1-\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}-1=-(t-2)^2+\frac{1}{(t-2)^2}.$$

所以 $\displaystyle f(x)=-\int\left[(x-2)^2-\frac{1}{(x-2)^2}\right]dx=-\frac{1}{3}(x-2)^3-\frac{1}{x-2}+C.$

**12.** (1)【解】$\displaystyle\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\arctan x\, d\frac{1}{1+x^2}$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\overset{\text{令 } x=\tan t}{=\!=}-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2t}{\sec^4t}dt$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\cos^2t\,dt$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\int\cos(2t+1)dt$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}\sin2t+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\arctan x+\frac{x}{4(1+x^2)}+C.$$

(2)【解】令 $u=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$, $x=\dfrac{u^2}{1-u^2}$, $dx=\dfrac{2u}{(1-u^2)^2}du$

$$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int\arcsin u\frac{2u}{(1-u^2)^2}du$$

$$\overset{\text{令 } u=\sin t}{=\!=}\int t\frac{2\sin t}{\cos^4t}\cos t\,dt=2\int t\frac{\sin t}{\cos^3t}dt=\int t\,d\tan^2t$$

$$=t\tan^2t-\int\tan^2t\,dt$$

$$=t\tan^2t-\int\left(\frac{1}{\cos^2t}-1\right)dt$$

$$=t\tan^2t-\tan t+t+C$$

$$=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+C.$$

(3)【解】$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\xlongequal{令\ x=\sin t} \int \frac{t}{\sin^2 t\cos t}\cos t dt + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$= -\int t d\cot t + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$= -t\cot t + \int \cot t dt + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$= -t\cot t + \ln|\sin t| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C.$$

(4) 令 $t=\arctan x, x=\tan t, dx=\sec^2 t dt$,

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{t\sec^2 t}{\tan^2 t\sec^2 t}dt = \int \frac{t\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{t(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}dt$$

$$= -\int t d\cot t - \int t dt = -t\cot t + \int \cot t dt - \frac{1}{2}t^2 = -t\cot t + \ln|\sin t| - \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$$

**13.** (1)【解】令 $x=2\sin t, dx=2\cos t dt$.

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx = 32\int \sin^3 t\cos^2 t dt = -32\int(1-\cos^2 t)\cos^2 t d\cos t$$

$$= -\frac{32}{3}\cos^3 t + \frac{32}{5}\cos^5 t + c = \frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(2)【解】令 $x=a\sec t, dx=a\sec t\tan t dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \int \frac{a\tan t}{a\sec t}a\sec t\tan t dt = a\int \tan^2 t dt$$

$$= a\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = a\int \frac{dt}{\cos^2 t} - at = a\tan t - at + C$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

(3)【解】$\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx + \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$$= \int \frac{de^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$$

$$= \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}} + c.$$

(4)【解】$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx \xlongequal{令\ u=\sqrt{x}} 2\int \frac{u^4}{\sqrt{2a-u^2}}du \xlongequal{令\ u=\sqrt{2a}\sin t} 8a^2\int \sin^4 t dt$

$$= 8a^2\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = 2a^2\int(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)dt$$

$$= 2a^2 t - 2a^2\sin 2t + 2a^2\int \frac{1+\cos 4t}{2}dt = 3a^2 t - 2a^2\sin 2t + \frac{a^2}{4}\sin 4t + C$$

$$= 3a^2 t - 4a^2\sin t\cos t + a^2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t) + C$$

$$= 3a^2 t - 3a^2\sin t\cos t - 2a^2\sin^3 t\cos t + C$$

$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - 3a^2\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} - 2a^2\frac{x}{2a}\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} + C$$

$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C.$$

**14.** (1)【解】令 $\sqrt{1+\cos x}=u$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{-\sin^2 x}=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{\cos^2 x-1}=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{u^2(u^2-2)}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}&=\int\frac{2u}{u^2(u^2-2)u}\mathrm{d}u=2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2(u^2-2)}\\&=-\int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^2-2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{u}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right|+C\\&=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}\right|+C.\end{aligned}$$

(2)【解】$\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}(2+\cos x)}{2+\cos x}$

$$\begin{aligned}&\xlongequal{令\tan\frac{x}{2}=t}2\int\frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}+\ln|2+\cos x|\\&=2\int\frac{2\mathrm{d}t}{3+t^2}+\ln|2+\cos x|\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+\ln|2+\cos x|+C\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\ln|2+\cos x|+C.\end{aligned}$$

(3)【解】
$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{1+2\sin x\cos x-1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}\\&=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.\end{aligned}$$

**15.** (1)【解】$\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(1-x^{\frac{3}{2}})}{(1-x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.$

(2)【解】$\displaystyle\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}}$

$$\begin{aligned}&=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}+\arcsin\mathrm{e}^{-x}\xlongequal{令\mathrm{e}^x=\sec t}\int\frac{\sec t\tan t\mathrm{d}t}{\tan t}+\arcsin\mathrm{e}^{-x}\\&=\int\sec t\mathrm{d}t+\arcsin\mathrm{e}^{-x}=\ln|\tan t+\sec t|+\arcsin\mathrm{e}^{-x}+C\\&=\ln|\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}|+\arcsin\mathrm{e}^{-x}+C.\end{aligned}$$

(3)【解】$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=2\int\frac{(\sqrt{x-1})^2\arctan\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2+1}\mathrm{d}\sqrt{x-1}$

$$\xlongequal{\text{令}\sqrt{x-1}=u}\int\frac{2u^2\arctan u}{u^2+1}\mathrm{d}u=2\int\arctan u\mathrm{d}u-2\int\frac{\arctan u}{u^2+1}\mathrm{d}u$$

$$=2u\arctan u-2\int\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u-2\int\arctan u\mathrm{d}\arctan u$$

$$=2u\arctan u-2\int\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u-(\arctan u)^2$$

$$=2u\arctan u-\ln(1+u^2)-(\arctan u)^2+C$$

$$=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln|x|-(\arctan\sqrt{x-1})^2+C.$$

# 第四章　定积分及反常积分

## 习题四

**1.** 证明：假设存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)\neq 0$，不妨假设 $f(\xi)>0$. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以存在 $\delta>0$，使得在 $[\xi-\delta,\xi+\delta]$ 上 $f(x)>0$，令 $m=\min\limits_{\xi-\delta\leqslant x\leqslant\xi+\delta}f(x)$. 定义 $\Phi(x)=\begin{cases}\sqrt{\delta^2-(x-\xi)^2}, & \xi-\delta\leqslant x\leqslant\xi+\delta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则 $\int_a^b f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x\geqslant m\dfrac{\pi\delta^2}{2}>0$，和 $\int_a^b f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，所以 $f(x)=0$.

若 $f(a)\neq 0$，不妨设 $f(a)>0$. 由 $f$ 的连续性，得存在 $\delta>0$，使得当 $x\in[a,a+\delta]$ 时，$f(x)>0$. 记 $m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant a+\delta}f(x)$. 定义 $\Phi(x)=\begin{cases}\sqrt{\delta^2-(x-0)^2}, & a\leqslant x\leqslant a+\delta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 $\int_a^b f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+\delta}f(x)\Phi(x)\geqslant m\cdot\dfrac{\pi\delta^2}{4}>0$，矛盾，故 $f(a)=0$.

同理可证 $f(b)=0$.

**2.** 证明：先证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

令 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{f(\cos t)}{f(\cos t)+f(\sin t)}\mathrm{d}(-t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos t)}{f(\cos t)+f(\sin t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\mathrm{d}x$$

于是

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

所以 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+(\tan x)^\lambda}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^\lambda}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\cos x)^\lambda}{(\cos x)^\lambda+(\sin x)^\lambda}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

同理 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+(\cot x)^\lambda}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

**3.** 证明：因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x$，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f(\dfrac{k}{n})=\sum\limits_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\dfrac{k}{n})\mathrm{d}x$.

所以

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f(\frac{k}{n})\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M\left|(x-\frac{k}{n})\right|\mathrm{d}x$$

$$=M\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}=\frac{M}{2n}.$$

4. 证明：令 $t=\tan x, 0<t<1$ 则 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

因为 $\left(\frac{t}{1+t^2}\right)'=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}>0$，所以 $\frac{t}{1+t^2}<\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$，

于是 $\frac{1}{2}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t<\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t$，

即 $\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2(n-1)}$.

5. 证明：由积分中值定理，存在 $\xi\in[0,\alpha]$，使得 $\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\beta f(\xi)$，存在 $\eta\in[\alpha,\beta]$，使得 $\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=\alpha(\beta-\alpha)f(\eta)$，由于 $\xi\leqslant\eta$，$f$ 单调递减. 从而 $f(\xi)\geqslant f(\eta)$.

即 $\alpha(\beta-\alpha)f(\eta)\leqslant\alpha\beta f(\xi)-\alpha f(\xi)\leqslant\alpha\beta f(\xi)=\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x$.

6. 证明：$\forall\, x,t\in[a,b]$，$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2$，$\xi\in(x,t)$ 或 $(t,x)$

令 $t=\frac{a+b}{2}$，所以 $f(x)\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$

两边积分得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

7. 证明：由积分中值定理，存在 $\xi\in[0,\alpha]$，使 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha f(\xi)$；

存在 $\eta\in[\alpha,1]$，使 $\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(1-\alpha)$.

因为 $\eta\geqslant\xi$，$f$ 单调递减，所以 $f(\eta)\leqslant f(\xi)$.

所以
$$\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\alpha\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x=\alpha^2 f(\xi)+\alpha f(\eta)(1-\alpha)$$
$$\leqslant\alpha^2 f(\xi)+\alpha f(\xi)(1-\alpha)=\alpha f(\xi)=\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x.$$

8. 证明：对于函数 $F(x)=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u$，用泰勒公式展开：

$$\forall\, t,x\in[a,b],F(x)=F(t)+F'(t)(x-t)+\frac{F''(t)}{2!}(x-t)^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}(x-t)^3$$
$$=F(t)+f(t)(x-t)+\frac{f'(t)}{2!}(x-t)^2+\frac{f''(\xi)}{3!}(x-t)^3 \tag{1}$$

(1) 中令 $x=a,t=b$，得到 $0=F(b)+f(b)(a-b)+\frac{f''(\xi_1)}{6}(a-b)^3$，$\xi_1\in(a,b)$ (2)

(2) 中令 $x=b,t=a$，得到 $F(b)=f(a)(b-a)+\frac{f''(\xi_2)}{6}(b-a)^3$，$\xi_2\in(a,b)$ (3)

(3) − (2) 得到 $2F(b)=(f(a)+f(b))(b-a)+\frac{(b-a)^3}{6}(f''(\xi_2)+f''(\xi_1))$

于是
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{(b-a)^3}{6}\cdot\frac{f''(\xi_2)+f''(\xi_1)}{2}$$
$$=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi).$$

9. 证明：
$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 } x=\pi-t}\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\mathrm{d}(-t)$$
$$=\int_0^\pi\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^\pi tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)\mathrm{d}t+\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

所以，$2\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }t=\pi-u}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin(\pi-u))\mathrm{d}(-u)=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$

即$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$

**10.** 证明：$-|f'(x)|\leqslant f'(x)\leqslant|f'(x)|$，所以

$$-\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

即 $$-\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

$$-\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

即 $$-\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

所以 $$-\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant 2f(x)\leqslant\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

即 $$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x,(a<x<b).$$

**11.** 证明：因为$(0,1)$上$f(x)\neq 0$，可设$f(x)>0$.

因为 $$f(0)=f(1)=0,$$

$\exists x_0\in(0,1)$使$f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}(f(x))$，

所以 $$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x. \quad (1)$$

在$(0,x_0)$上用拉格朗日定理，存在$\alpha\in(0,x_0)$，使得$f'(\alpha)=\frac{f(x_0)}{x_0}$，

在$(x_0,1)$上用拉格朗日定理，存在$\beta\in(x_0,1)$，使得$f'(\beta)=-\frac{f(x_0)}{1-x_0}$.

所以$\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_\alpha^\beta f''(x)\mathrm{d}x\right|=|f'(\beta)-f'(\alpha)|=\frac{f(x_0)}{x_0(1-x_0)}\geqslant 4f(x_0)$

因为$x_0(1-x_0)\leqslant\left(\frac{x_0+(1-x_0)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

所以 $$\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant 4.$$

由(1)得

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4.$$

**12.** 证明：将$\ln x$在$x_0$用泰勒公式展开，得

$$\ln x=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)-\frac{1}{x_0^2}(\xi-x_0)^2\leqslant\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0). \quad (1)$$

令$x_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,x=f(x)$ 代入(1)得

$$\ln f(x)\leqslant\ln\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\left[f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right].$$

将上式两边取$\int_a^b$，最后一项为0，得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**13.** 证明：$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_0^1 1^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)\cdot 1\mathrm{d}x\right)^2=(f(1)-f(0))^2=1.$

14.【解】因为 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，所以 $|f(x)|$ 在$[0,2]$上连续，所以 $\exists\xi\in[0,2]$，使

$$|f(\xi)|=\max|f(x)|\ (0\leqslant x\leqslant 2).\text{所以}$$

$$a=\left|\int_0^2(x-1)f(x)dx\right|\leqslant\int_0^2|x-1||f(x)|dx\leqslant|f(\xi)|\int_0^2|x-1|dx=|f(\xi)|.$$

15.【解】 (1) $\displaystyle\int_0^2\frac{e^x}{(e^x-1)^{\frac13}}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^2\frac{d(e^x-1)}{(e^x-1)^{\frac13}}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac32(e^x-1)^{\frac23}\Big|_\varepsilon^2=\frac32(e^2-1)^{\frac23}.$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac13\int_0^b\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right]dx$

$$=\frac13\lim_{b\to\infty}(\arctan x-\frac12\arctan\frac x2)\Big|_0^b=\frac{\pi}{12}.$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac32}}$

因为 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3\frac{1}{(1+x^2)^{\frac32}}=1$，所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac32}}$ 积分收敛. 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac32}}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac32}}\xlongequal{\text{令 }x=\tan t}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2t}{\sec^3t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=2.$$

(4) $\displaystyle\int_0^1\sin(\ln x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\sin(\ln x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac12[x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)]\Big|_\varepsilon^1=-\frac12.$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx\xlongequal{\text{令 }x=\sec t}\int_{\frac23\pi}^{\pi}\frac{\cos t\cdot\sin t}{(-\tan t)\cos^2t}dt=-\frac{\pi}{3}.$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac32}}dx\xlongequal{\text{令 }x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sec^2t}{\sec^3t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt=\frac{\pi}{2}-1.$

16. (1) 因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3\sqrt{x^2+4}}=1$. 所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3\sqrt{x^2+4}}dx$ 收敛.

(2) 因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+2x+3}{x^3+4}\cdot x=5$. 从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{5x^2+2x+3}{x^3+4}dx$ 发散.

(3) 因为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{3+2x^3}\cdot x^2=\frac12$，所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{3+2x^3}dx$ 收敛.

(4) 因为 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\cdot x^{\frac12}=1$. 所以 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ 收敛.

(5) 因为 $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{e^{-2x}}{(2-x)^2}\cdot(2-x)^2=e^{-4}$. 所以 $\displaystyle\int_0^2\frac{e^{-2x}}{(2-x)^2}dx$ 发散.

(6) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}dx=\int_0^c\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}dx+\int_c^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}dx.$

因为 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}\cdot x^{\frac12}=0$，所以 $\displaystyle\int_0^c\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}dx$ 收敛.

$\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}\cdot(1-x)^{\frac12}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\displaystyle\int_c^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}dx$ 收敛.

即 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}dx$ 收敛.

# 第五章　微分中值定理

## 习题五

1. 证明：令 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}$，$m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i)\}$. 所以

$$m \leqslant \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \leqslant M.$$

所以存在 $\xi(\xi \in (a,b))$，使得 $f(\xi) = \dfrac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$.

**2.** 证明：假设 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(a) = f(a) - a < 0$，$F(b) = f(b) - b > 0$，于是由介值定理，在$(a,b)$内至少存在一个 $\xi$，使 $f(\xi) = \xi$.

**3.** 证明：（反证法）设 $\forall x \in [0,1]$，$\varphi(x) = f(x) - x \neq 0$. 则 $\varphi(x) = f(x) - x$ 恒正或恒负. 不妨设 $\forall x \in [0,1]$，$\varphi(x) = f(x) - x > 0$. 令 $m = \min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \varphi(x)$，则 $m > 0$.

因此 $\forall x \in [0,1]$，$\varphi(x) = f(x) - x \geqslant m$. 于是 $f(1) \geqslant 1 + m > 1$，矛盾，所以在$[0,1]$内至少存在一个 $\xi$，使 $f(\xi) = \xi$.

**4.** 证明：假设 $F(x) = f(x) - g(x)$，则 $F(a) = f(a) - g(a) < 0$，$F(b) = f(b) - g(b) > 0$，
于是由介值定理，在$(a,b)$内至少存在一个 $\xi$，使 $f(\xi) = g(\xi)$.

**5.** 证明：令 $F(x) = x^5 - 3x - 2$，则 $F(1) = -4 < 0$，$F(2) = 24 > 0$，
所以在$(1,2)$内至少有一个 $\xi$，满足 $F(\xi) = 0$.

**6.** 证明：由条件知 $0 < f(x) < 1$. 令 $F(x) = f(x) - x$，于是 $F(0) > 0$，$F(1) < 0$，所以存在 $\xi \in (0,1)$，使 $F(\xi) = 0$. 假设存在 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$，满足 $f(\xi_1) = \xi_1$，$f(\xi_2) = \xi_2$，不妨假设 $\xi_2 < \xi_1$，于是 $\xi_1 - \xi_2 = f(\xi_1) - f(\xi_2) = f'(\eta)(\xi_1 - \xi_2)$，$(\xi_2 < \eta < \xi_1)$，所以 $f'(\eta) = 1$，矛盾.

**7.** 证明：$f(0) = 3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 3f(\xi_1)(1 - \frac{2}{3}) = f(\xi_1)$，其中 $\frac{2}{3} < \xi_1 < 1$.
由罗尔定理，存在 $\xi$，满足 $0 < \xi < \xi_1$，且 $f'(\xi) = 0$.

**8.** 证明：由于 $F(1) = F(2) = 0$，所以存在 $\xi_1$，$1 < \xi_1 < 2$，满足 $F'(\xi_1) = 0$，又 $F'(1) = 0$，所以存在 $\xi$，满足 $1 < \xi < \xi_1 < 2$，且 $F''(\xi) = 0$.

**9.** 证明：令 $F(t) = f(t)$，$G(t) = \ln(1+t)$，由柯西定理，得

$$\frac{F(x) - F(0)}{G(x) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}, \xi \in (0,x),$$

所以 $\dfrac{f(x)}{\ln(1+x)} = (1+\xi)f'(\xi)$，即 $f(x) = (1+\xi)\ln(1+x)f'(\xi)$.

**10.** 证明：令 $F(x) = x^n f(x)$，由拉格朗日定理，得 $b^n f(b) - a^n f(a) = [n\xi^{n-1} f(\xi) + \xi^n f'(\xi)](b-a)$，$\xi \in (a, b)$，即 $\dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = [nf(\xi) + \xi f'(\xi)]\xi^{n-1}$.

**11.** 证明：令 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$，则 $F(a) = F(b) = 0$，所以存在在一个 $\xi \in (a,b)$，使

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

**12.** 证明：$\left(f''(x) = \dfrac{2f'(x)}{1-x}, \dfrac{f''(x)}{f'(x)} = \dfrac{2}{1-x}\right.$ 两边积分可得 $\ln f'(x)(x-1)^2 = c$，所以 $\left.f'(x)(x-1)^2 = \mathrm{e}^c\right)$

令 $F(x) = f'(x)(x-1)^2$，$F'(x) = f''(x)(x-1)^2 + 2f'(x)(x-1)$，由 $f(0) = f(1) = 0$ 知存在 $\eta \in (0, 1)$，$f'(\eta) = 0$，即 $F(\eta) = 0$ 又 $F(1) = 0$. 所以存在 $\xi \in (\eta, 1)$，$F'(\xi) = 0$. 立即可得 $f''(\xi) = \dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

**13.** 证明：令 $F(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$，$G(x) = \mathrm{e}^{-x}$. 由柯西定理，$\exists \xi \in (x_1, x_2)$，使得

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x_1} - \mathrm{e}^{x_2}}\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x_1} & \mathrm{e}^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = \frac{-\mathrm{e}^{-\xi} f(\xi) + \mathrm{e}^{-\xi} f'(\xi)}{-\mathrm{e}^{-\xi}} = f(\xi) - f'(\xi).$$

**14.** 证明：不妨假设 $0 < x_1 < x_2$，令 $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，$G(x) = \dfrac{1}{x}$，在$[x_1, x_2]$上使用柯西定理，
$\exists \xi \in (x_1, x_2)$，使得

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{G(x_2)-G(x_1)}=\frac{\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\frac{e^{\xi}\xi-e^{\xi}}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=e^{\xi}-\xi e^{\xi},$$

即 $x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$.

**15.** 证明:令 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$,所以 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理,至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$,于是 $f'(\xi)g(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$.

**16.** 证明:令 $F(x)=\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(x)&g(x)\end{vmatrix}$,则

$F(b)-F(a)=\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(b)&g(b)\end{vmatrix}$,由拉格朗日中值定理,至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使

$$\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(b)&g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f'(\xi)&g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

**17.** 证明:$\forall x,t\in[a,b]$,有 $f(x)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2$,其中 $\xi$ 介于 $x,t$ 之间.

令 $t=\frac{a+b}{2}$,分别令 $x=b,x=a$,得到

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4},\xi_1\in\left(\frac{a+b}{2},b\right),$$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4},\xi_2\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right).$$

两式相加,得 $f(b)+f(a)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1)}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}\right]$

所以存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

**18.** 证明:令 $F(x)=f(x),G(x)=\frac{1}{x}$,由柯西定理,存在 $\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}=-\eta^2f'(\eta),$$

即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\eta^2f'(\eta)}{ab}$,由拉格朗日定理知 $\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\eta^2f'(\eta)}{ab}.$$

**19.** 证明:对于 $F(x)=e^xf(x)$,由拉格朗日定理,$\exists\eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)].$$

对 $G(x)=e^x$,在 $[a,b]$ 上使用拉格朗日定理,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}.$$

则 $e^{\xi}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$.

**20.** 证明:令 $g(x)=e^x$,由柯西定理,得存在 $\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}=e^{-\eta}f'(\eta).$$

所以 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}f'(\eta)$. 由拉格朗日中值定理,$\exists\xi\in(a,b)$,

使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$.

# 第六章　常微分方程

## 习题六

1. (1)【解】$\frac{dy}{dx}=e^x(e^{-y}-1)$，$\frac{dy}{e^{-y}-1}=e^x dx$，$-\ln(1-e^y)=e^x+c$.

$y=\ln(1-ce^{-e^x})$.

(2)【解】$\frac{dy}{1-y^2}=\tan x dx$，

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=-\ln|\cos x|+c$，$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2}{1-2}\right|=c$，$c=\frac{1}{2}\ln 3$，

$\ln\left|\frac{1+y}{3(1-y)}\right|=\ln\frac{1}{\cos^2 x}$，$y=\frac{3+\cos^2 x}{3-\cos^2 x}$.

2. (1)【解】$\frac{dx}{dy}=\frac{e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)}{1+e^{\frac{x}{y}}}$.

令$\frac{x}{y}=u$，$x=yu$.（将 $y$ 看成自变量）

$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，所以 $u+y\frac{du}{dy}=\frac{e^u(u-1)}{1+e^u}$，

$y\frac{du}{dy}=\frac{ue^u-e^u}{1+e^u}-u=-\frac{u+e^u}{1+e^u}$，

$\frac{1+e^u}{u+e^u}du=-\frac{dy}{y}$，$\frac{d(u+e^u)}{u+e^u}=-\frac{dy}{y}$，$\ln(u+e^u)=-\ln y+c$，

$\frac{1}{y}=\frac{u+e^u}{c}$，$y=\frac{c}{u+e^u}=\frac{c}{\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}}}$ 即$(x+ye^{\frac{x}{y}})=c$.

(2)【解】令$\frac{y}{x}=u$，$y=xu$.

$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，所以 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}$.

$x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}-u=\frac{-u^3-u^2-u-1}{u^2+2u-1}$，

$-\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du=\frac{dx}{x}$，

$\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2y}{u^2+1}\right)du=\frac{dx}{x}$，

$\ln\frac{u+1}{u^2+1}=\ln cx$，$\frac{u+1}{u^2+1}=cx$. 由 $y(1)=-1$，得 $u(1)=-1$.

所以 $c=0$. $\frac{u+1}{u^2+1}=0$，得到 $u+1=0$，即 $y=-x$.

3. (1)【解】令 $u=\sin^2 y$，则 $u'=y'\sin 2y$. 于是

$\sqrt{1+x^2}u'=2xu+e^{2\sqrt{1+x^2}}$，$u'-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}u=\frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$ 为一阶线性方程，

解得 $u=e^{2\sqrt{1+x^2}}(c+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|)$. 即 $\sin^2 y=e^{2\sqrt{1+x^2}}(c+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|)$.

(2)【解】原方程可化为$\frac{dx}{dy}=1+\frac{2x}{y}-\frac{x}{y^2}$.

即$\frac{dx}{dy}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)x=1$为一阶线性方程(把 $y$ 看成自变量,$x$ 看成因变量).

解得:$x=y^2+cy^2e^{\frac{1}{y}}$.

(3)【解】令 $\cos y=u$,则 $u'=-y'\sin y$.

$-u'x\ln x+u(1-xu)=0$,即$-u'+\frac{u}{x\ln x}=\frac{u^2}{\ln x}$为伯努利方程.

$\frac{-u'}{u^2}+\frac{1}{x\ln x}\cdot\frac{1}{u}=\frac{1}{\ln x}$.

令 $z=\frac{1}{u}$,则 $z'=\frac{-u'}{u^2}$. $z'+\frac{1}{x\ln x}z=\frac{1}{\ln x}$为一阶线性方程.

解得 $z=\frac{(x+C)}{\ln x}$,即$\frac{1}{\cos y}=\frac{x+C}{\ln x}$,$(x+C)\cos y=\ln x$.

**4.** (1)【解】$e^y dx+xe^y dy-2ydy=0$.

于是 $d(xe^y)-dy^2=0$. 两边积分得 $xe^y-y^2=C$,即方程的解为 $xe^y-y^2=C$.

(2)【解】$xdx+dy+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}dy=0$.

设函数 $u(x,y)$ 满足 $du=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}dy$.

所以$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$,$u(x,y)=\int\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx+\varphi(y)=\arcsin\frac{x}{y}+\varphi(y)$

即$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}+\varphi'(y)=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

于是 $\varphi'(y)=0$,$\varphi(y)=c$,$u(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}+C$

$d\frac{x^2}{2}+dy+du=0$,两边积分得$\frac{1}{2}x^2+y+\arcsin\frac{x}{y}=C$. 即原方程的解为$\frac{1}{2}x^2+y+\arcsin\frac{x}{y}=C$.

(3)【解】由原方程可得$(x^2+y^2)dx+d(x^2+y^2)=0$,

即 $dx+\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0$. 两边积分,得 $x+\ln(x^2+y^2)=C$,

因此原方程解为 $x+\ln(x^2+y^2)=C$.

**5.** (1)【解】$2yy'(x-1)=y^2-x$,令 $u=y^2$,$u'=2yy'$,于是原方程化为

$u'(x-1)=u-x$,即 $u'-\frac{1}{x-1}u=-\frac{x}{x-1}$ 为一阶线性方程. 解得

$u=(x-1)\left(\frac{x}{x-1}-\ln(x-1)+x\right)$.

即 $y^2=c(x-1)+x-(x-1)\ln(x-1)$.

(2)【解】该方程为伯努利方程.

$$xy^{-6}y'+y^{-5}=x^3.$$

令 $y^{-5}=u$,$u'=-5y^{-6}y'$,$u'-\frac{5}{x}u=-5x^2$ 为一阶线性方程. 解得 $u=x^5\left(C+\frac{5}{2}x^{-2}\right)$,

于是 $y^{-5}=Cx^5+\frac{5}{2}x^3$.

**6.**【解】$\varphi(0+0)=\varphi(0)\varphi(0)$,$\varphi(0)=\varphi^2(0)$,$\varphi(0)=0$,$\varphi(0)=1$.

若 $\varphi(0)=0$,对任何 $x$ 有 $\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)\varphi(\Delta x)$,

所以 $\varphi(x)=\min\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)\min\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\varphi(x)\varphi(0)=0$.

即 $\varphi(x)=0$.

若 $\varphi(0)=1$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x)\varphi(\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x)(\varphi(x)-\varphi(0))}{\Delta x}$$

即 $\varphi'(x)=\varphi(x)\varphi'(0)$, $\varphi(0)=1$. 解得 $\varphi(x)=e^{\varphi'(0)x}$.

7.**【解】**显然 $y(x_0)=y_0$.

因为 $y'=-p(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(x)dx}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}Q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds\right)+e^{\int_{x_0}^{x}-p(x)dx}(Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt})=-p(x)y+Q(x)$.

于是 $y'+p(x)y=Q(x)$. 证毕.

8. (1)**【解】**原方程可化为$\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=-1\\ x(1)=0\end{cases}$. 把 $x$ 看成 $y$ 的函数, $y$ 是自变量.

解得 $x=y(C-\ln y)$.

又 $x(1)=0$, 得 $C=0$. 即原方程解为 $x=-y\ln y$.

(2)**【解】**令 $x+y=u$. 则 $u'=1+y'$. 于是原方程变为$\begin{cases}xu'+\sin u=0\\ u(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

$-\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{\sin u}$, 积分得 $\ln\dfrac{c}{x}=\ln(\csc u-\cot u)$, $\dfrac{c}{x}=\csc u-\cot u$.

又 $u(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$, 所以 $c=\frac{\pi}{2}$.

原方程解为$\dfrac{\pi}{2x}=\csc(x+y)-\cot(x+y)$.

9. (1)**【解】**令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$.

所以$(1+x^2)\dfrac{dp}{dx}+p^2+1=0$, $\dfrac{dp}{p^2+1}=-\dfrac{dx}{1+x^2}$, 两边积分, 得

$$\arctan p=-\arctan x+c.$$

即$\dfrac{p+x}{1-px}=\tan c=c_1$, $p(1+c_1x)=c_1-x$,

于是$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{c_1-x}{1+c_1x}=-\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{c_1^2+1}{c_1(1+c_1x)}$.

$dy=\left(-\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{c_1^2+1}{c_1(1+c_1x)}\right)dx$, 两边积分, 得

$$y=-\frac{1}{c_1}x+\frac{c_1^2+1}{c_1^2}\ln|1+c_1x|+c_2.$$

(2)**【解】**令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$, 于是原方程变为

$x\dfrac{dp}{dx}+xp^2-p=0$, $\dfrac{1}{p^2}\dfrac{dp}{dx}-\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{p}=-1$.

令$\dfrac{1}{p}=u$, 则 $u'=-\dfrac{1}{p^2}\dfrac{dp}{dx}$,

$u'+\dfrac{1}{x}u=1$, $u(2)=1$, 为一阶线性方程.

解得 $u=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{c}{x}$, $u(2)=1$, 得 $c=0$, 于是 $u=\dfrac{1}{2}x$.

即$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2}x$, $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2}x$, $y=2\ln x+c$, $y(2)=2$, 得 $c=2-2\ln 2$.

即 $y = 2\ln x + 2 - 2\ln 2 = \ln(\frac{x}{2})^2 + 2$.

(3)【解】令 $y' = p$,则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$.原方程化为 $2p\frac{dp}{dy} + p^2 = y$.

令 $p^2 = u$,则 $\frac{du}{dy} = 2p\frac{dp}{dy}$.得 $\frac{du}{dy} + u = y$ 为关于 $y$ 的一阶线性方程.且 $u\Big|_{x=0} = p^2(0) = [y'(0)]^2 = 1$,即 $u(2) = 1$.

解得 $u = y - 1 + ce^{-y}$.

所以 $1 = u(2) = 2 - 1 + Ce^{-2} = 1 + Ce^{-2}, C = 0$.

于是 $u = y - 1, p = \pm\sqrt{y-1}, \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y-1}$.

$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \pm dx$,两边积分得,$\sqrt{y-1} = \pm\frac{x}{2} + C_1$.

$y(0) = 2$,得到 $C_1 = 1$,得解 $\sqrt{y-1} = \pm\frac{x}{2} + 1$.

**10.** (1)【解】特征方程为 $\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2+1)^2 = 0$,

即 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = i, \lambda_4 = \lambda_5 = -i$.

于是 $y = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)\cos x + (c_4 + c_5x)\sin x$.

(2)【解】特征方程为 $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_{3,4} = 1 \pm i$. 于是 $y = c_1e^x + c_2e^{-3x} + e^x(c_3\cos x + c_4\sin x)$.

由 $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 6, y'''(0) = -14$,

得 $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1, c_4 = 1$,

即 $y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-3x} + e^x(\cos x + \sin x)$.

**11.** (1)【解】特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

原方程对应的齐次方程通解为 $y = c_1\cos x + c_2\sin x$.

非齐次方程特解:$y_1^* = \frac{1}{D^2+1}x = (1-D)x = x$(常数省略);

$$y_2^* = \frac{1}{D^2+1}3\sin 2x = 3\frac{1}{D^2+1}\sin 2x = \frac{3}{-4+1}\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$y_3^* = \frac{1}{D^2+1}2\cos x.$$

考查 $\frac{1}{D^2+1}2e^{ix} = 2\frac{1}{D^2+1}e^{ix}$

$$= 2x\cdot\frac{1}{2D}e^{ix}$$

$$= x(-ie^{ix}) = x(\sin x - i\cos x),$$

所以 $y_3^* = \frac{1}{D^2+1}2\cos x = x\sin x$.

所以原方程通解为 $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x - \sin 2x + x\sin x$.

(2)【解】特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$.

原方程对应的齐次方程通解为 $\overline{y} = c_1\cos x + c_2\sin x$.

非齐次方程通解 $y_1^* = \frac{1}{D^2+1}2xe^x = 2e^x\frac{1}{(D+1)^2+1}x = 2e^x\frac{1}{D^2+2D+2}x$

$$= 2e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}D\right)x = e^x(x-1).$$

$y_2^* = \frac{1}{D^2+1}4\sin x = -2x\cos x$.

所以 $y = c_1\cos x + c_2\sin x + e^x(x-1) - 2x\cos x$.

由 $y(0) = y'(0) = 0$，得 $c_1 = 1, c_2 = 2$.

于是 $y = \cos x + 2\sin x + e^x(x-1) - 2x\cos x$.

(3)【解】特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

原方程对应的齐次方程的通解为 $\bar{y} = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$.

当 $a = -2$ 时，

$y^* = \frac{1}{(D+2)^2}e^{-2x} = x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-2x}$；

当 $a \neq -2$ 时，

$y* = \frac{1}{(D+2)^2}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{(a+2)^2}$.

所以 $y = \begin{cases} (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, a \neq -2 \\ (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}, a = -2 \end{cases}$.

**12.** (1)【解】令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$.

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'e^t, \frac{d^2y}{dt^2} = y''e^{2t} + y'e^t$，即$\begin{cases} xy' = \frac{dy}{dt} \\ x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \end{cases}$.

于是原方程化为

$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 2\sin t$. 解得 $y = c_1\cos t + c_2\sin t - t\cos t$，即原方程通解为：

$y = c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x - \ln x\cos\ln x$.

(2)【解】令 $x + 1 = e^t$，则 $t = \ln(x+1)$，

$\frac{dy}{dt} = y'e^t, \frac{d^2y}{dt^2} = y''e^{2t} + y'e^t$，即$\begin{cases} (x+1)y' = \frac{dy}{dt}, \\ (x^2+1)y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \end{cases}$.

于是原方程化为：$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 6te^t$.

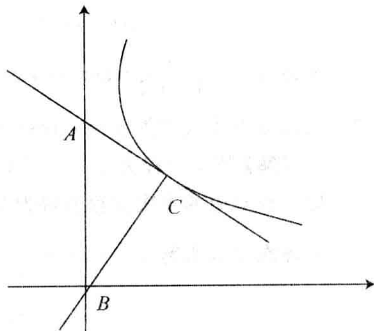
解得 $y = (c_1 + c_2 t)e^t + t^3 e^t$.

于是 $y = (c_1 + c_2\ln(x+1))(x+1) + (x+1)\ln^3(x+1)$.

**13.**【解】设所求的曲线为 $y = f(x)$. 曲线上点 $(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

令 $X = 0$，$A$ 点坐标 $[0, y - xf'(x)]$.




(1) 若 $AB = AC$，则

$[y - xf'(x)]^2 = x^2 + [xf'(x)]^2$，化简，得

$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = x^2$.

令 $u = y^2$，则 $u - x\frac{du}{dx} = x^2$ 为一阶线性方程

得解 $u = -x^2 + cx$，即 $y^2 + x^2 - cx = 0$.

(2) 若 $AC = BC$，则

$x^2 + [xf'(x)]^2 = x^2 + y^2$，

$f'(x)=\pm\frac{y}{x},\ln\frac{y}{c}=\pm\ln x$,

所以 $y=cx$(舍去),$xy=c$.

(3) 若 $AB=BC$,则

$(y-xf'(x))^2=x^2+y^2$,化简得 $-2yf'(x)+x[f'(x)]^2=x$,

所以 $f'(x)=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4x^2}}{2x}=\frac{y}{x}\pm\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}$,即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\pm\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}$.

令 $\frac{y}{x}=u$ 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,原方程化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{u^2+1}$.

若 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{u^2+1}$,则 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$,$\ln(u+\sqrt{u^2+1})=\ln cx$.

$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=cx$,即 $y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$;

若 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{u^2+1}$,则 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$,$\ln(u+\sqrt{u^2+1})=\ln\frac{c}{x}$

$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{c}{x}$,即 $y+\sqrt{x^2+y^2}=c$.

**14.【解】**取物体的初始位置为坐标原点,取向下为 $x$ 轴正方向.$x(t)$ 表示在时刻 $t$ 时物体位置.物体的重力为 $mg$,阻力为 $k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$($k$ 为比例系数).由牛顿定律得到:

$$\begin{cases}mg-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ x(0)=x'(0)=0\end{cases}\text{即}\begin{cases}x''+\frac{k}{m}x'=g\\ x(0)=x'(0)=0\end{cases}.$$

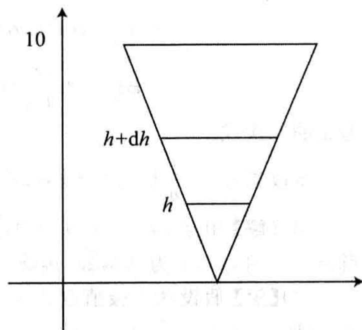
解得 $x=c_1+c_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t$.由 $x(0)=0$,得 $c_1+c_2=0$,

$x'=-\frac{k}{m}c_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$,由 $x'(0)=0$,得 $c_2=\frac{m^2g}{k^2}$.

因此,$c_1=-c_2=-\frac{m^2g}{k^2}$,

$x=-\frac{m^2g}{k^2}+\frac{m^2g}{k^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t$.

**15.【解】**高为 $h$,顶角为 $60°$ 的圆锥的底圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}h$,于是




$-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2\mathrm{d}h=0.5\times0.6\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$,

即 $-\frac{\pi}{3}h^2\mathrm{d}h=0.3\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$,$h(0)=10$.

$-\frac{\pi}{9\sqrt{2}g}h^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}h=\mathrm{d}t$,解得 $-4\frac{\pi}{9\sqrt{2g}}h^{\frac{5}{2}}=t+c$.

由 $h(0)=10$,得 $c=-\frac{4\pi}{9\sqrt{2g}}10^{\frac{5}{2}}$.

所以满足初始条件的解为:$-\frac{4\pi}{9\sqrt{2g}}h^{\frac{5}{2}}=t-\frac{4\pi}{9\sqrt{2g}}=10^{\frac{5}{2}}$.

当 $h=0$ 时,得 $t=\frac{4\pi}{9\sqrt{2g}}10^{\frac{5}{2}}\approx10(\mathrm{s})$.

**16.【解】**在 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$.

则 $T(x-\frac{y}{y'},0)$.$|PQ|=|y|$,$|QT|=|\frac{y}{y'}|$.

则 $\triangle PQT$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|y\cdot\frac{y}{y'}|=\frac{y^2}{2|y'|}$.

曲边三角形 $OPQ$ 的面积为 $\left|\int_0^x y(x)\mathrm{d}x\right|$，于是得方程 $\dfrac{y^2}{2|y'|}=k\left|\int_0^x y(x)\mathrm{d}x\right|$.

两边对 $x$ 求导，得到 $\begin{cases} yy''=2(1-k)y'^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(1-k)p^2$.

若 $p=0$，$y=c$. 因为 $y(0)=0$，则 $y=0$，不合题意.

若 $p\neq 0$，$y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(1-k)p$，$\ln p=2(1-k)\ln y+\ln c_1$，$p=c_1y^{2(1-k)}$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=c_1y^{2(1-k)}$，$y^{2k-1}=(2k-1)(c_1x+c_2)$.

由 $y(0)=0$，得 $c_2=0$. 所以解为：$y^{2k-1}=cx$.（$c=(2k-1)c_1$ 为任意常数）.

**17.【解】** 假设在 $t$ 时刻房间中二氧化碳的含量百分比为 $x\%$，即房中二氧化碳含量为 $x$.

设 $\mathrm{d}t$ 时刻后二氧化碳含量改变量为 $\mathrm{d}x$. 则

$\mathrm{d}x=\left(0.004-\dfrac{x}{10}\right)\mathrm{d}t$；

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{10}(x-0.04)$，$x(0)=0.12$.

解之得 $x=0.04+c\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$. 由 $x(0)=0.12$ 得 $c=0.08$，

于是 $x=0.04+0.08\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$.

当 $t=10$ 时，$x=0.04+0.08\cdot\mathrm{e}^{-1}=0.07$.

# 第七章 一元微积分的应用

## 习题七

**1.** (1) 令 $f(x)=x^3$，可排除 A,B,C.

令 $F(x)=-f(-x)$，$x_1>x_2$，$-x_1<-x_2$. 所以 $F(x_1)=-f(-x_1)>-f(-x_2)=F(x_2)$. 故选 D.

(2)**【解】** 
$$F(a)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-a\cos nx]^2\mathrm{d}x$$
$$=a^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x-2a\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=\pi a^2-2a\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

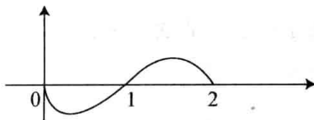
为 $a$ 的二次式.

所以当 $a=\dfrac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ 时，$F(a)$ 有极小值. 故选择 B.

(3)**【解】** 由 $f'(x)>0$. $x\neq 0$，知 $f(x)$ 单调递增，排除 C、D. 又当 $x<0$ 时，$f''(x)\leqslant 0$，知 $f(x)$ 为凸函数. 当 $x>0$ 时，$f(x)$ 为凹函数，排除 A，故 B 为正确答案.

(4)**【解】** 假设两个极值点为 $x=t$ 及 $x=-t(t\neq 0)$，于是 $f(t)=-f(-t)$. 所以 $at^3+bt^2+ct+d=at^3-bt^2+ct-d$，所以 $b+d=0$. 又 $f'(t)=f'(-t)=0$，即 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的根为 $x=\pm t$，所以 $b=0$，于是 $d=0$. 所以 $f(x)=ax^3+cx$ 为奇函数，关于原点对称. 因此 B 为正确答案.

(5)**【解】** 曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 的图形为




由图知 C 为答案.

**2.** (1)【解】由 $F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$，所以 $0<x<\frac{1}{4}$，即 $F(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

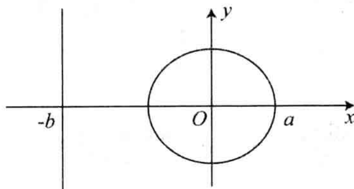
(2)【解】$y'=3x^2-1$，所以在 $x=\frac{1}{3}$ 处切线的斜率为 $k=3\cdot\frac{1}{3^2}-1=-\frac{2}{3}$.

切线方程：$y=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{27}$，曲线和切线的交点为 $x=-\frac{2}{3}$.$\Big[$解曲线和切线的联立方程得 $x^3-\frac{x}{3}+\frac{2}{27}=0$，可得 $(x-\frac{1}{3})^2(x+\frac{2}{3})=0$，解得 $x=-\frac{2}{3}\Big]$

比值为 $\dfrac{\int_{-\frac{2}{3}}^{0}\left(x^3-x+\frac{2}{3}x+\frac{2}{27}\right)\mathrm{d}x}{\int_{0}^{\frac{1}{3}}\left(x^3-x+\frac{2}{3}+\frac{2}{27}\right)\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{108}}=\dfrac{8}{1}$.

(3)【解】参考 P193 页的【例 7.32】.

(4)【解】




$$V=2\pi\int_0^a[(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2-(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2]\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^a 4b\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y\xlongequal{y=a\sin t}8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos2t+1}{2}\mathrm{d}t$$

$$=2ba^2\pi^2.$$

(5)【解】极坐标图形绕极轴旋转所成旋转体体积公式为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta\rho^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}64(1+\cos\theta)^3\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{-128\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^3\mathrm{d}(1+\cos\theta)$$

$$=-\frac{128\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=160\pi.$$

(6)【解】$A=2\pi\int_0^\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2x}\,\mathrm{d}x=2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

(7)【解】$A=2\pi\int_0^\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$$=2\pi\int_0^\pi a(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\pi\int_0^\pi\sqrt{2}a^2(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(1+\cos\theta)$$

$$=-2\sqrt{2}a^2\pi\frac{2}{5}(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{5}a^2.$$

**3.** (1) 证明：$\varphi'(x)=\dfrac{f(x)[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t]}{[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]^2}=\dfrac{f(x)\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]^2}$,

因为 $f(x)>0,x>t$，所以 $\varphi'(x)>0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加.

(2) 证明：$\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}=\dfrac{f'(x)}{x-a}-\dfrac{f'(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}(a<\xi<x)$

$=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-a}$.

因为 $f''(x)>0$，因此 $f'(x)$ 单调递增，从而 $f'(x)>f'(\xi)$，于是 $\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调增加.

(3) 证明：$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}=\dfrac{\int_a^x[f(x)-f(t)]at}{(x-a)^2}<0$，

所以 $F(x)$ 单减.

(4) 证明：①$F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}\geqslant 2$.（因为 $f(x)>0$）

②$F(a)=\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$，

所以存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，又因为 $F'(x)\geqslant 2$，$F(x)$ 单调递增，即实根唯一.

(5) 证明：令 $F(x)=\tan x-1+x\cdot F(0)=-1<0$，$F(1)=\tan 1>0$，

所以存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F(\xi)=0$. 又因为 $F'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+1>0(0<x<1)$，

所以 $F(x)$ 单调递增，即实根唯一.

(6) 证明：令 $F(x)=a_1\sin x+a_2\dfrac{\sin 3x}{3}+\cdots+a_n\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

则 $F(0)=0$，$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a_1-\dfrac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1}=0$.

由罗尔定理，存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $a_1\cos\xi+a_2\cos 3\xi+\cdots+a_n\cos(2n-1)\xi=0$.

**4. 计算题**

(1)**【解】**由联立方程 $\begin{cases}x-y+1=0\\ y=x^2-4x+5\end{cases}$ 解得交点坐标 $(x_1,y_1)=(1,2)$，$(x_2,y_2)=(4,5)$.

由 $y'=2x-4$ 求得二条法线的斜率分别为 $k_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，$k_{x=4}=-\dfrac{1}{4}$. 相应的法线方程为

$y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$，$y-5=-\dfrac{1}{4}(x-4)$. 解得法线的交点为 $(x_3,y_3)=\left(6,\dfrac{9}{2}\right)$.

于是

$$S=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{15}{4}.$$

(2)**【解】**$\begin{cases}y-a^2=2a(x-a)\\ y=-x^2+4x-1\end{cases}$.

$x^2+(2a-4)x+(1-a^2)=0$

$x_1+x_2=4-2a$

$x_1x_2=1-a^2$

$x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{2a^2-4a+3}$

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x-1-2ax+a^2)\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}(-x^2+(4-2a)x+a^2-1)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+(2-a)x^2+(a^2-1)x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$=-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)+(2-a)(x_2^2-x_1^2)+(a^2-1)(x_2-x_1)$$

$$=-\frac{1}{3}(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)+(2-a)(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(a^2-1)(x_2-x_1)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2a^2-4a+3}(4a^2-8a+6)$$

$$=\frac{4}{3}(2a^2-4a+3)^{\frac{3}{2}}.$$

$$S'(a)=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{2a^2-4a+3}(4a-4)=0,$$

$4a-4=0$,

$a=1$. 即 $a=1$ 时,所围面积最小.

(3)**【解】**过点(1,1)斜率为 $k$ 的直线为

$$y=kx+1-k.$$

所以

$$F(k)=\int_0^2[x^2-kx-(1-k)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2[x^4-2kx^3+(k^2+2k-2)x^2+2k(1-k)x+(1-k)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2k}{4}x^4+\frac{k^2+2k-2}{3}x^3+k(1-k)x^2+(1-k)^2x\right]\bigg|_0^2$$

$$=\frac{32}{5}-8k+\frac{8}{3}(k^2+2k-2)+4k(1-k)+2(1-k)^2.$$

令 $F'(k)=0$,得

$$F'(k)=-8+\frac{8}{3}(2k+2)+(4-8k)-4(1-k)=\frac{4}{3}k-\frac{8}{3}=0,$$

$k=2$.

故所求直线方程为 $y=2x-1$.

(4)**【解】**令 $f'(x)=2x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}=0$,得 $x=0,x=\pm\sqrt{2}$.

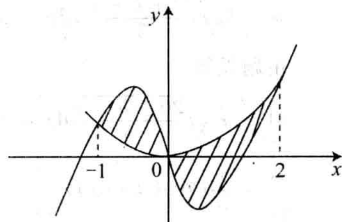
$$f(0)=0,f(\pm\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t}\bigg|_0^2=1+\mathrm{e}^{-2},$$

$$f(\pm\infty)=\int_0^{+\infty}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t}\bigg|_0^{+\infty}=1.$$

所以,最大值为 $f(\pm\sqrt{2})=1+\mathrm{e}^{-2}$,最小值为 $f(0)=0$.

(5)**【解】**

$$S=\int_{-1}^0(x^3-2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_0^2(x^2-x^3+2x)\mathrm{d}x=\frac{37}{12}.$$




旋转体体积:由例 7.11

① 平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 $y$ 轴旋转所成旋转体体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

②(使用相同方法可以证明)平面图形 $a\leqslant x\leqslant b\leqslant 0,0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 $y$ 轴旋转所成旋转体体积为

$$V=-2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

由图知,

$$V=-2\pi\int_{-1}^0 x(x^3-2x-x^2)\mathrm{d}x+2\pi\int_0^2 x(x^2-x^3+2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{13\pi}{30}+\frac{88\pi}{15}=\frac{63\pi}{10}.$$

(6)**【解】**$V=2\times2\pi\int_{b-a}^{b+a}x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x-b=a\sin t}4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(b+a\sin t)a^2\cos^2t\mathrm{d}t$

$$= 8\pi ba^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = 8\pi ba^2\cdot\frac{\pi}{4} = 2\pi^2 ba^2.$$

$(x-b)^2+y^2=a^2$ 绕 $y$ 轴旋转相当于 $(y-b)^2+x^2=a^2$ 绕 $x$ 轴旋转.

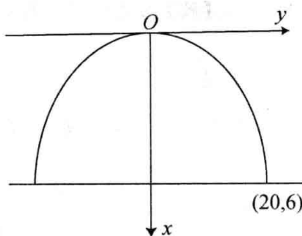
所以旋转体的表面积

$$S = 2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x + 2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= 4\pi ab\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \xlongequal{x=a\sin t} 4\pi ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = 4\pi^2 ab.$$

(7)**【解】**

液体静压力 = 液体比重 × 液体深度 × 受力面积




① 由图知抛物线方程为 $y=\frac{3}{5}\sqrt{5x}$，于是

$$\mathrm{d}p = x\cdot 2y\cdot\mathrm{d}x = 6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5}}\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\sqrt{5x^3}\mathrm{d}x,$$

$$p = \int_0^{20}\frac{6}{5}\sqrt{5x^3}\mathrm{d}x = \frac{6\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{20} = 1920.$$

假设将薄板沉到水中，深为 $h$ 处，此时薄板的曲线方程为

$$y = 3\sqrt{\frac{x-h}{5}},\mathrm{d}p = x\cdot 2y\cdot\mathrm{d}x = 6x\sqrt{\frac{x-h}{5}}\mathrm{d}x.$$

由题设知

$$6\int_h^{h+20}x\sqrt{\frac{x-h}{5}}\mathrm{d}x = 3840,\text{即}\int_h^{h+20}x\sqrt{\frac{x-h}{5}}\mathrm{d}x = 640,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{5}(x-h)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-h)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_h^{h+20} = 640.$$

$$\frac{h}{3} = 4, h = 12.$$

② 由图知抛物线方程为 $y=3\sqrt{\frac{20-x}{5}}$. 于是 $\mathrm{d}p = x\cdot 2y\cdot\mathrm{d}x = 6x\sqrt{\frac{20-x}{5}}\mathrm{d}x$

$$p = \frac{6}{\sqrt{5}}\int_0^{20}x\sqrt{20-x}\mathrm{d}x = \frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{5}(20-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{20} - \frac{120}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{3}(20-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{20} = 1280.$$

假设将薄板沉到水中，深为 $h$ 处，此时薄板的曲线方程为

$$y = 3\sqrt{\frac{20+h-x}{5}},\mathrm{d}p = x\cdot 2y\cdot dx = 6x\sqrt{\frac{20+h-x}{5}}\mathrm{d}x.$$

由题设知

$$6\int_h^{h+20}x\sqrt{\frac{20+h-x}{5}}\mathrm{d}x = 2\times 1280,\text{即}\frac{6}{\sqrt{5}}\int_h^{h+20}x(20+h-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2560$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{5}(20+h-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_h^{h+20} - \frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{3}(20+h)(20+h-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_h^{h+20} = 2560$$

$$-12+20+h = 16, h = 8.$$

**5. 作图**

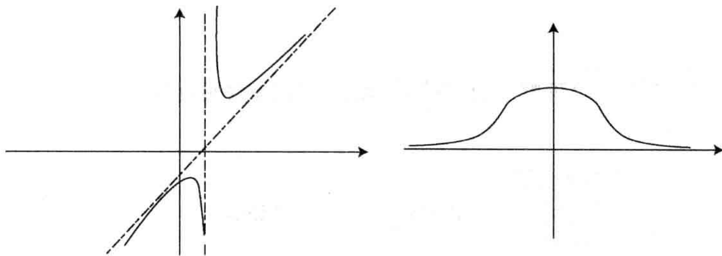
(1)**【解】**$y = x-1+\frac{1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}y = +\infty$，垂直渐近线为 $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}y = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = 1,\lim\limits_{x\to\infty}(y-x) = -1$.

斜渐近线为 $y = x-1$.



(2)$y=(1+x^2)e^{-x^2}$ 为偶函数,所以只须考虑 $x>0$ 情况.

$y'=2xe^{-x^2}-2x(1+x^2)e^{-x^2}=-2x^3e^{-x^2}$.

$x>0$ 时,$y'<0$,$y$ 递减,$y(0)=1$,$\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$.

$y''=-6x^2e^{-x^2}+4x^4e^{-x^2}=(4x^4-6x^2)e^{-x^2}$.

$0<x<\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 时,函数是凸的,$x>\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 时,函数是凹的.

# 第八章　无穷级数

## 习题八

**1.** (1)**【解】**因为 $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$ 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 发散.故选 B.

(2)**【解】**由莱布尼茨判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$.因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\dfrac{1}{n}}=1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散,故选 C.

(3)**【解】**$s(x)=\sum b_n\sin n\pi x(-\infty<x<+\infty)$ 是 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$ 进行奇延拓后展成的傅氏级数.所以 $s\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-s\left(\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.故选 B.

(4)**【解】**因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.因为不知 $a_n$ 是否大于 0,故 A、B、D 的敛散性均无法判断.

对于 C,$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1$.故选 C.

(5)**【解】**$\sum\limits_{n=1}^{n}u_n$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{n}u_{n-1}$ 收敛.收敛级数的和收敛.故选 D.

(6)**【解】**因为级数在 $x=-2$ 收敛,所以收敛半径大于 2.幂级数在收敛半径内的任何点都绝对收敛.故选 B.

(7)**【解】**因为 $(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^{-2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 有相同收敛半径.所以

$|x-1|<3$,$-2<x<4$

在 $(-2,4)$ 中级数一定收敛,在端点级数不一定收敛.故选 A.

**2.** (1)**【解】**因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\ln(n+2)}\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n\ln n}}=1$,$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$ 发散,由积分判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散.所以原级数发散.

(2)【解】因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}}{\dfrac{1}{n^3}}=1,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\text{ 收敛,所以原级数收敛.}$$

(3)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}3\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\dfrac{3}{\mathrm{e}}>1$,所以原级数发散.

(4)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{n+\dfrac{1}{n}}=0<1$,所以原级数收敛.

(5)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\dfrac{n!n!}{(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}<1$,所以原级数收敛.

(6)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{\dfrac{1}{n!}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{(n+1)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}=0<1$,则原级数收敛.

(7)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{\frac{n+1}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^{-2}}{\left(2+\dfrac{\ln n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$,原级数收敛.

(8)【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}}\xlongequal{令 y=\frac{1}{n}}\lim\limits_{n\to0^+}\dfrac{(1+y\ln y)^{\frac{1}{y}}}{y}$.

令 $u=\dfrac{(1+y\ln y)^{\frac{1}{y}}}{y}$,$\ln u=\dfrac{\ln(1+y\ln y)-y\ln y}{y}$,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0^+}\ln u&=\lim_{y\to0^+}\frac{\ln(1+y\ln y)-y\ln y}{y}=\lim_{y\to0^+}\frac{\dfrac{\ln y+1}{1+y\ln y}-\ln y-1}{1}\\&=\lim_{y\to0^+}\frac{\ln y+1-\ln y-y\ln^2y-1-y\ln y}{1+y\ln y}=0,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{y\to0^+}u=\mathrm{e}^0=1$,即原极限为 1. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,所以原级数发散.

(9)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}=1\neq0$,所以原级数发散.

**3.** (1)【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}a^{\frac{1}{n}}\neq0$,原级数发散.

(2)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}=0$,令 $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)\sqrt{x+1}-1}$.

当 $x>0$ 时,$f'(x)=\dfrac{-(x+1)^2\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-1}{[(x+1)\sqrt{x+1}-1]^2}<0$,所以数列$\left\{\dfrac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}\right\}$单减. 根据莱布尼茨判别法,级数收敛.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ 发散,即原级数条件收敛.

(3)【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n}=\dfrac{2}{3}$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$收敛,即原级数绝对收敛.

(4)【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)(2n+3)}{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)(3n+2)}}{\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n+2}=\dfrac{2}{3}<1$,

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$收敛,原级数绝对收敛.

(5)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$收敛,原级数绝对收敛.

(6)【解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{\pi}{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{n}}=\pi$,又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$条件收敛,所以原级数条件收敛.

**4. 证明**

(1) 证明:因为$a_n>0$且单调递减,因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,不妨记为$a$,又由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$发散,得$a>0$. 容易验证$a_n>a$. $\forall n$. 因此$1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a}$.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a}=\dfrac{1}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\dfrac{1}{a}(a_1-a)$,收敛,

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-a_{n+1}}{a_n}$收敛.

(2) 考查数列$\{b_na_n\}$. 因为$b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geqslant\delta$($\delta>0$为常数),所以$b_na_n-b_{n+1}a_{n+1}\geqslant\delta a_{n+1}>0$,即该数列递减有下界,于是$\lim\limits_{n\to\infty}b_na_n$存在. 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_na_n-b_{n+1}a_{n+1})$收敛,又$a_{n+1}<\dfrac{b_na_n-b_{n+1}a_{n+1}}{\delta}$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

**5.** (1)【解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^n+\sqrt[3]{n})(x-1)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n(x-1)^{2n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}(x-1)^{2n}$.

第一个级数的收敛区域为$\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}},1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$,第二个级数的收敛区域为$(0,2)$,所以它们的共同收敛区域为$\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}},1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

当$x=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时,得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{3^n}$,因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{3^n}$收敛,所以该级数发散. 原级数的收敛区域为$\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}},1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(2)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1}}=x^2<1$,于是$|x|<1$.

当$x=1$时,得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$,收敛;当$x=-1$时,得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}$,收敛. 于是原级数的收敛域为$[-1,1]$.

(3)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n-1}{2^n}|x|^{2n-1}}=\dfrac{|x^2|}{2}<1$,$|x|<\sqrt{2}$. 当$x=\pm\sqrt{2}$时,得数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{2}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{-\sqrt{2}}$ 都发散. 原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(4)【解】$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n x^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 的收敛区域 $(-1,1)$；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n x^n}$ 的收敛区域 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$. 所以公共收敛区域为 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(5)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-1|^{2n}}{n\cdot 9^n}}=\frac{(x-1)^2}{9}<1$，$|x-1|<3$，当 $x-1=\pm 3$ 时，得数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散. 该级数的收敛区域为 $(-2,4)$.

(6)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}|x-5|^n}=|x-5|<1$，$4<x<6$，$x=4$ 时，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，当 $x=6$ 时，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 该级数的收敛域为 $[4,6)$.

**6.** (1)【解】因为 $\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{2}{3n+4}+\frac{1}{3n+7}\right)$，所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{18}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+7}\right)=\frac{1}{24},$$

即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}=\frac{1}{24}$.

(2)【解】$\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)\\&=\frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n+1}-\cdots-\frac{1}{n+m}\right)\\&=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

(3)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{2n-1}}{2n-1}}=|x|^2<1$，级数收敛，所以收敛半径为 1. 当 $x=\pm 1$ 时，由莱布尼兹判别法知收敛. 所以收敛区域为 $[-1,1]$.

令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$.

所以 $s(x)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$，$x\in[-1,1]$.

(4)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)|x|^n}=|x|<1$. 当 $x=\pm 1$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)$ 都发散. 所以收敛区域为 $(-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3},x\in(-1,1)$$

(5)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x+1|^n}{2^n n}}=\frac{|x+1|}{2}<1$，$-3<x<1$，

当 $x=1$ 时，得数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；当 $x=-3$ 时得数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，收敛. 于是收敛域为 $[-3,1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n n}&=\int_{-1}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n n}\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\frac{2}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\ln 2-\ln(1-x)=\ln\frac{2}{1-x},x\in[-3,1).\end{aligned}$$

(6)【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}|x|^{n-1}}=\dfrac{|x|}{2}<1$，$|x|<2$. 当 $x=2$ 时，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)$ 发散. 当 $x=-2$ 时，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)$ 发散，所以收敛区域为$(-2,2)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n-1}}\right)''=4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right)''=2\left(\frac{x^2}{2-x}\right)''=\frac{16}{(2-x)^3},(-2,2)$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^{n-1}}=\dfrac{16}{(2-1)^3}=16$.

**7.** (1)【解】$f'(x)=\dfrac{1-4x}{1+x-2x^2}=\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{1}{1-x}$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n2^{n+1}-1]x^n.$$

上述级数的收敛半径为$\dfrac{1}{2}$. 所以

$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n2^{n+1}-1]x^n\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n2^{n+1}-1]\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^{n-1}2^n-1]}{n}x^n.$$

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，得数项级数 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^nn}$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^nn}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(-1)^{n-1}2^n-1]}{n}(-1)^n\dfrac{1}{2^n}$ 发散.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时得数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2^nn}\right)$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{2^nn}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2^nn}\right)$ 收敛. 所以

$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n2^{n+1}-1]x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^{n-1}2^n-1]}{n}x^n\text{ 的收敛区域为}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

(2)【解】由 6(3) 得知

$$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\text{，所以}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{2}\arctan x=\frac{1}{4}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]+\frac{1}{2}\arctan x$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3},x\in(-1,1).$$

(3)【解】$\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n},(-1,1]$.

$$f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以当 $x=\pm1$ 时上述级数都收敛. 所以

$$f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2},[-1,1].$$

(4)【解】$f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}=\dfrac{2}{1+2x}+\dfrac{1}{1-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n2^{n+1}+1]x^n.$$

以上级数的收敛半径为$\frac{1}{2}$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,得$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right]$,发散;

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,得$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n 2+\frac{1}{2^n}\right]$,发散.

所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 2^{n+1}+1]x^n,\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(5)【解】$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^{2n}.$$

注意到 $f'(0)=0,f(0)=-1$.

$$f(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}x^{2n+2},$$

当 $x=\pm1$ 时,考查数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}$. 由拉阿伯判别法

$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}-1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2-1\ln}{(2n+1)^2}=\frac{5}{2}$,数项级数收敛. 所以

$$f(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}x^{2n+2},[-1,1].$$

**8.** (1)【解】$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+4-3}-\frac{1}{x+4-2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,(-6,-2).$$

(2)【解】$f(x)=\lg x=\frac{1}{\ln10}\ln x=\frac{1}{\ln10}\ln(1+x-1)=\frac{1}{\ln10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1},(0,2]$.

**9.** (1)【解】① 余弦函数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos\frac{nx}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}\sin\frac{nx}{2}=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2x\sin\frac{nx}{2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{-4}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\frac{nx}{2}\mathrm{d}x=\frac{8}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}\cos\frac{nx}{2}=\frac{8}{n^2\pi}\left[x\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{8}{n^2\pi}\cdot2\pi\cos\frac{2n\pi}{2}=(-1)^n\cdot\frac{16}{n^2}.$$

于是

$$f(x)=x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx}{2}=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{16}{n^2}\cos\frac{nx}{2},[0,2\pi].$$

② 正弦函数

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin\frac{nx}{2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}\cos\frac{nx}{2}=-\frac{2}{n\pi}\left[x^2\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2x\cos\frac{nx}{2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{2}{n\pi}4\pi^2(-1)^n+\frac{8}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}\sin\frac{nx}{2}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{8\pi}{n}+\frac{8}{n^2\pi}\left[x\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin\frac{nx}{2}\mathrm{d}x\right]=(-1)^{n+1}\frac{8\pi}{n}+\frac{16}{n^3\pi}\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{8\pi}{n}+\frac{16}{n^3\pi}[(-1)^n-1].$$

$f(x) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx}{2}, (0, 2\pi).$

(2)【解】① 余弦函数

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{2n\pi}{2}\right),$$

$$a_n = \begin{cases} -2, n = 4k+2 \\ 0, \text{其他} \end{cases}.$$

于是 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}, (0, 2).$

② 正弦函数

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

于是 $f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}, (0, 2).$

**10.** (1)【解】$|x|$ 为偶函数,将它展拓成以 $2\pi$ 为周期的周期函数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1],$$

$$a_n = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ -\frac{4}{n^2\pi}, n = 2k+1 \end{cases}.$$

于是 $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + |x| = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\right)\cos x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, [-\pi, \pi].$

(2)【解】$f(x)$ 为奇函数,拓展成以 $2\pi$ 为周期的周期函数得

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n}(-1)^n,$$

$$\text{于是 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n}(-1)^n\right]\sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\frac{\pi}{2}\right]\sin nx, (-\pi, \pi).$$

# 第九章　矢量代数与空间解析几何

## 习题九

**1.**【解】

由矢量加法的平行四边形法则知:当 $0 < \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle < \frac{\pi}{2}$ 时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;当 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle > \frac{\pi}{2}$ 时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;当 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \frac{\pi}{2}$ 时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

**2.**【解】(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}$

$= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$

(2) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]$

$= (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot[-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot[-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]$

$= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) - 2\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$

(3) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$$= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = 2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

**3.【解】** $0 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\lambda\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

$$= 3\lambda|\boldsymbol{a}|^2 - \lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2}{3}\pi + 51|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2}{3}\pi - 17|\boldsymbol{b}|^2 = 17\lambda - 680.$$

所以 $\lambda = 40$.

**4.【解】**

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

所求单位矢量为 $\pm\frac{1}{3}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$.

**5.【解】**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + 1 &= (4\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}) + 3(4\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}) - 2(\boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}) + 1 \\ &= 8|\boldsymbol{m}|^2 + 3|\boldsymbol{n}|^2 + 12|\boldsymbol{m}|^2 - 6|\boldsymbol{n}|^2 - 4|\boldsymbol{m}|^2 + 12|\boldsymbol{n}|^2 + 1 \\ &= 16|\boldsymbol{m}|^2 + 9|\boldsymbol{n}|^2 + 1 = 16\times4 + 9\times1 + 1 = 74.\end{aligned}$$

**6.【解】** 假设平行四边形的两边为矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$

不妨假设 $\begin{cases}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n}\end{cases}$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n}\end{cases}$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (2\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n})\times(-\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n}) = 5\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$,

$S_{\square} = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 5|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}| = 5|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\sin(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = 5$.

**7.【解】** ① $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$.

所以 $0 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2k|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 = 2k + 4, k = -2$;

② $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\times(k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (2 - k)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形面积为 $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$，则

$6 = |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |2 - k||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 2|2 - k|, k - 2 = \pm3$,

所以 $k = -1$ 或 $k = 5$.

**8.【解】** 所求平面平行于 $x + y + 2z = 0$，所以该平面法向量为 $(1,1,2)$.

由 $\begin{cases}2x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0\end{cases}$，解得 $x = 1, y = 1, z = 1$. 即三平面的交点为 $(1,1,1)$.

所以所求平面为 $(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0$,

即 $x + y + 2z - 4 = 0$.

**9.【解】** 过平面 $x + 28y - 2z + 17 = 0$ 和平面 $5x + 8y - z + 1 = 0$ 的交线的平面方程为

$x + 28y - 2z + 17 + \lambda(5x + 8y - z + 1) = 0$,

即 $(1 + 5\lambda)x + (28 + 8\lambda)y - (2 + \lambda)z + 17 + \lambda = 0$.

设所求平面和球面的切点为 $(x_0, y_0, z_0)$，于是在该点的法矢量为 $(x_0, y_0, z_0)$. 于是

$$\begin{cases}(1 + 5\lambda)x_0 + (28 + 8\lambda)y_0 - (2 + \lambda)z_0 + 17 + \lambda = 0 \\ \dfrac{1 + 5\lambda}{x_0} = \dfrac{28 + 8\lambda}{y_0} = \dfrac{-(2 + \lambda)}{z_0} = t \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1\end{cases},$$

消去 $x_0, y_0, z_0, t$. 得

$(1 + 5\lambda)^2 + (28 + 8\lambda)^2 + (2 + \lambda)^2 = (17 + \lambda)^2$.

即 $89\lambda^2 + 428\lambda + 500 = 0\Rightarrow\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -\frac{250}{89}$.

当 $\lambda = -2$ 时，所求平面为 $3x - 4y - 5 = 0$;

当 $\lambda = -\frac{250}{89}$ 时，所求平面为 $387x - 164y - 24z - 421 = 0$.

**10.【解】**由题意，设 $L_2$ 的方向向量为 $(m,n,1)$，其中 $m>0$. $x$ 轴的单位向量为 $(1,0,0)$，则

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{m}{1\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}} \qquad (*)$$

过 $L_1$ 上的点 $(7,3,5)$ 及点 $(2,-3,-1)$ 的向量为 $(5,6,6)$，由题意，该向量与 $L_1$ 的方向矢量 $(1,2,2)$ 及 $L_2$ 的方向矢量 $(m,n,1)$ 共面. 所以混合积为 0，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}=0,$$

得到 $4n-4=0, n=1$. 代入式$(*)$，得到 $m=\frac{2}{\sqrt{6}}$. 于是 $L_2$ 的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{\sqrt{6}}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{1}，即\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}.$$

**11.【解】**将两直线方程转化为参数方程，得

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-3+2t, \\ z=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=s \\ y=-5+2s. \\ z=2+7s \end{cases}$$

两直线上的点之间的距离平方为：

$$\begin{aligned} d^2 &= (-1+3t-s)^2+(-3+2t+5-2s)^2+(t-2-7s)^2 \\ &= (-1+3t-s)^2+(2+2t-2s)^2+(t-2-7s)^2 \end{aligned}$$

当 $t,s$ 使 $d^2$ 达到最小值时，$d$ 即为垂直距离.

$$\frac{\partial d^2}{\partial t}=6(-1+3t-s)+4(2+2t-2s)+2(t-2-7s)=0,$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial s}=-2(-1+3t-s)-4(2+2t-2s)-14(t-2-7s)=0,$$

解 $\begin{cases} 28t-28s-2=0 \\ -28t+108s+22=0 \end{cases}$，得 $s=-\frac{1}{4}, t=-\frac{5}{28}$.

于是

$$d^2=\left(-1-\frac{15}{18}+\frac{1}{4}\right)^2+\left(2-\frac{10}{28}+\frac{2}{4}\right)^2+\left(-\frac{5}{28}-2+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{105}{49},$$

即 $d=\frac{3\sqrt{35}}{7}$.

**12.【解】**假设直线与 $z$ 轴交点为 $(0,0,z_0)$，则 $2z_0-6=0, z_0=3$，

将 $(0,0,3)$ 代入 $x+4y-z+d=0$，得到 $d=3$.

**13.【解】**由 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ y+z+1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$，得直线与平面的交点为 $(0,-1,0)$.

将已知直线转化为：$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{-1}=z$，则该直线的方向向量为 $(-2,-1,1)$. 所求直线与平面的法向量为 $(1,1,1)$，已知直线的方向矢量 $(-2,-1,1)$ 都垂直，于是所求直线的方向向量为 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

于是所求直线为 $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$.

**14.【解】**过点 $(1,-1,1)$，$(-1,1,0)$ 的向量为 $(2,-2,1)$，由题意，两直线的方向向量 $(1,2,\lambda)$，$(1,1,1)$ 与 $(2,-2,1)$ 共面，所以 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$，

得 $4\lambda-5=0,\lambda=\dfrac{5}{4}$.

**15.【解】**在 $xOy$ 平面上的投影：$\begin{cases}x^2+2y^2=4\\z=0\end{cases}$.

在 $xOz$ 平面上的投影：$\begin{cases}x^2+2z^2=4\\y=0\end{cases}$,

在 $yOz$ 平面上的投影：$\begin{cases}y=z\\x=0\end{cases}$,$(|y|\leqslant\sqrt{2})$.

**16.【解】**因为母线平行于 $z$ 轴，消去 $z$，得

$$5x^2-3y^2=1$$

即为所求.

**17.【解】**由平面束方程知，直线 $\begin{cases}x+y-z=1\\-x+y-z=1\end{cases}$ 的投影柱面方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(y-x-z-1)=0,$$

即 $\quad(1-\lambda)x+(1+\lambda)y-(1+\lambda)z-(1+\lambda)=0.$

又上述平面与平面 $x+y+z-0$ 垂直，所以

$$(1-\lambda)\cdot1+(1+\lambda)\cdot1-(1+\lambda)\cdot1=0,$$

得到 $\lambda=1$，于是投影平面为

$$2y-2z-2=0,\text{即 } y-z-1-0,$$

所求投影直线为 $\begin{cases}y-z-1=0\\x+y+z=0\end{cases}$.

**18.【解】**因为母线平行于 $z$ 轴，只要在方程中消去 $z$，得到

$$5x^2-3y^2=1$$

为所求.

# 第十章　多元函数微分学

## 习题十

**1.【解】**$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'y,\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'(1+y)$. 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'(f_1'+f_2'y)$.

**2.【解】**原式两边对 $y$ 求导，$z$ 是 $y$ 的函数，得

$2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)+y\varphi'\left(\dfrac{z}{y}\right)\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial y}y-z}{y^2}$. 所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)-z\varphi'\left(\dfrac{z}{y}\right)}{2yz-y\varphi'\left(\dfrac{z}{y}\right)}$.

**3.【解】**$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$.

**4.【解】**(1) $f_1'+f_2'\dfrac{\partial z}{\partial x}+f_3'(1+\dfrac{\partial z}{\partial x})=0,\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_1'+f_3'}{f_2'+f_3'}$,

$f_1'+f_3'\dfrac{\partial z}{\partial y}+f_2'(1+\dfrac{\partial z}{\partial y})=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_1'+f_2'}{f_2'+f_3'}$,

于是 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\dfrac{(f_1'+f_3')\mathrm{d}x+(f_1'+f_2')\mathrm{d}y}{f_2'+f_3'}$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'(z+x\dfrac{\partial z}{\partial x})+f_2'\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{zf_1'}{1-xf_1'-f_2'}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'x\dfrac{\partial z}{\partial y}+f_2'(\dfrac{\partial z}{\partial y}-1),\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-f_2'}{1-xf_1'-f_2'}$,

于是 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\dfrac{zf_1'\mathrm{d}x-f_2'\mathrm{d}y}{1-xf_1'-f_2'}$.

**5.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)\mathrm{e}^x\sin y+2xf_2{}'(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x\sin y(f_{11}{}''\mathrm{e}^x\cos y+2yf_{12}{}'')+\mathrm{e}^x\cos yf_1{}'+2x(f_{12}{}''\mathrm{e}^x\cos y+2yf_{22}{}'')$$

$$=f_{11}{}''\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y+2\mathrm{e}^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}{}''+4xyf_{22}{}''+f_1{}'\mathrm{e}^x\cos y.$$

**6.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1{}'+\frac{1}{y}f_2{}'.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\left(2f_{11}{}''+\frac{1}{y}f_{12}{}''\right)+\frac{1}{y}(2f_{12}{}''+\frac{1}{y}f_{22}{}'')=4f_{11}{}'+\frac{4}{y}f_{12}{}''+\frac{1}{y^2}f_{22}{}''.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2{}'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f_2{}'+\frac{x^2}{y^4}f_{22}{}''.$$

**7.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln yf_1{}'+f_2{}'.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\ln y(f_{11}{}''\ln y+f_{12}{}'')+f_{12}{}''\ln y+f_{22}{}''=f_{11}{}''\ln^2 y+2f_{12}{}''\ln y+f_{22}{}''.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}f_1{}'+\ln y(f_{11}{}''\frac{x}{y}-f_{12}{}'')+f_{12}{}''\frac{x}{y}-f_{22}{}''$$

$$=\frac{x\ln y}{y}f_{11}{}''+(\frac{x}{y}-\ln y)f_{12}{}''-f_{22}{}''+\frac{1}{y}f_1{}'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y}=\frac{x}{y}f_1{}'-f_2{}'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}f_1{}'+\frac{x}{y}(\frac{x}{y}f_{11}{}''-f_{12}{}'')-\frac{x}{y}f_{12}{}''+f_{22}{}''=\frac{x^2}{y^2}f_{11}{}''-\frac{2x}{y}f_{12}{}''+f_{22}{}''-\frac{x}{y^2}f_1{}'.$$

**8.【解】** 以上两式对 $x$ 求导，得

$$\begin{cases}1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\1+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+3z^2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}\text{，即}\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(1+2z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1\\2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(1+3z^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1\end{cases}.$$

由克莱姆法则解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2z-3z^2}{1+3z^2-2y-4yz},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2y-1}{1+3z^2-2y-4yz}.$$

**9.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}f''\left(\frac{y}{x}\right)+2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{y^2}{x^3}f''+2\frac{y}{x^3}\varphi'+\frac{y^2}{x^4}\varphi''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=-\frac{y}{x^2}f''-\frac{1}{x^2}\varphi'-\frac{y}{x^3}\varphi''$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}\varphi'(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}f''+\frac{1}{x^2}\varphi''$$

于是 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2}{x}f''+\frac{2y}{x}\varphi'+\frac{y^2}{x^2}\varphi''-2\frac{y^2}{x}f''-\frac{2y}{x}\varphi'-\frac{2y^2}{x^2}\varphi''+\frac{y^2}{x}f''+\frac{y^2}{x^2}\varphi''=0.$

**10.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1{}'+yf'_2\varphi'(xy)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[-f_{11}''+xf_{12}''\varphi']+f_2'\varphi'+y\varphi'[-f_{12}''+xf_{22}''\varphi']+xyf_2'\varphi''$$
$$=(\varphi'+xy\varphi'')f_2'-2xf_{11}''+(2x^2-y)\varphi'f_{12}''+xy(\varphi')^2f_{22}''.$$

**11.【解】** $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x),\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}.$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y),\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}.$$

$$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=p(y)z'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)z'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=\frac{p(y)z'(u)p(x)}{1-\varphi'(u)}-\frac{p(x)z'(u)p(y)}{1-\varphi'(u)}=0.$$

**12.【解】** $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+2\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}=Q(x,y(x)).$

所以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y'$，

于是$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\frac{\partial P}{\partial y}+z\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y'=\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}+(z-y')\frac{\partial Q}{\partial y}.$

**13.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=u_x'\mathrm{e}^{ax+y}+au\mathrm{e}^{ax+y}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=u_y'\mathrm{e}^{ax+y}+u\mathrm{e}^{ax+y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=u_{xy}''\mathrm{e}^{ax+y}+u_x'\mathrm{e}^{ax+y}+au_y'\mathrm{e}^{ax+y}+au\mathrm{e}^{ax+y}$$
$$=au_y'\mathrm{e}^{ax+y}+u_x'\mathrm{e}^{ax+y}+au\mathrm{e}^{ax+y}.$$

所以$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=au_y'\mathrm{e}^{ax+y}+u_x'\mathrm{e}^{ax+y}+au\mathrm{e}^{ax+y}-u_x'\mathrm{e}^{ax+y}-au\mathrm{e}^{ax+y}-u_y'\mathrm{e}^{ax+y}-u\mathrm{e}^{ax+y}+u\mathrm{e}^{ax+y}$

$$=au_y'\mathrm{e}^{ax+y}-u_y'\mathrm{e}^{ax+y}=0.$$

于是 $a=1$.

**14.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}x^2\right)$

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}y^2\right).$$

所以$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''+f'\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，得 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$

于是 $uf''(u)+f'(u)=0.(uf'(u))'=0.$

$uf'(u)=c_1,f'(u)=\frac{c_1}{u},f(u)=c_1\ln u+c_2.$

即 $z=c_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+c_2$（$c_1,c_2$ 为任意常数）.

**15.【解】** 设切点为$(x_0,y_0,z_0)$则所求切面的法向量为$\{2x_0,4y_0,6z_0\}$. 所以

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{3}=t,x_0=\frac{t}{2},y_0=t,z_0=\frac{t}{2}.$$

代入曲面方程得：$\frac{t^2}{4}+2t^2+3\frac{t^2}{4}=12,t=\pm2.$

当 $t=2$ 时，

$x_0=1,y_0=2,z_0=1.$

所求切面方程为$(x-1)+4(y-2)+3(z-1)=0$，即 $x+4y+3z-12=0$；

当 $t=-2$ 时，

$x_0=-1, y_0=-2, z_0=-1$.

所求切面方程为$(x+1)+4(y+2)+3(z+1)=0$,即 $x+4y+3z+12=0$.

**16.【解】**圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0(F)\\2x-3y+5z-4=0(G)\end{cases}$.

在 $M(1,1,1)$ 处

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\-3 & 5\end{vmatrix}\right|_M=16,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2z & 2x-3\\5 & 2\end{vmatrix}\right|_M=9,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2x-3 & 2y\\2 & -3\end{vmatrix}\right|_M=-1$$

所以在 $M(1,1,1)$ 处圆周的方向向量为$(16,9,-1)$.

所求切线为$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$,

所求法平面为 $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$,即 $16x+9y-z-24=0$.

**17.【解】**$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y+1=0\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-x+1=0\end{cases}$,解得 $x=-1,y=-1,z(-1,-1)=-1$.

当 $x=0$ 时,$z=y^2+y,-3\leqslant y\leqslant 0$.

最大值为 $z(0,-3)=9$,最小值为 $z\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

当 $y=0$ 时,$z=x^2+x,-3\leqslant x\leqslant 0$.

最大值为 $z(-3,0)=6$. 最小值为 $z\left(-\dfrac{1}{2},0\right)=-\dfrac{1}{4}$.

当 $x+y=-3$ 时,$z=3x^2+9x+6,-3\leqslant x\leqslant 0$.

当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时 $z$ 有最小值 $z=-\dfrac{3}{4}$. 即 $z\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$.

当 $x=0$ 时 $z$ 有最大值 $z=6$. 即 $z(0,-3)=6$.

当 $x=-3$ 时 $z$ 有最大值 $z=6$. 即 $z(-3,0)=6$.

综上所述:$z(0,-3)=z(-3,0)=6$ 为最大值,$z(-1,-1)=-1$ 为最小值.

**18.【解】**设直角平行六面体在第一象限的顶点为$(x,y,z)$.

题目转化为求 $V=8xyz$ 的最大值,其中 $x,y,z$ 满足$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

令 $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1)$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz+2\lambda\cdot\dfrac{x}{a^2}=0\\\dfrac{\partial F}{\partial y}=xz+2\lambda\cdot\dfrac{z}{b^2}=0\\\dfrac{\partial F}{\partial z}=xy+2\lambda\cdot\dfrac{z}{c^2}=0\end{cases},\text{解得 } x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

当 $x\to a-,y\to b-,z\to c-$ 任意一个成立时,都有 $V\to 0$. 所以,

$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$,时 $V_{\max}=\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

**19.【解】**设曲面上达到最短距离的点为$(x,y,z)$,则题目转化为求

$d^2=x^2+y^2+z^2$ 的最小值,其中 $x,y,z$ 满足$(x-y)^2-z^2=1$.

令 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x-y)^2-\lambda z^2-\lambda$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda(x-y)=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-2\lambda(x-y)=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-2\lambda z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\lambda(x-y)=0 & ①\\ y-\lambda(x-y)=0 & ②\\ z-\lambda z=0 & ③\end{cases}$$

由③,若 $\lambda=1$,

代入①,②得 $\begin{cases}x+x-y=0\\ y-x+y=0\end{cases}$,解得 $x=0,y=0$.代入曲面方程 $(x-y)^2-z^2=1$,得到 $z^2=1$,此时 $d^2=1$.

由③,若 $\lambda\neq 1$,解得 $z=0$,由①,②得到 $x=-y$,代入曲面方程 $(x-y)^2-z^2=1$,得到

$x^2=\dfrac{1}{4},y^2=\dfrac{1}{4}$,此时 $d^2=\dfrac{1}{2},d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以所求的最短距离为 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**20.【解】**构造函数 $F(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{x}-2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{2}{y}-2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{3}{z}-2\lambda z=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2+z^2-6r^2)=0\end{cases}$$

,解之得,$x=r,y=\sqrt{2}r,z=\sqrt{3}r$.

因为在球面上当 $y^2+z^2$ 趋于 $6r^2$,$x$ 趋于 $0^+$ 时,$u$ 趋于 $-\infty$.

所以当 $x=r,y=\sqrt{2}r,z=\sqrt{3}r$ 时,$u$ 达到最大值.

$u_{\max}=\ln r+2\ln\sqrt{2}r+3\ln\sqrt{3}r=\ln(6\sqrt{3}r^6)$.

对于任意正实数 $a,b,c$,令 $x=\sqrt{a},y=\sqrt{b},z=\sqrt{c}$.

则 $\ln\sqrt{a}+2\ln\sqrt{b}+3\ln\sqrt{c}\leqslant\ln6\sqrt{3}r^6,r=\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$.

即 $\ln ab^2c^3\leqslant 2\ln6\sqrt{3}\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^3$

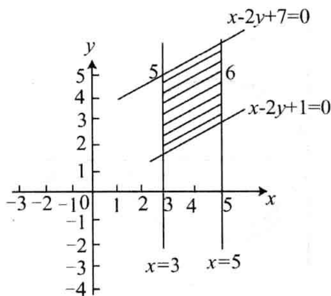
$$abc^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^3.$$

# 第十一章　重积分

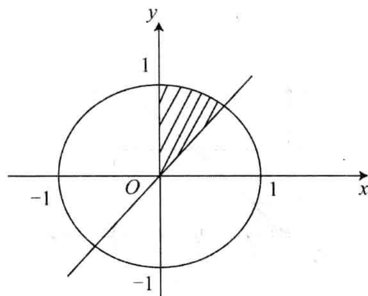
## 习题十一

**1.【解】**(1) $I=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{8x}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(2) $I=\int_2^3\mathrm{d}y\int_3^{2y-1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_3^5\mathrm{d}y\int_3^5f(x,y)\mathrm{d}x+\int_5^6\mathrm{d}y\int_{2y-7}^5f(x,y)\mathrm{d}x=\int_3^5\mathrm{d}x\int_{\frac{x-1}{2}}^{\frac{x+7}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.



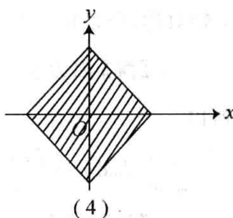

(2)




(3)

$$(3)I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$




(4)

$$(4)I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x-1}^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-y-1}^{y+1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

**2.【解】**(1) 原式 $=\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

(2) 原式 $=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\mathrm{d}x.$

(3) 原式 $=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

**3.【解】**(1) 由已知条件可得：$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$

(2) 由已知条件可得：$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$

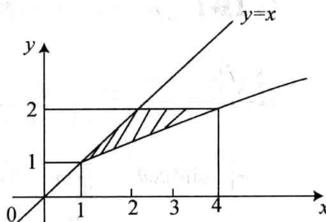
(3) 由已知条件可得：$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

**4.【解】**(1) 由图可知原式 $=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}\mathrm{d}y$

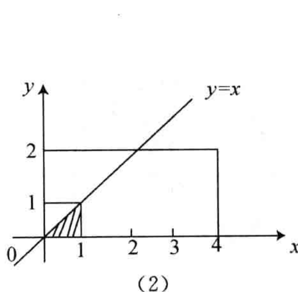
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}y\sin\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2+\frac{4}{\pi^2}\int_1^2\sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^3}(\pi+2).$$

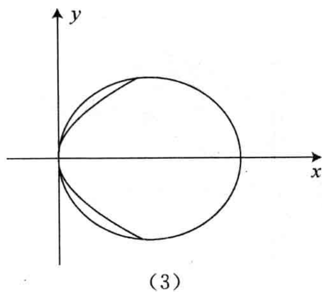



(2) 由图可知：原式 $=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\int_{y^2}^1\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y-\int_0^1 y^2\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}=\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$



(2)



(3)

(3)【解】因为 $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$ 满足 $f(x,-y)=-f(x,y)$，即 $f(x,y)$ 关于 $y$ 为奇函数，又积分区域关于 $x$ 轴对称，所以该二重积分等于 0.

(4)【解】因为 $y'=4x^3-3x^2, y''=12x^2-6x=6x(2x-1)<0$. 解得 $0<x<\dfrac{1}{2}$. 此时图形在 $x$ 轴下方. 所以

$$\iint_D \frac{y}{x^6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{x^4-x^3}^{0}\frac{y}{x^6}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{y^2}{x^6}\bigg|_{x^4-x^3}^{0}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(x^4-x^3)^2}{x^6}\mathrm{d}x=-\frac{7}{48}.$$

(5)【解】使用极坐标变换可得：

$$\text{原式}=\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\rho\cos\theta\rho\sin\theta}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sin2\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho=0.$$

**5.** (1)【解】使用极坐标变换可得：

$$\iint_D\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\ln\rho^2\rho\mathrm{d}\rho=\pi\int_\varepsilon^1\ln\rho^2\mathrm{d}\rho^2=\pi(\rho^2\ln\rho^2-\rho^2)\big|_\varepsilon^1=\pi(-\varepsilon^2\ln\varepsilon^2+\varepsilon^2-1),$$

因此 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iint_D\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$.

(2)【解】交换积分次序：

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}y=\int_0^a f'(y)\mathrm{d}y\int_y^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}=\int_0^a f'(y)\mathrm{d}y\int_y^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-ay+2\cdot\frac{a+y}{2}x-x^2}}$$

$$=\int_0^a f'(y)\arcsin\left(\frac{x-\frac{a+y}{2}}{\frac{a-y}{2}}\right)\Bigg|_y^a\mathrm{d}y=\int_0^a f'(y)\pi\mathrm{d}y=\pi[f(a)-f(0)].$$

(3)【解】令 $\rho^2=x^2+y^2$，则原式 $=\iint\limits_{D_{\rho,\theta}}\sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\dfrac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{\text{令}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=u}\pi\int_0^1\frac{u^2}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u\xlongequal{\text{令}u=\tan\theta}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

**6.** 证明：因为 $\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^a2\pi\rho\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2\pi}\int_0^a f(\rho)\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\rho,\text{得证}.$$

**7.** 证明：令 $F(x)=\int_a^x p(t)f(t)\mathrm{d}t\int_a^x p(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^x p(t)\mathrm{d}t\int_a^x p(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t$，

则：$F(0)=0$，且可以得到：

$$F'(x)=p(x)f(x)\int_a^x p(t)g(t)\mathrm{d}t+p(x)g(x)\int_a^x p(t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$-p(x)\int_a^x p(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t-p(x)f(x)g(x)\int_a^x p(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x p(t)p(x)[f(x)-f(t)][g(t)-g(x)]\mathrm{d}t\leqslant 0.$$

$F'(x)\leqslant 0$ 成立，因为 $p(x)$ 是$[a,b]$上的非负连续函数，$f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上连续且单调递增. 所以 $F(x)$ 单减. 于是

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

**8.【解】**证明：因为区域 $D$ 既对 $x$ 轴对称，又对 $y$ 轴对称. 所以

当 $m$ 为奇数时，$x^m y^n$ 为对于 $x$ 的奇函数，二重积分为 0；

当 $n$ 为奇数时，$x^m y^n$ 为对于 $y$ 的奇函数，二重积分为 0.

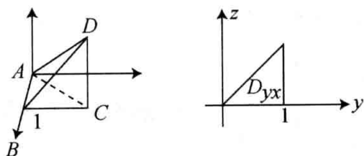
综上可得：$\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

**9.** 证明：由题意可知：$\displaystyle\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^y(y-t)^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)[\int_x^t(y-t)^2\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^t\frac{1}{3}(y-t)^3\Big|_x^t f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_0^x(x-t)^3f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^t(t-x)^3f(x)\mathrm{d}x.$$

**10.【解】**因为$\displaystyle\int\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}z$ 不能积成有限形式，所以必须交换积分次序. 由题意可得到积分区域如图所示：




由图知$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sin z}{1-z}\int_y^1\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sin z}{1-z}(1-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\frac{\sin z}{1-z}\mathrm{d}z\int_z^1(1-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)\sin z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}(1-\sin 1).$$

**11.【解】**令 $y=r\cos\varphi,z=r\cos\theta\sin\varphi,x=r\sin\theta\sin\varphi$，则

$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$，于是

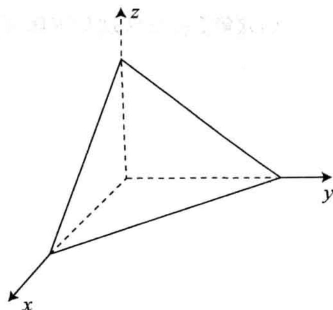
原式$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^{2a}(2r\cos\varphi+r\sin\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\frac{r^4}{4}\Big|_a^{2a}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$

$$=\frac{15\pi}{2}a^4\left[-\cos^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi\right]=\frac{15a^4\pi}{16}(2+\pi).$$

**12.** 计算下列三重积分：

(1) 积分区域如右图所示

根据图示可知：




(1)

**【解】**$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(1+x+y+z)^{-3}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}\mathrm{d}z$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1+x+y+z)^{-2}\Big|_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}[2^{-2}-(1+x+y)^{-2}]\mathrm{d}y$$

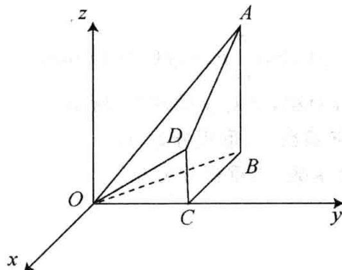
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}[(1+x+y)^{-2}-2^{-2}]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-(1+x+y)^{-1}\Big|_0^{1-x}-\frac{1}{4}(1-x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [(1+x)^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-x)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln(1+x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(1-x)^2\Big|_0^1\right\} = \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \frac{5}{8}\right].$$

(2) 积分区域如图所示：




(2)

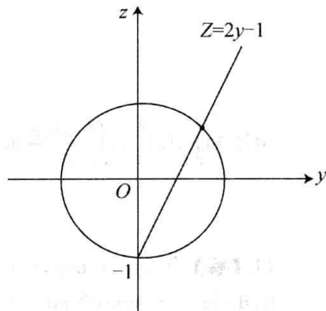
【解】四面体 $O-ABCD$ 为积分区域.

根据图示可知：$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{e}^{x+y}\int_0^{-x}\mathrm{e}^z\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{e}^{-x}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1\left[\int_{-y}^0 (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_0^1 (x\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{x+y})\Big|_{-y}^0 \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y + 1)\mathrm{d}y = y\mathrm{e}^y\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^y\mathrm{d}y + 1 = 3 - \mathrm{e}.$$

(3)【解】由 $\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ z=2y-1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y_1=\frac{4}{5} \\ z_1=\frac{3}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} y_2=0 \\ z_2=1 \end{cases}$ 积分区域如右图所示：




(3)

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v + \iiint\limits_{\Omega_2} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v$$

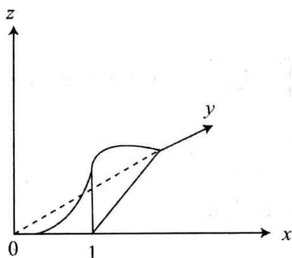
$$= \int_0^{\frac{3}{5}} 2z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{3}{5}}^1 2z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{3}{5}} 2z\,\frac{(1+z)}{2}\mathrm{d}z + 2\pi\int_{\frac{3}{5}}^1 2z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi(\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2)\Big|_0^{\frac{3}{5}} - 2\pi\,\frac{2}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{3}{5}}^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{125} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{25}\right) + 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{64}{125} = \frac{89}{75}\pi.$$

(4)【解】积分区域如下图所示：

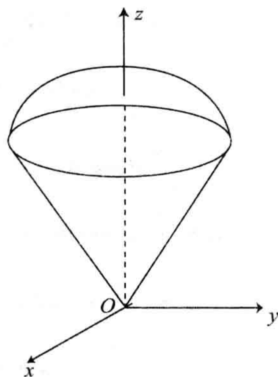



(4)

根据图示可知：

$$\iiint_{\Omega} xy\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{xy}\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\left[\int_0^{1-x} y^2\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\ \frac{1}{3}\ (1-x)^3\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-3x+3x^2-x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{180}.$$



(5)

(5)**【解】**用球坐标变换

$$\iiint_{\Omega} z\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{1}{5}r^5\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{5} = \frac{\pi}{20}.$$

(6)**【解】**在点 $z$ 处，由相似三角形得 $\frac{h}{h-z} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{l}{2}}$，即 $l = \frac{h-z}{h}$.

$l$ 为点 $z$ 处截面正方形的边长. 于是

$$\iiint_{\Omega} r^2\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega}[x^2+y^2+(z-h)^2]\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v + \iiint_{\Omega}(z-h)^2\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\int_0^h\left[\iint_{D_{xy}} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z + \int_0^h (z-h)^2\cdot\frac{(h-z)^2}{h^2}\mathrm{d}z$$

$$= 8\int_0^h \frac{(h-z)}{2h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{h-z}{2h}}\mathrm{d}z + \frac{1}{h^2}\int_0^h (z-h)^4\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{6h^4}\int_0^h (z-h)^4\,\mathrm{d}z + \frac{1}{h^2}\int_0^h (z-h)^4\,\mathrm{d}z = \left(\frac{1}{6h^4}+\frac{1}{h^2}\right)\cdot\frac{(z-h)^5}{5}\Big|_0^h$$

$$= \frac{h}{30}(6h^2+1).$$

**13.** (1)**【解】**由 $\begin{cases} xy = a^2 \\ x+y = \frac{5}{2}a \end{cases}$，得 $x = \frac{a}{2}, x = 2a$. 所以

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left[\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{5}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 - a^2\ln x\right)\Big|_{\frac{a}{2}}^{2a} = \frac{15}{8}a^2 - 2a^2\ln2.$$

(2)**【解】**令 $x+y=u, y=ux$. 则 $v=\frac{y}{x}$，雅可比行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x+y}{x^2} = \frac{(1+v)^2}{u},\text{所以}\frac{J(x,y)}{J(u,v)} = \frac{u}{(1+v)^2},$$

于是 $S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{uv}} \frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_a^b u\,\mathrm{d}u\int_\alpha^\beta \frac{1}{(1+v)^2}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\ \frac{\beta-\alpha}{(1+\beta)(1+\alpha)}$.

(3)**【解】**令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 于是面积 $S$ 为

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\sin2\theta}} r\,\mathrm{d}r = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin2\theta\,\mathrm{d}\theta = -a^2\cos2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2,\text{其中 } a>0.$$

(4)**【解】**由表达式可知图形关于 $x$ 轴对称，于是总面积为上半平面部分面积的 2 倍.

化成极坐标，得

$$r = a\cos\theta(4\cos^2\theta - 3).$$

因为 $r>0$，所以

$$\cos\theta(4\cos^2\theta - 3) \geqslant 0,$$

求解$\begin{cases}\cos\theta\geqslant 0\\4\cos^2\theta-3\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}\cos\theta\leqslant 0\\4\cos^2\theta-3\leqslant 0\end{cases}$，且$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，

解得$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{6}$. 于是面积$S$为

$$S=2\iint\limits_{D_{xy}(y\geqslant 0)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right)$$

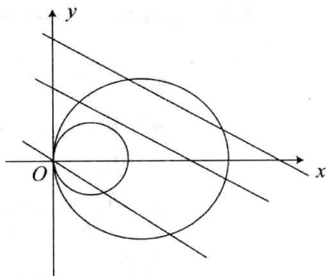
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta.$$

其中，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta\xlongequal{令\theta=\pi-\varphi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\varphi(4\cos^2\varphi-3)^2\mathrm{d}\varphi$

于是$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^2}{4}.$$

**14.【解】**该曲面在平面上的投影区域如图所示.




于是所求面积为

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi.$$

**15.**(1)**【解】**由题意可知：

曲顶的曲面为$z=xy$及$x+y+z=1$. 于是所求体积必须分成两部分.

记该两部分在$xOy$平面上的投影区域分别为$D_1,D_2$. 则体积$V$为

$$V=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}y\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x+\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]\Big|_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{11}{4}+4\ln 2\right)+\left(\frac{25}{6}-6\ln 2\right)=\frac{17}{12}-2\ln 2.$$

(2)**【解】**$V=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2r\mathrm{d}r=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big|_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(16\cos^4\theta-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{45}{32}\pi.$$

(3)**【解】**由$\begin{cases}z=8-x^2-y^2\\z=x^2+y^2\end{cases}$，得$z=4$. 于是

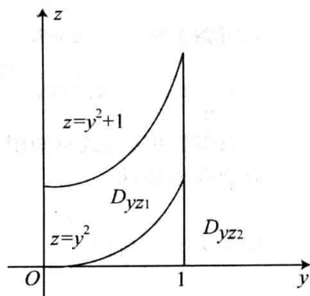
$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^4\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_4^8\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4\pi z\mathrm{d}z+\int_4^8\pi(8-z)\mathrm{d}z=16\pi.$$

**16.【解】**由题意得：

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r\mathrm{d}r\int_1^4f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^4r\mathrm{d}r\int_r^4f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

**17.【解】**(1)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

积分区域及在$yOz$平面上的投影如右图：




因为$\iiint\limits_{V}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x$，

所以

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz = \iint\limits_{D_{yz1}} dydz\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx + \iint\limits_{D_{yz2}} dydz\int_0^1 f(x,y,z)dx$$

$$= \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y^2+1} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx + \int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dx$$

$$= \int_0^1 dy\left\{\int_{y^2}^{y^2+1} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx + \int_0^{y^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dx\right\}$$

向 $xOz$ 平面投影，可得以下积分.

按照 $y,x,z$ 次序积分：

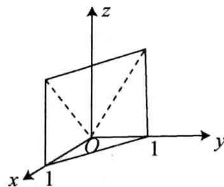
$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$

$$= \iint\limits_{D_{xz1}} dxdz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy + \iint\limits_{D_{xz2}} dxdz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy + \iint\limits_{D_{xz3}} dxdz\int_0^1 f(x,y,z)dy$$

$$= \int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy + \int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy + \int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_0^1 f(x,y,z)dy$$

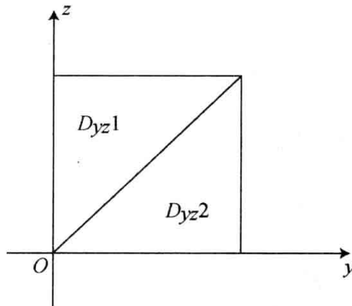
$$= \int_0^1 dz\left\{\left\{\int_0^{\sqrt{z}} dx\right\}\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy + \int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_0^1 f(x,y,z)dy\right\} + \int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy.$$

(2) 积分区域如右图：




$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

积分区域在 $yOz$ 平面上的投影如下图：




$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \iint\limits_{D_{yz1}} dydz\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \iint\limits_{D_{yz2}} dydz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx$$

$$= \int_0^1 dz\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx$$

$$= \int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\},$$

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \iint\limits_{D_{yz1}} dydz\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \iint\limits_{D_{yz2}} dydz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx$$

$$= \int_0^1 dy\left\{\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_0^y dz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}.$$

**18.【解】**设直线 $l$ 和 $z$ 轴平行，$l$ 和 $xOy$ 平面的交点坐标为 $x_1$ 和 $y_1$，则物体绕 $l$ 的转动惯量为

$$I_l = \iiint\limits_{\Omega}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]\rho(x,y,z)dxdydz.$$

将球心放在原点，则密度 $\rho(x,y,z) = kr$，$r$ 为点 $(x,y,z)$ 到球心的距离. 因为球的质量为 $M$，所以

$$M = \iiint\limits_{\Omega} kr\,dxdydz = k\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} sin\varphi d\varphi\int_0^R rr^2 dr = k\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} sin\varphi d\varphi\,\frac{r^4}{4}\bigg|_0^R$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\frac{r^4}{4}\sin\varphi d\varphi = k\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\frac{r^4}{4} = 2k\pi\times 2\times\frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = k\pi R^4.$$

这时，$k = \dfrac{M}{\pi R^4}$，$\rho = \dfrac{Mr}{\pi R^4}$.

取球的切线平行于 $z$ 轴，与 $xOy$ 平面的交点坐标为 $(0,R)$，该切线为 $l$，球体绕 $l$ 转动的转动惯量为

$$I_l=\iiint\limits_{\Omega}[(x^2+(y-R)^2)]kr\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2-2yR+R^2)kr\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

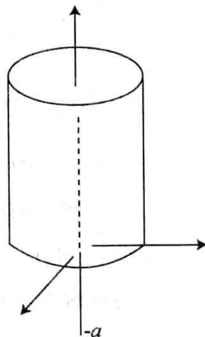
$$=R^2\iiint\limits_{\Omega}kr\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}kr(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{\Omega}2krRy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=R^2M+k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r-0=R^2M+k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{6}R^6$$

$$=R^2M+k\times2\pi\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{6}R^6=R^2M+\frac{4}{9}\frac{M}{\pi R^4}\pi R^6$$

$$=\frac{13}{9}R^2M.$$

**19.【解】**取坐标系如右图所示．因为圆柱关于 $x$ 轴、$y$ 轴对称，所以引力关于 $x$ 轴、$y$ 轴方向的投影为 0．关于 $z$ 轴方向的投影为




$$\mathrm{d}F_z=\frac{\mu m\rho(z+a)}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v$$

$$F=\mu m\rho\iiint\limits_{\Omega}\frac{(z+a)}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v$$

$$=\mu m\rho\int_0^H(z+a)\left[\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{柱坐标}}\mu m\rho\int_0^H(z+a)\left[2\pi\int_0^R\frac{r}{(r^2+(z+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z$$

$$=\mu m\rho\int_0^H(z+a)\left[\pi\int_0^R\frac{\mathrm{d}r^2}{(r^2+(z+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{令 }x=r^2}\mu m\rho\int_0^H(z+a)\left[\pi\int_0^{R^2}\frac{\mathrm{d}x}{(x+(z+a)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\mu m\rho\int_0^H(z+a)\left[-2\pi\int_0^H(z+a)\frac{1}{(r^2+(z+a)^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^R\right]\mathrm{d}z$$

$$=-2\pi\mu m\rho\int_0^H(z+a)\frac{1}{(r^2+(z+a)^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^R\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mu m\rho\int_0^H\left[\frac{z+a}{z+a}-\frac{z+a}{\sqrt{R^2+(z+a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mu m\rho[H-\sqrt{R^2+(H+a)^2}+\sqrt{R^2+a^2}].$$

**20.【解】**该两个球面的交线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+y^2+(z-a)^2=R^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=a-\dfrac{R^2}{2a}\\x^2+y^2=R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}\end{cases}.$$

$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

所以 $S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=R\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=2\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$=\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a},$$

于是，$\frac{dS}{dR}=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a}$. 令$\frac{dS}{dR}=0$，得 $R=\frac{4}{3}a$.

$\frac{d^2S}{dR^2}=4\pi-\frac{6\pi R}{a}$. 这时，当 $R=\frac{4}{3}a$，$\frac{d^2S}{dR^2}=-4\pi<0$.

所以 $S$ 达到极大值，因为只有一个驻点，所以达到最大值，即 $R=\frac{4}{3}a$ 时，面积最大.

# 第十二章　曲线、曲面积分及场论初步

## 习题十二

**1.【解】** 因为$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{y^2f(xy)+xy^3f'(xy)-1}{y^2}$，$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{y^2f(xy)+xy^3f'(xy)-1}{y^2}$，

$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$，所以积分与路径无关.

$$\begin{aligned}于是，I&=\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{3}{y^2}[y^2f(3y)-1]dy+\int_3^1\frac{1+4f(2x)}{2}dx\\&=\int_{\frac{2}{3}}^{2}3f(3y)dy-\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{3}{y^2}dy+\int_3^1\frac{1}{2}dx+2\int_3^1f(2x)dx\\&=\int_2^6f(u)du+\frac{3}{y}\Big|_{\frac{2}{3}}^{2}+\frac{1}{2}x\Big|_3^1+\int_6^2f(u)du=\frac{3}{2}-3\cdot\frac{3}{2}-1=-4.\end{aligned}$$

**2.【解】** 因为$\frac{\partial p}{\partial y}=e^y$，$\frac{\partial q}{\partial x}=e^y$. $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$，所以积分与路径无关.

$$\begin{aligned}于是，I&=\int_{L(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy\\&=\int_0^1(1+x)dx+\int_0^2(e^y-2y)dy\\&=x\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+e^y\Big|_0^2-y^2\Big|_0^2=e^2-\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

**3.【解】**
$$\begin{aligned}I&=\int_{L(\widehat{AMB})}(e^x\sin y+8y)dx+(e^y\cos y-7x)dy\\&=-\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy-\int_{BA}(e^x\sin y+8y)dx+(e^x\cos y-7x)dy\\&=-\iint_D(e^x\cos y-7-e^x\cos y-8)dxdy=15\cdot\frac{\pi\cdot 3^2}{2}=\frac{135\pi}{2}.\end{aligned}$$

**4.【解】**
$$\begin{aligned}I&=\int_{ABC}(a_1x+a_2y+a_3)dx+(b_1x+b_2y+b_3)dy\\&=-\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy-\int_{CA}(a_1x+a_2y+a_3)dx+(b_1x+b_2y+b_3)dy\\&=-\iint_D(b_1-a_2)dxdy-\int_1^{-1}(a_2x+a_3)dx\\&=(a_2-b_1)\frac{1}{4}\pi+(a_2-b_1)\int_0^1\left[\int_0^{1-x^2}dy\right]dx+2a_3=(a_2-b_1)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)+2a_3.\end{aligned}$$

**5.【解】** 因为$\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^3}\sin\frac{x}{y}$，$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^3}\sin\frac{x}{y}$

所以，$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$，于是该积分等于沿直线 $AB(x=\pi)$ 由 1 到 2 的积分.

$$\begin{aligned}即\ I&=\int_{L(A)}^{L(B)}\left(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}dy=-\int_1^2\frac{\pi^2}{y^2}\cos\frac{\pi}{y}dy\\&=\pi\int_1^2\cos\frac{\pi}{y}d\frac{\pi}{y}=\pi.\end{aligned}$$

**6.【解】** 对于函数 $u(x,y)=\frac{-1}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}$，

因为$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-c}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$,

所以 $du(x,y)=\frac{(x-c)dx+ydy}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$. 于是

$$I=\int_{\widehat{AB}}\frac{(x-c)dx+ydy}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}=\int_{(a,0)}^{(0,b)}du(x,y)=u(0,b)-u(a,0)$$

$$=\frac{-1}{[(0-c)^2+b^2]^{\frac{1}{2}}}-\frac{-1}{[(a-c)^2+0]^{\frac{1}{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{c^2+b^2}}+\frac{1}{|a-c|}(a\neq c).$$

**7.【解】**因为$\int_L(e^{y^2-x^2}\cos 2xy-3y)dx+(e^{y^2-x^2}\sin 2xy-b^2)dy(b>0)$.

$$=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy-\int_{OA}(e^{y^2-x^2}\cos 2xy-3y)dx+(e^{y^2-x^2}\sin 2xy-b^2)dy$$

$$=\iint_D(e^{y^2-x^2}(-2x)\sin 2xy+e^{y^2-x^2}2y\cos 2xy-e^{y^2-x^2}2y\cos 2xy+e^{y^2-x^2}2x\sin 2xy+3)dxdy-\int_0^a e^{-x^2}dx$$

$$=3\iint_D dxdy-\int_0^a e^{-x^2}dx=3\pi-\int_0^a e^{-x^2}dx,$$

所以 $I=\lim\limits_{a\to+\infty}(3\pi-\int_0^a e^{-x^2}dx)=3\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**8.【解】**椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos t,\\ y=3\sin t\end{cases}$

于是 $dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}dt$. 所求侧面积

$$A=\int_L|z|dl=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}dt=3\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{5+4\cos^2 t}dt$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}d\cos t\xlongequal{令\cos t=u}-3\int_1^{-1}\sqrt{5+4u^2}du=6\int_0^1\sqrt{5+4u^2}du$$

$$=6\int_0^1\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}u^2}{\frac{1}{5}}}du\xlongequal{令y^2=\frac{4}{5}u^2}6\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\sqrt{5}\sqrt{1+y^2}d\left(\frac{\sqrt{5}}{2}y\right)$$

$$=15\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\sqrt{1+y^2}dy=15\left(\frac{y}{2}\sqrt{1+y^2}+\frac{1}{2}\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right)\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}=9+\frac{15}{4}\ln 5.$$

**9.【解】**$I=\int_{AB}[\Phi(y)e^x-my]dx+[\Phi'(y)e^x-m]dy$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{BA}[\Phi(y)e^x-my]dx+[\Phi'(y)e^x-m]dy$$

$$=\iint_D(\Phi'(y)e^x-\Phi'(y)e^x+m)dxdy-\int_{BA}\Phi(y)e^xdx+[\Phi'(y)e^x-m]dy+\int_{BA}mydx$$

$$=mS-\int_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}d[\Phi(y)e^x-my]+m\int_{x_2}^{x_1}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)dx$$

$$=mS-[\Phi(y)e^x-my]\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}+\frac{m}{x_2-x_1}\left[\frac{1}{2}(y_2-y_1)x^2+(x_2y_1-y_2x_1)x\right]\Big|_{x_2}^{x_1}$$

$$=mS-[(\Phi(y_1)e^{x_1}-my_1)-(\Phi(y_2)e^{x_2}-my_2)]+\frac{m}{x_2-x_1}\cdot$$

$$\left[\frac{1}{2}(y_2-y_1)x_1^2+(x_2y_1-y_2x_1)x_1-\frac{1}{2}(y_2-y_1)x_2^2+(x_2y_1-y_2x_1)x_2\right]$$

$$=mS-\Phi(y_1)e^{x_1}+\Phi(y_2)e^{x_2}-m(y_2-y_1)-m\left[\frac{1}{2}(y_2-y_1)(x_2+x_1)+(x_2y_1-y_2x_1)\right].$$

**10.【解】**$I=\int_{\widehat{AMB}}[e^x\sin y-ay]dx+[e^x\cos y-bx]dy$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{BA}[e^x\sin y-ay]dx+[e^x\cos y-bx]dy$$

$$=\iint\limits_{D}(e^x\cos y-b-e^x\cos y+a)dxdy=\iint\limits_{D}(a-b)dxdy=\frac{\pi}{8}(a-b)^3$$，其中 $a>b>0$.

**11.【解】** 曲线 $L$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\\z=2\end{cases}$. 所以

$$I=\oint_L 3y dx-xz dy+yz^2 dz=\int_0^{2\pi}[3\cdot 2\sin\theta\cdot(-2\sin\theta)-4\cos\theta\cdot 2\cos\theta]d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}(12\sin^2\theta+8\cos^2\theta)d\theta=-\int_0^{2\pi}(8+4\sin^2\theta)d\theta=-16\pi-\int_0^{2\pi}4\,\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=-16\pi-2\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta=-16\pi-4\pi+0=-20\pi.$$

**12.【解】** 因为球面关于原点中心对称，所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}z dS=0$.

**13.** 使用奥—高公式

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^x}{\sqrt{y^2+z^2}}dydz=\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^x}{\sqrt{y^2+z^2}}dxdydz$$（使用先做 $y,z$ 的二重积分再做 $x$ 的积分）

$$=\int_1^2 e^x\left[\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant x^2}\frac{dydz}{\sqrt{y^2+z^2}}\right]dx=\int_1^2 e^x\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^x\frac{1}{\rho}\rho d\rho\right]dx=2\pi\int_1^2 xe^x dx=2\pi e^2.$$

**14.** 依题意得：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=2x\Big|_P=6,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=2y\Big|_P=8,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-2z\Big|_P=-10,$$

$$\begin{cases}2x^2+2y^2-z^2=25 & (F)\\ x^2+y^2=z^2 & (G)\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\right|_P=\left.\begin{vmatrix}4y & -2z\\ 2y & -2z\end{vmatrix}\right|_P=\begin{vmatrix}4\times 4 & -2\times 5\\ 2\times 4 & -2\times 5\end{vmatrix}=-80,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_P=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}\right|_P=\left.\begin{vmatrix}-2z & 4x\\ -2z & 2x\end{vmatrix}\right|_P=\begin{vmatrix}-2\times 5 & 4\times 3\\ -2\times 5 & 2\times 3\end{vmatrix}=60,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_P=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}\right|_P-\left.\begin{vmatrix}4x & 4y\\ 2x & 2y\end{vmatrix}\right|_P=0.$$

所以方向矢量 $\boldsymbol{l}=\{-80,48,0\}$，方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-80}{\sqrt{80^2+48^2+0}}=\frac{-80}{\sqrt{8704}},\ \cos\beta=\frac{60}{\sqrt{80^2+48^2+0}}=\frac{60}{\sqrt{8704}},$$

$$\cos\gamma=\frac{0}{\sqrt{80^2+48^2+0}}=0.$$

于是 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{-480}{\sqrt{8704}}+\frac{480}{\sqrt{8704}}=0.$

# 第十三章　函数方程与不等式证明

## 习题十三

**1.** 证明：令 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=a^x\ln a$ 在 $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ 上使用拉格朗日定理

$f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)=f'(\xi)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\,\frac{1}{n(n+1)}$,

即$\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=\frac{a^{\xi}}{n(n+1)}$. 又因为 $f(x)=a^x$,当 $a>1$ 时为单调递增的函数,所以当 $\xi\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$时,$a^{\frac{1}{n+1}}<a^{\xi}<a^{\frac{1}{n}}$.

所以

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}(a>1,n\geqslant 1).$$

**2.** 证明:令 $f(x)=(x+b)^p-x^p-b^p$,

显然 $f(0)=0$. 当 $x>0$ 时,因为 $0<p<1$,所以 $-1<p-1<0$,

$f'(x)=p(x+b)^{p-1}-px^{p-1}<0$,

所以当 $x>0$ 时,$f(x)$ 单减,所以 $f(a)\leqslant f(0)=0$. 所以

$(a+b)^p-a^p-b^p\leqslant 0$,

即得$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$,

**3.** 证明:令 $F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x[f(t)]^3\mathrm{d}t$,显然 $F(0)=0$. 因为 $0<f'(x)<1$,所以 $f(x)$ 单调递增. 又 $f(0)=0$,所以当 $x>0$ 时 $f(x)>0$.

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right] \quad ①$$

令 $\Phi(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$,显然 $\Phi(0)=0$. 因为 $0<f'(x)<1$,所以 $1-f'(x)>0$,即 $\Phi(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调递增. 即得:

$\Phi'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x))>0$,

所以当 $x>0$ 时,$\Phi(x)>0$. 由 ① 知 $F'(x)>0(x>0)$. 当 $x>0$ 时 $F(x)\geqslant F(0)$.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}=0.$

所以 $F(1)\geqslant F(0)=0$.

即证得:$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$.

**4.** 证明:(1) 先证当 $0\leqslant x<1,0<p<1$ 时,有

$$2^{1-p}\geqslant x^p+(1-x)^p\geqslant 1.$$

令 $F(x)=x^p+(1-x)^p$,

$F'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$,$-1<p-1<0$,$F(x)$ 在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增. $F(x)$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减.

令 $F'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$. $F\left(\frac{1}{2}\right)=2^{1-p}$. 即 $F\left(\frac{1}{2}\right)=2^{1-p}$ 为最大值,又 $F(1)=F(0)=1$,即 1 为其最小值. 所以当 $0\leqslant x\leqslant 1,0<p<1$ 时,有

$2^{1-p}\geqslant x^p+(1-x)^p\geqslant 1$.

(2) 令 $x=\frac{|a|}{|a|+|b|}$,则 $1-x=\frac{|b|}{|a|+|b|}$. 代入(1) 的结论,即可得到

$$2^{1-p}\geqslant\frac{|a|^p}{(|a|+|b|)^p}+\frac{|b|^p}{(|a|+|b|)^p}\geqslant 1,$$

即$(|a|+|b|)^p\leqslant|a|^p+|b|^p\leqslant 2^{1-p}(|a|+|b|)^p$,$(0<p<1)$.

**5.** 证明:条件极值问题:$\begin{cases}s(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\\ \text{条件}:x+y+z=6\end{cases}$.

令 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z-6)$,则$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x-\lambda=0 & ①\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y-\lambda=0 & ②\\ \frac{\partial F}{\partial E}=2z-\lambda=0 & ③\end{cases}$

解 ①②③ 得：$x=y=z=2$. 只有一个驻点，当 $x=y=z=2$ 时达到最小值 12. 所以

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 12,(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$$

**6.** 证明：(1) 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增加的，所以 $\forall x\in[a,b]$，都有 $f(x)>f(a)$，即有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>(b-a)f(a)$.

令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)\dfrac{f(a)+f(x)}{2}$,

$$F'(x)=f(x)-\frac{f(a)+f(x)}{2}-(x-a)\frac{f'(x)}{2}=\frac{f(x)-f(a)}{2}-(x-a)\frac{f'(x)}{2}.$$

由拉格朗日中值定理 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，其中 $a<\xi<1$，所以

$$F'(x)=\frac{f'(\xi)(x-a)}{2}-\frac{f'(x)}{2}(x-a)(a<\xi<x)=\frac{1}{2}(x-a)[f'(\xi)-f'(x)].$$

又因为 $f''(x)>0$，所以 $F'(x)$ 单增，所以 $F'(x)<0$. 所以 $F(x)$ 单减. 又因为 $F(a)=0$，所以 $F(b)<F(a)=0$. 即可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(2) 证法同(1).

**7.** (1) 令 $f(x)=x^2,p_1=p_2=\cdots=p_n=\dfrac{1}{n}$.

因为 $f(x)=x^2$ 为凸函数，所以运用凸函数的性质可得

$f(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)\leqslant p_1f(x_1)+\cdots+p_nf(x_n)$.

即 $(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n})^2\leqslant\dfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}$,

即得到 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$.

(2) 取 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 为凹函数. 令 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\dfrac{1}{n}$. 利用凹函数的性质，即得 $\ln\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\dfrac{1}{n}\ln x_1+\cdots+\dfrac{1}{n}\ln x_n=\ln\sqrt[n]{x_1\cdot\cdots\cdot x_n}$.

即得到 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$.

**8.** 证明：因为 $\dfrac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}f'(x)$

$$=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int f'(x)(2x-a-b)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b(2x-a-b)\mathrm{d}f(x)=-\frac{1}{2}f(x)(2x-a-b)\Big|_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b f(x)2\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\dfrac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\int_a^b|f''(x)(x-a)(x-b)|\mathrm{d}x$

$$\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\int_a^b(x-a)(b-x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

**9.** 证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，所以 $f(x)$ 连续. 又因为当 $x\in[a,b]$ 时，$f(x)f''(x)<0$，所以当 $x\in[a,b]$ 时，$f(x)\neq 0$. 分二种情形：

① 当 $x\in[a,b]$，$f(x)<0$ 时. 由 $f(x)f''(x)<0$ 得到 $f''(x)>0$. 由第 6 题得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}<0,$$

所以 $\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x>-(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}>0$，即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x>\frac{1}{2}|f(a)+f(b)|.$$

② 当 $x \in [a,b]$，$f(x) > 0$ 时．由 $f(x)f''(x) < 0$ 得到 $f''(x) < 0$．由第 6 题得到

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2} > 0$，即 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x > \dfrac{1}{2}|f(a)+f(b)|$．

**10.** 证明：① 令 $f(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$．于是 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$．

当 $x > 0$ 时，$f'(x) = -\dfrac{4}{(2x+1)^2} - \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{4}{(2x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)}$

$$= -\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{x(x+1)} > 0,$$

即当 $x > 0$ 时，$f(x)$ 单增．所以当 $x > 0$ 时 $f(x) < 0$．即

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

② 令 $y(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$．于是 $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$．

当 $x > 0$ 时 $y'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{2x+1}{2x(x+1)\sqrt{x(x+1)}} > 0$，即当 $x > 0$ 时，$g(x)$ 单增，所以当 $x > 0$ 时 $y(x) < 0$，即

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

由 ①② 可得：$\dfrac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$．

**11.** 证明：$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}\cos nx = -\dfrac{1}{n}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \dfrac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{n}(f(2\pi) - f(0)) + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

所以 $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{f(2\pi)-f(0)}{n} + \dfrac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{2[f(2\pi)-f(0)]}{n}$．

**12.** 证明：由拉格朗日中值定理可得：

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - f(x_1) = (1-\alpha)(x_2 - x_1)f'(\xi_1)$，　①

$f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha(x_2 - x_1)f'(\xi_2)$　②

① × $\alpha$ − ② × $(1-\alpha)$ 得到

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) + \alpha(1-\alpha)(x_2-x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]$

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + \alpha(1-\alpha)(x_2-x_1)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + \alpha(1-\alpha)(x_2-x_1)f''(\xi) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$．

因为 $f''(\xi) > 0$，即 $\alpha(1-\alpha)(x_2-x_1)f''(\xi) > 0$．

所以 $\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) > f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]$．

**13.** 证明：$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_C \left(P\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} + Q\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)\mathrm{d}l = \int_C \{P,Q\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}\mathrm{d}l$

$$= \int_C \sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}\cos\theta\mathrm{d}l = \int_C \sqrt{P^2+Q^2}\cos\theta\mathrm{d}l.$$

所以 $\left|\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \leqslant \int \sqrt{P^2+Q^2}|\cos\theta|\mathrm{d}l \leqslant \max\limits_{(x,y)\in C}\sqrt{P^2+Q^2}\int_C \mathrm{d}l = LM$．

**14.** 证明因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0) = 3$．所以

$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 3\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 (f(x) - f(0))\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(x) - f(0)|\mathrm{d}x$．

又对于 $[0,1]$ 上的一切 $x$ 和 $y$，$[f(x) - f(y)] \leqslant |x-y|$ 成立．所以

$$\int_0^1 |f(x) - f(0)|\mathrm{d}x = \int_0^1 |x - 0|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

所以 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 3\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{5}{2} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{7}{2}$．

# 第二篇　线性代数

## 第一章　行列式

### 习题一

**1.** (1)【解】 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 中行标的排列为 1234，逆序为 0；列标排列为 2134，逆序为 1. $0+1=1$ 为奇数，所以，该项符号为"$-$"，所以答案为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

(2)【解】排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可经过$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次对换后变成排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$.

(3)【解】15423 的逆序为 5，23145 的逆序为 2，$2+5=7$ 为奇数，所以该项的符号为"$-$".

(4)【解】$x^3$ 的系数只要考查 $x\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -x & -x \end{vmatrix}=-2x^3+x^2$. 所以 $x^3$ 前的系数为 $-2$.

(5)【解】$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}=-(a^2+b^2)=0$. 所以 $a=b=0$.

(6)【解】由题意可知，行列式为下三角的形式，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(7)【解】$|-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=(-|\boldsymbol{A}|)^5|\boldsymbol{B}|=(-2)^5\cdot(-2)=64$；

$|-|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|=(-|\boldsymbol{B}|)^4|\boldsymbol{A}|=(-2)^4\cdot 2=32$.

(8)【解】$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1 \\ 3\boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_3 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_1 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_3 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_1 \end{vmatrix}-0=-3\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \end{vmatrix}=6.$

(9)【解】$|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|$

$$=2^n|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|=-\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

**2.** (1)【解】项 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1n}a_{n1}$ 的行标排列为 $12\cdots n$，逆序为 0. 列标排列为 $23\cdots n1$，逆序为 $n-1$. 所以答案是 D.

(2)【解】$||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}|^{2n-1}$. 所以答案是 D.

(3)【解】经过初等变换后，有可能对换行列式的行，从而改变行列式的符号，所以排除 A，B，D. 即答案是 C.

(4)【解】$\boldsymbol{A}$ 的第一列与 $\boldsymbol{C}$ 的第一列交换位置，经过了 $n$ 次列变换，同理 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k$ 列与 $\boldsymbol{C}$ 的第 $k$ 列交换位置，又经过了 $n$ 次列变换，$\boldsymbol{A}$ 总共有 $m$ 列，所以

$\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. 即答案是 D.

(5)【解】因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{vmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{3}|\boldsymbol{A}|-2|\boldsymbol{B}|=2.$$

所以答案是 B.

**3. 计算证明题**

(1)【解】$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=(-1)\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6.$

(2)【解】$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&n-1\\1&0&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n-1&n-2&\cdots&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{由最后一行起,每行减前一行}}\begin{vmatrix}0&1&\cdots&n-1\\1&-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&-1\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{每列加第 }n\text{ 列}}\begin{vmatrix}n-1&n&\cdots&\cdots&n-1\\0&-2&\cdots&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&0&-2&\vdots\\0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$

(3)① 当 $n=2$ 时，

$\begin{vmatrix}x_1+1&x_1+2\\x_2+1&x_2+2\end{vmatrix}=x_1-x_2.$

② 当 $n>2$ 时

$D_n=\begin{vmatrix}x_1+1&x_1+2&\cdots&x_1+n\\x_2+1&x_2+2&\cdots&x_2+n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_n+1&x_n+2&\cdots&x_n+n\end{vmatrix}\xlongequal[\text{第 }k\text{ 列}]{\text{第 }k+1\text{ 列减去}}\begin{vmatrix}x_1+1&1&1&1\\x_2+1&1&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_n+1&1&1&1\end{vmatrix}=0.$

(4) 证明：范德蒙行列式：

$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&y\\a^2&b^2&c^2&y^2\\a^3&b^3&c^3&y^3\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-a)(a-y)(b-y)(c-y)$

$=-(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)y^2+\cdots.$

行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$ 即为 $y^2$ 前的系数，于是

$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$，又因为 $a\neq b\neq c$，

所以 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $a+b+c=0$.

(5) 证明：由题意知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，又 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$（$n$ 为奇数）. 所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(6) 证明：因为 $f(0)=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=0, f(1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&2&6\end{vmatrix}=0$，

所以由罗尔定理，存在数 $\delta(0<\delta<1)$，使 $f'(\delta)=0$.

(7) 证明：假设多项式的 $n+1$ 个不同的零点为 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，将它们代入多项式，得关于 $C_i$ 方程组

$$\begin{gathered}C_0+C_1x_0+\cdots+C_nx_0^n=0\\C_0+C_1x_1+\cdots+C_nx_1^n=0\\\vdots\\C_0+C_1x_n+\cdots+C_nx_n^n=0\end{gathered}$$

$C_0,C_1,\cdots,C_n$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&x_0&\cdots&x_0^n\\1&x_1&\cdots&x_1^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^n\end{bmatrix}$

则 $|A|$ 为范德蒙行列式

又 $x_1 \cdots x_n$ 互不相同，所以 $|A| \neq 0$，即 $C_0 = C_1 = \cdots = C_n = 0$.

(8)【解】因为 $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{vmatrix}$

$= x(12x^2 - 6x^2) - (6x^3 - 2x^3) = 6x^3 - 4x^3 = 2x^3$，

所以 $F'(x) = 6x^2$.

# 第二章　矩阵

## 习题二

**1.** (1)【解】$|A - 3B| = |-2\boldsymbol{\alpha}_1 \quad -2\boldsymbol{\alpha}_2 \quad -2\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha} - 3\boldsymbol{\beta}| = -8 \times |\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha} - 3\boldsymbol{\beta}|$

$= -8(|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}| - 3|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\beta}|) = -8(|A| - 3|B|) = 56.$

(2)【解】假设 $A = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m]$，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $A$ 的列向量. 对于 $j = 1,2,\cdots,m$，令 $X_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，第 $j$ 个元素不为 0.

则 $[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_j = 0 (j = 1,2,\cdots,m)$. 所以 $A = 0$.

(3)【解】$\Rightarrow$ 由 $AB = 0$，而且 $B$ 为非零矩阵，所以存在 $B$ 的某个列向量 $\boldsymbol{b}_j$ 为非零列向量，且满足 $A\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0}$. 即方程组 $AX = \boldsymbol{0}$ 有非零解. 所以 $|A| = 0$；

$\Leftarrow$：若 $|A| = 0$，则 $AX = \boldsymbol{0}$ 有非零解. 则存在非零矩阵 $B$，满足 $AB = 0$.

综上，$AB = 0$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$.

(4)【解】$B \neq C$ 且 $AB = AC \Leftrightarrow A(B - C) = 0$ 且 $B - C$ 非零 $\Leftrightarrow |A| = 0$.

(5)【解】$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$.

(6)【解】$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$.

$B = A^2 - 3A + 2E = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$B^{-1} = \dfrac{B^*}{|B|} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(7)【解】由 $A^2 + 2A + 3E = 0$，得 $A(A + 2E) = -3E$. 所以 $|A||A + 2E| = |-3E| \neq 0$，于是 $A$ 可逆. 于是 $A + 2E + 3A^{-1} = 0$，$A^{-1} = -\dfrac{1}{3}(A + 2E)$.

(8)【解】$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A^2-9E=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&0&2\\0&-5&0\\0&0&-8\end{pmatrix}.$$

$$A+3E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&5&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

$$(A+3E)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{16}\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=(A+3E)^{-1}=\frac{(A+3E)^*}{|A+3E|}.$$

$$(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{16}\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8&0&2\\0&-5&0\\0&0&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

(9)【解】$|A|=\begin{vmatrix}-3&-2\\3&3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1&2\\3&3\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1&2\\-1&-2\end{vmatrix}=1.$

$$A^*=\begin{pmatrix}3&-9&4\\2&-5&2\\2&7&-3\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}3&8&4\\-2&-5&-2\\-2&-7&3\end{pmatrix},(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{bmatrix}.$$

$$(-2A)^*=|-2A|(-2A)^{-1}=(-2)^3|A|\frac{A^{-1}}{(-2)}=4A^{-1}.$$

$$[(-2A)^*]^{-1}=(4A^{-1})^{-1}=\frac{A}{4}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{bmatrix}.$$

(10)【解】$\begin{pmatrix}2&1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\-1&2&2&5&0&0&1&0\\1&-1&1&3&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1&0&0\\2&1&0&0&1&0&0&0\\-1&2&2&5&0&0&1&0\\1&-1&1&3&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&-2&0&0\\0&3&2&5&0&1&1&0\\0&-2&1&3&0&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&2&0&0\\0&3&2&5&0&1&1&0\\0&-2&1&3&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&2&0&0\\0&0&1&0&19&-30&3&-5\\0&0&0&1&-7&11&-1&2\end{pmatrix}.\text{所以},A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\19&-30&3&-5\\-7&11&-1&2\end{pmatrix}.$$

2.(1)【解】因为 $A$ 可逆,所以存在可逆 $P_A,Q_A$ 使 $P_AAQ_A=E$. 同理,

存在可逆 $P_B,Q_B$ 使 $P_BBQ_B=E$.

于是 $P_AAQ_A=P_BBQ_B$. $P_B^{-1}P_AAQ_AQ_B^{-1}=B$.

令 $P=P_B^{-1}P_A,Q=Q_AQ_B^{-1}$. 即答案是 D.

(2)【解】因为 $|A|=|A^T|$, $|B^{-1}|=|B|^{-1}$ 所以

$$\left|-2\begin{bmatrix}A^T & 0\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}\right|=(-2)^{2n}|A||B|^{-1}.$$ 即答案是 A.

(3)【解】若 $A,B$ 均可逆,即 $A^{-1},B^{-1}$ 均存在,则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 答案是 B.

(4)【解】因为 $|A|\neq 0$,所以 $A^{-1}$ 存在. 由 $AB=0$,得 $A^{-1}AB=0$,即 $B=0$. 即答案是 A.

(5)【解】$AB=(E-\alpha^T\alpha)(E+2\alpha^T\alpha)=E-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-2\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha$

$=E$. 答案是 C.

(6)【解】$P_1A$ 表示将 $A$ 的第一、二行互换,$B$ 表示先将 $A$ 的第一、二行互换,然后将互换后的矩阵的第一行乘以(-1)加到第三行. 所以 $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$. 即答案是 B.

(7)【解】$(-A)^*=|-A|(-A)^{-1}=(-1)^n|A|\dfrac{1}{(-1)}A^{-1}=(-1)^{n-1}A^*$. 答案是 D.

(8)【解】多次利用公式 $A^*=|A|A^{-1}$ 即可得到

$(A^*)^*=(|A|A^{-1})^*=||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^n|A|^{-1}|A|^{-1}A=|A|^{n-2}A$,

即答案是 C.

(9)【解】$B=A_{m\times n}C_{n\times n}$, $r(C)=n$,所以

$$r=r(AC)\geqslant r(A)+r(C)-n=r_1,$$

又因为　$A=BC^{-1}$,于是

$$r_1=r(BC^{-1})\geqslant r(B)+r(C^{-1})-n=r,$$

所以 $r_1=r$. 即答案是 C.

(10)【解】若 $r(A)=n$,则 $A^{-1}$ 存在. 由 $AB=0$,得 $B=0$,与 $B$ 是非零矩阵矛盾. 所以 $r(A)<n$. 同理 $r(B)<n$. 答案是 B.

**3.** (1)【解】$AB-BA=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&5\\3&4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&5\\3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&6\\-17&-17&3\\9&-18&16\end{bmatrix}$,

$A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&5\\3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&5\\3&4&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}9&4&6\\-15&-15&9\\-3&26&-13\end{bmatrix}$.

$B^TA^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&3\\1&2&4\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}5&6&17\\-5&1&-3\\5&11&22\end{bmatrix}$.

(2)①

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&-1&-1&0&1&0&0\\1&-1&1&-1&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&-2&-2&-1&1&0&0\\0&-2&0&-2&-1&0&1&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-2&-2&-1&1&0&0\\0&0&-2&2&0&0&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-2&2&0&0&-1&1\end{array}\right]\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

② 因为 $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. 由矩阵分块求逆公式：

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$,

得到：$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

③ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 同 ② 得 $\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

④ 由矩阵分块求逆公式：

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{\boldsymbol{B}^*}{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$,

得到：$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(3)【解】由本题的条件知：$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & \vdots & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & -3 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & \vdots & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$的逆矩阵为$\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$.

得到 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 4 & -6\\ 2 & -4 & -3\\ 2 & 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2\end{bmatrix}$.

(4)**【解】**要使 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则须使得 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = k \neq 0$ 经过初等行变换

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \frac{1}{k} & 0\\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \frac{1}{k} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & \frac{1}{k} & 1\end{bmatrix},$$

即得到 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{k} & 0\\ -1 & \frac{1}{k} & 1\end{bmatrix}$.

(5)**【解】**因为$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^m = \sum\limits_{i=0}^{m} c_m^i \boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{E} + \sum\limits_{i=1}^{m} c_m^i \boldsymbol{A}^i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{E} = -\sum\limits_{i=1}^{m} c_m^i \boldsymbol{A}^i$.

所以 $\boldsymbol{A}\left(-\sum\limits_{i=1}^{m} c_m^i \boldsymbol{A}^{i-1}\right) = \boldsymbol{E}$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(6)**【解】**因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆，所以 $|-\boldsymbol{B}^2| = (-1)^n |\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$，

又因为 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = 0$. 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2$，

所以 $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})| = |-\boldsymbol{B}^2| \neq \boldsymbol{0}$. 即得 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆.

(7)**【解】**$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆，即$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}$存在，所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\\ &= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\\ &= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},\end{aligned}$$

即$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$可逆，且$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$.

(8)**【解】**因为$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1} = (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}$，所以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$，

所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

由 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$ 知 $\boldsymbol{B}^{-1},(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 存在.

所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{E}$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(9)**【解】**由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\mathrm{E})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$

所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

(10)**【解】**因为 $\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\\0&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\\0&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}$,

所以 $\begin{vmatrix}0&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\\0&\boldsymbol{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\\0&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\end{vmatrix}$.

即 $(-1)^{n^2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\\0&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}\end{vmatrix}=(-1)^n|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}|$.

又因为 $(-1)^{n^2}=(-1)^n$,所以 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}|$.

(11)**【解】**① 依题意得 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&0&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&0\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&0&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&ka_{13}&la_{14}\\0&0&ka_{23}&la_{24}\\0&0&0&la_{34}\\0&0&ka_{34}&0\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&ka_{13}&la_{14}\\0&1&ka_{23}&la_{24}\\0&0&1&la_{34}\\0&0&ka_{34}&1\end{bmatrix}$, $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}|=1-kla_{34}^2$.

所以当 $\dfrac{1}{kl}\neq a_{34}^2$ 时,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 可逆

② 因为 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 可逆,所以 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}$ 存在,

即有 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})]^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,所以 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

(12)**【解】**① 因为 $\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$,

$\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}^3=\boldsymbol{E}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$,

所以 $\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}^n=\begin{cases}\boldsymbol{E}, & n\text{ 为偶数}\\\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$.

② 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&1\\0&\frac{1}{3}&1\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{3}$ 且它们互不相同. 于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix},$$

所以 $A^n=P\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n&0&0\\0&\left(\frac{1}{3}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{5}\right)^n\end{bmatrix}P^{-1}$.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}A^n=\lim\limits_{n\to\infty}P\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n&0&0\\0&\left(\frac{1}{3}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{5}\right)^n\end{bmatrix}P^{-1}=0$，即得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1\\0&\frac{1}{3}&1\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}^n=0$.

(13)**【解】**下用数学归纳法

$$A^2=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2&0&0\\2\lambda&\lambda^2&0\\1&2\lambda&\lambda^2\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}\lambda^2&0&0\\2\lambda&\lambda^2&0\\1&2\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^3&0&0\\3\lambda^2&\lambda^3&0\\(1+2)\lambda&3\lambda^2&\lambda^3\end{bmatrix}.$$

假设 $n=k$ 时，成立，即 $A^k=\begin{bmatrix}\lambda^k&0&0\\k\lambda^{k-1}&\lambda^k&0\\(1+\cdots+k-1)\lambda^{k-2}&k\lambda^{k-1}&\lambda^k\end{bmatrix}$成立，

则当 $n=k+1$ 时，$A^{k+1}=\begin{bmatrix}\lambda^k&0&0\\k\lambda^{k-1}&\lambda^k&0\\(1+\cdots+k-1)\lambda^{k-2}&k\lambda^{k-1}&\lambda^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{k+1}&0&0\\(k+1)\lambda^k&\lambda^{k+1}&0\\(1+\cdots+k)\lambda^{k-1}&(k+1)\lambda^k&\lambda^{k+1}\end{bmatrix}\text{也成立.}$$

即得 $A^n=\begin{bmatrix}\lambda^n&0&0\\n\lambda^{n-1}&\lambda^n&0\\(1+\cdots+n-1)\lambda^{n-2}&n\lambda^{n-1}&\lambda^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^n&0&0\\n\lambda^{n-1}&\lambda^n&0\\\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}&n\lambda^{n-1}&\lambda^n\end{bmatrix}$.

(14)**【解】**① 因为 $A$ 可逆，所以 $A^{-1}$ 存在. $AA^{-1}=E,(A^{-1})^TA^T=E$. 所以 $A^T$ 可逆且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

② $A^*=|A|A^{-1},(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^{-1})^T=|A^T|(A^T)^{-1}=(A^T)^*$.

③ 证明：因为 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=B^*A^*$　　①

$AA^{-1}=E$. 两边取"$*$"运算，所以由 ① 得 $(AA^{-1})^*=(A^{-1})^*A^*=E$.

即证得 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

④ $[(A^{-1})^T]^*=[(A^{-1})^*]^T=[(A^*)^{-1}]^T=[(A^*)^T]^{-1}$.

(15)**【解】**因为 $A^m=E$，所以 $|A|^m=1$，所以 $A$ 可逆.

又因为 $A_0=(A^*)^T=[|A|A^{-1}]^T=|A|(A^T)^{-1}$，

所以 $A_0^m=[|A|(A^T)^{-1}]^m=|A|^m[(A^m)^T]^{-1}=|A|^mE^{-1}=E$.

(16)【解】下面用数学归纳法证明：① 因为 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^3,$$

所以 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^{3-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

现假设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，

下证 $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}$ 成立.

因为 $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{(k+1)-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，

所以 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

② 利用 ① 的逆推公式得：$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{A}^{98}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{96}+2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}=\cdots=50\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E}$

$$=\begin{bmatrix}50&0&0\\50&50&0\\50&0&50\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}49&0&0\\0&49&0\\0&0&49\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{bmatrix}.$$

(17)【解】由题意得：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{A}^6=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{11}=\boldsymbol{A}^{12}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^6\cdot\boldsymbol{A}^6\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

(18)【解】因为 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

于是 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2$，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，所以 $2\boldsymbol{AB}=0$，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=0$.

(19)【解】因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，所以 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆.

对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}$，再左乘 $\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$.

所以，$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{CA}$

$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$.

所以 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.

右乘 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，得 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.

(20)【解】因为 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&0\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}$　$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&b\end{bmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{PQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&0\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|&-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}+b|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}$.

又因为 $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$，所以 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|,-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|=0$，

所以 $\boldsymbol{PQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}\\0&-(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}+b)|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}$.

② 证明：因为 $|\boldsymbol{P}|=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&0\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|$，

所以 $|PQ|=|P||Q|=|A||Q|$. 又由 ① 可得

$$|PQ|=\begin{bmatrix}A & \alpha E\\ 0 & -(\alpha^{T}A^{-1}\alpha+b)|A|\end{bmatrix}=(-\alpha^{T}A^{-1}\alpha+b)|A|^{2}.$$

所以 $|Q|=(-\alpha^{T}A^{-1}\alpha+b)|A|$.

所以 $Q^{-1}$ 存在的充要条件为 $\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$.

# 第三章　向　量

## 习题三

**1.** (1)【解】令 $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 5 & 0 & k & 1\end{pmatrix}$ 即 $r(A)<4$, 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, 即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 组成的矩阵秩小于等于 4.

于是 $\begin{bmatrix}2 & -4 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 5 & 0 & k & 1\end{bmatrix}=0$, 即

$$\begin{bmatrix}2 & -8 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 5 & -10 & k & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -1 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ -10 & k & 1\end{bmatrix}=-8-3k+20-10+16k+3=13k+5=0.\ k=-\frac{5}{13}.$$

(2)【解】同(1)可得:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -5 & 3\\ 3 & 0 & 3 & t\\ 0 & -2 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ -5 & 5 & -5 & 3\\ 3 & t & 3 & t\\ 4 & -2 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 5 & -5\\ 3 & t & 3\\ 4 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=-20t+60+30+20t-30-60=0.$$

所以对任何 $t$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

(3)【解】由 $2\alpha+3x=\beta$ 可得: $x=\frac{1}{3}(\beta-2\alpha)=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}-1\\5\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\10\\14\\18\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{5}{3}\\-4\\-6\end{pmatrix}$.

(4)【解】$\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示, 即 $\beta,\alpha_1,\alpha_2$ 线性相关, 且 $\alpha,\alpha_2$ 线性无关, 于是同(1)可得

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ k & -3 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$, 得 $k=-8$. 当 $k=-8$ 时, 三个向量的行列式为 0, 于是 $\beta,\alpha_1,\alpha_2$ 线性相关. 又显然 $\alpha_1$, $\alpha_2$ 线性无关, 所以 $\beta$ 可用 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示.

(5)【解】将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 表示成矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, 将 $A$ 经过初等变换后可得

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\\1&-1&3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&0\\0&1&-1&-2\\0&5&-5&2\\0&-1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&0\\0&1&-1&-2\\0&1&-1&\frac{2}{5}\\0&-1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&\frac{2}{5}\\0&0&0&-2\end{bmatrix}.\text{所以 } r(\boldsymbol{A})=3.$$

(6)【解】同(5)可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-9&0\\4&0&4&1\\6&1&1&7\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-9&0\\0&-8&40&1\\0&-11&55&7\\0&5&-25&-1\\0&-8&40&3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&-\frac{1}{8}\\0&1&-5&-\frac{7}{11}\\0&1&-5&-\frac{1}{5}\\0&1&-5&-\frac{3}{8}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&-\frac{1}{8}\\0&0&0&-\frac{45}{88}\\0&0&0&-\frac{3}{40}\\0&0&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$.

(7)【解】$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}(0\quad1\quad0\quad2)=\begin{bmatrix}0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&-1&0&-2\\0&2&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{同(5)可得}}\begin{bmatrix}0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\end{bmatrix}$,

所以 $r(\boldsymbol{A})=1$.

(8)【解】令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&t-16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&t-7\end{bmatrix}$

又 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $t-7=0$,即 $t=7$.

**2.** (1)【解】对于A,假设 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$,线性相关,则存在不全为0的 $k_1,k_2,k_3$,使得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=0$ 成立.

整理得 $(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2,+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 无关线性,

所以 $\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,\\k_2+k_3=0\end{cases}$

矛盾,即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$,线性无关,同A可证得C为答案.

(2)【解】因为 $r(\boldsymbol{A}) = m < n$，A，B 都错在"任意"；D 不正确是因为应通过初等变换可将 $\boldsymbol{A}$ 变成 $(\boldsymbol{E}_m, 0)$ 的形式. 所以根据排除法答案是 C.

(3)【解】由课本上的定理：若原向量组线性无关，则由原向量组加长后的向量组也线性无关，可知答案为 B.

(4)【解】因为 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 又因为 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可用 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 所以答案是 C.

(5)【解】对于 A，取 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ 且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，$|\boldsymbol{B}| \neq 0$ 则 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \neq 0$，则 $r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \neq 0$. 于是排除 A；

对于 B 取 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} \neq 0$，则秩$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \neq 2$ 秩$(\boldsymbol{A})$，排除 B，C 取 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \neq 0$，则秩$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \neq 2$ 秩$(\boldsymbol{A})$. 对于 D，因为有定理：秩$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant$ 秩$(\boldsymbol{B})$. 所以答案是 D.

**3.** (1)【解】令 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，即 $\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2 - t - 4 = t^2 - t - 6 = 0$，$t_1 = 3$，$t_1 = -2$.

所以，当 $t = -2$ 且 $t = 3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. $t \neq -2$ 且 $t \neq 3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 由题可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为三维向量，则四个三维向量一定线性相关，所以，令 $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k = 2k(k-1)$.

①$k \neq 0$ 且 $k \neq 1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，由克莱姆法则知表达式唯一.

② 令系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 & k \end{vmatrix}$

当 $k = 1$ 时，

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$. 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，即等于 2. 所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示不唯一.

③ 当 $k = 0$ 时，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵的秩等于 2，增广矩阵的秩为 3，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3)【解】①$\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，由原向量组线性无关推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出；

②$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不一定能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 反例：$\boldsymbol{\alpha}_1 = (4,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = (0,0,2)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，可知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(4)【解】① 假设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$，如果存在某个 $k_i = 0$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$.

又由题意可知任意 $m-1$ 个都线性无关，所以 $k_1,k_2,\cdots k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_m$ 都等于 0，即这些系数 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 或者全为零，或者全不为零.

② 因为 $l_1 \neq 0$，所以由 ① 可知 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 全不为零. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1 = -\dfrac{l_2}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \dfrac{l_m}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_m$.

代入第一式得：$k_1\left(-\dfrac{l_2}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \dfrac{l_m}{l_1}\boldsymbol{\alpha}_m\right) + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$，

即$\left(-\frac{l_2}{l_1}k_1+k_2\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{l_m}{l_1}k_1+k_m\right)\boldsymbol{\alpha}_m=0$,又因为$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关,

所以$-\frac{l_2}{l_1}k_1+k_2=0,\cdots,-\frac{l_m}{l_1}k_1+k_m=0$,

即得:$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}$.

(5)**【解】**假设存在不全为0的$k_1,k_2,k_3$,使得$k_1(a\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(b\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(c\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=0$成立,则得$(k_1a-k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2b-k_1)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3c-k_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$.

又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,所以$\begin{cases}ak_1-k_3=0\\-k_1+bk_2=0.\\-k_2+ck_3=0\end{cases}$

当行列式$\begin{vmatrix}a&0&-1\\-1&b&0\\0&-1&c\end{vmatrix}=0$时,$k_1,k_2,k_3$有非零解.所以当$abc=1$时,$a\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,b\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,c\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关.

(6)**【解】**反证法,假设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$是线性相关的,即存在不全为0的实数$b_0,b_1,\cdots,b_{k-1}$使得$b_0\boldsymbol{\alpha}+b_1\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+b_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.两边乘以$\boldsymbol{A}^{k-1}$,又因为$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,所以$b_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},b_0=0$.

由$b_1\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+b_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.两边乘以$\boldsymbol{A}^{k-2}$得

$b_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=0,b_1=0$,

…

最后可得　$b_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=0,b_{k-1}=0$,即$b_0=\cdots=b_{k-1}=0$.矛盾.

所以向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$是线性无关的.

(7)**【解】**①$\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\2&-1&-3&1\\1&-5&-4&2\\3&-6&-7&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&-9&-1&-3\\0&-9&-3&0\\0&-18&-4&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&9&1&3\\0&0&-2&3\\0&0&-2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&9&1&3\\0&0&-2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$(或$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$)是极大线性无关组.由$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$得方程组

$\begin{cases}k_1+4k_2-k_3=2\\9k_2+k_3=3\\2k_3=-3\end{cases}$,解得$k_1=k_3=-\frac{3}{2},k_2=\frac{1}{2}$.

所以$\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$.

②$\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&3&3&-1&3\\0&2&2&-4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-4&0\end{bmatrix}$,

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$(或$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$或$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$或$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$)是极大线性无关组.由$\boldsymbol{\alpha}_5=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$得方程组

$\begin{cases}k_1+k_3=2\\k_2=1\\-k_3=0\\-4k_3=0\end{cases}$,解得$k_1=2,k_2=1,k_3=0$,

所以$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$.

由$\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$得方程组

$\begin{cases}k_1+k_3=3\\k_2=1\\-k_3=0\\-4k_3=0\end{cases}$,解得$k_1=3,k_2=1,k_3=0$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_4$.

(8)**【解】**① 当 $x = y = 0$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 0$.

② 当 $x = 0, y \neq 0$ 或 $x \neq 0, y = 0$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 3$.

③ 当 $x = y \neq 0$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 1$.

④ 当 $x = -y \neq 0$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 3$.

⑤ 当 $x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm y$ 时,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} xy & y^2 & y^2 \\ xy & x^2 & xy \\ xy & xy & x^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} xy & y^2 & y^2 \\ 0 & x^2 - y^2 & xy - y^2 \\ 0 & xy - y^2 & x^2 - y^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x & y & y \\ 0 & x+y & y \\ 0 & y & x+y \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} x & y & y \\ 0 & x+y & y \\ 0 & 0 & x(x+2y) \end{bmatrix}.$$

所以,当 $x = -2y \neq 0$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 2$;当 $x \neq -2y$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 3$.

(9)**【解】**由第(11)题知

$$r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = 3.$$

又因为 $\boldsymbol{A} \neq \pm \boldsymbol{E}$,所以 $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) \neq 0, r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \neq 0$,

即 $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}), r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})$ 中必有一个为 1,

所以(秩$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) - 1$)(秩$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) - 1$) = 0.

(10)**【解】**因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = 0$,

所以 $0 = r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})) \geqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) - n$,

即得 $-r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \leqslant n$　　①

又因为 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \geqslant r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{E}) = n$ 即 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \leqslant n$　　②

由 ①② 得 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n$. 所以 $r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n - r$.

(11)**【解】**因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$,所以 $0 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})$,

所以 $0 = r((\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})) \geqslant r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) - n$

所以 $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \leqslant n$　　①

又因为 $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \geqslant r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$

$$= r(2\boldsymbol{E}) = n,$$

所以由 ①② 得 $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n$.

即 $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) + r(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \leqslant n$.　　②

(12)**【解】**因为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \quad \cdots \quad b_n)$,

不妨令 $\lambda = (b_1 \cdots b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n$ 为实数.

则 $\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n) \cdots \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \lambda^{k-1} (b_1 \cdots b_n) = \lambda^{k-1} \boldsymbol{A}$.

(13)**【解】**①$r(\boldsymbol{A}) = 3$,即 $\boldsymbol{A}$ 满秩,所以 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = bc - \frac{1}{2}a \neq 0$. 即 $a \neq 2bc$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 3$;

② 根据对称矩阵的定义得 $a = 1, b = 0, c = 0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;

③$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，由正交矩阵的定义得$\begin{cases} a^2+b^2=1① \\ c^2+\dfrac{1}{4}=1② \\ ac+\dfrac{1}{2}b=0③ \end{cases}$，由 ②$\Rightarrow c=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

当 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，解得 $a=\pm\dfrac{1}{2}, b=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，解得 $a=\pm\dfrac{1}{2}, b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$(a,b,c)$有四组解$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(14)**【解】**先证明：$r(\boldsymbol{A})=1\Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1\cdots b_n)$.

"$\Rightarrow$"因为$r(\boldsymbol{A})=1$，所以$\boldsymbol{A}$的行向量的极大线性无关组只含一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，即其他的行向量可以由$\boldsymbol{\alpha}_i$线性表出.

$$\text{所以 } \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k_1\boldsymbol{\alpha}_i \\ \vdots \\ k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \\ k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_i \\ \vdots \\ k_n\boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{i-1} \\ 1 \\ k_{i+1} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{i-1} \\ 1 \\ k_{i+1} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$$

"$\Leftarrow$"令 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}(b_1\ \cdots\ b_n)=(b_1\boldsymbol{\alpha}\ \cdots\ b_n\boldsymbol{\alpha})$，

所以 $r(\boldsymbol{A})=1$.

证明本题：

因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

所以由前面的结论可知：$\boldsymbol{A}^*$ 可分解成 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n)$，

存在常数 $k$，$k=(b_1,\cdots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，满足$(\boldsymbol{A}^*)^2=k\boldsymbol{A}^*$

# 第四章　线性方程组

## 习题四

**1.** (1)**【解】**由定理知，$r=n-k$，当 $k=n$ 时，$r=0$ 这时方程组只有零解.

(2)**【解】**假设该方程组为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=r$. 由定理可知当 $r=n$，方程组有唯一解；当 $r<n$，方程组有无穷多解.

(3)**【解】**由题意得$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix}\neq 0$，$3+2k-k-6k\neq 0$，即当 $k\neq\dfrac{3}{5}$ 时，方程组只有零解.

(4)**【解】**因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2<n-1=4-1=3$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向

量的个数为 $4-0=4$.

(5)【解】因为 $A=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\-2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

所以 $r(A)=2$,即基础解系所含解向量个数为 $3-2=1$.

$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$,取 $x_3=1$,则 $x_2=x_1=1$. 基础解系为 $(1,1,1)^T$.

$Ax=0$ 的通解为 $k(1,1,1)^T$,$k$ 为任意常数.

(6)【解】由题意知:$A\alpha_i=b$,且 $A(C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_s\alpha_s)=b$,所以 $C_1b+C_2b+\cdots+C_sb=b$,即 $(C_1+\cdots+C_s)b=b$,

所以 $C_1+C_2+\cdots+C_s=1$.

(7)【解】方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\eta_1=(1,0,2)^T$,$\eta_2=(0,1,-1)^T$,所以 $n-r(A)=2$,即 $3-r(A)=2$,$r(A)=1$.

所以 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\k_1\alpha_1\\k_2\alpha_2\end{bmatrix}$,假设 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$.

由 $A\eta_1=0$,得 $(a_{11},a_{12},a_{13})\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=a_{11}+2a_{13}=0$　①

由 $A\eta_2=0$,得 $(a_{11},a_{12},a_{13})\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=a_{12}-a_{13}=0$　②

取 $a_{13}=1$,解 ①② 得 $a_{12}=1$,$a_{11}=-2$. 所以 $\alpha_1=(-2,1,1)$,$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\k_1\alpha_1\\k_2\alpha_2\end{bmatrix}$(其中 $k_1,k_2$ 为任意常数).

(8)【解】因为 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$,所以 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{vmatrix}=5\neq0$,所以 $r(A)=3$. 即 $A$ 满秩.

要使得 $Ax=b$ 有解,需使得系数矩阵的秩 = 增广矩阵的秩,即 $r\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}1&2&3&\\0&1&2&b\\2&-1&1&\end{bmatrix}\right)$.

所以 $b=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$,其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数.

(9)【解】由题设 $A_{3\times3}X_{3\times3}=B$,又因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$,

所以 $|B|=|A||X|=0$,即 $\begin{vmatrix}4&-1&3\\2&k&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=4k-6-6k+2=0\Rightarrow k=-2$.

**2.** (1)【解】因为 $\xi_1,\xi_2$ 的对应分量不成比例,所以 $\xi_1,\xi_2$ 线性无关. 所以方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量个数大于 2.

对于 A,因为 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}$,所以 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{vmatrix}\neq0$,即 $r(A)=3$,即 $A$ 满秩,又因为 $A$ 是三阶矩阵,

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，排除 A；

对于 B，因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$. 所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量个数：$3-r(\boldsymbol{A})=1<2$，排除 B；

对于 C，因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&0\\3&2&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&2&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$. 所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量个数：

$3-r(\boldsymbol{A})=1$. 排除 C；利用排除法，答案为 D.

(2)**【解】**假设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 线性相关，则存在不全为 0 的实数 $k_1,k_2,k_3$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+k_3(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{0},$$

即 $(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\xi}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3k_3=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关. 于是

$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_2+k_3=0\\k_3=0\end{cases}$，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，矛盾，所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关. 因此它也可以是方程组的基础解系. 所以，答案是 C.

(3)**【解】**对于 A，B：反例 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$，不可逆；

对于 C，假设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵. 当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆；用排除法，答案是 D.

**3.** (1)**【解】**① 系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-6&-4&2\\2&2&-3&-5&3\\1&-5&-6&8&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-5&-6&8&-6\\2&2&-3&-5&3\\3&1&-6&-4&2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-5&-6&8&-6\\0&12&9&-21&15\\0&16&12&-28&20\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-5&-6&8&-6\\0&4&3&-7&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得方程组 $\begin{cases}x_1-5x_2-6x_3+8x_4-6x_3=0\\4x_2+3x_3-7x_4+5x_5=0\end{cases}$.

令 $x_3=1,x_4=0,x_5=0$，得 $\left(\frac{9}{4},-\frac{3}{4},1,0,0\right)^{\mathrm{T}}$，

令 $x_3=0,x_4=1,x_5=0$，得 $\left(\frac{3}{4},\frac{7}{4},0,1,0\right)^{\mathrm{T}}$，

令 $x_3=0,x_4=0,x_5=1$，得 $\left(-\frac{1}{4},-\frac{5}{4},0,0,1\right)^{\mathrm{T}}$，于是该方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}\frac{9}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{7}{4}\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

② 系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccccc:c}1&3&3&-2&1&3\\2&6&1&-3&0&2\\1&3&-2&-1&-1&-1\\3&9&1&-5&1&5\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c}1&3&3&-2&1&3\\0&0&-5&1&-2&-4\\0&0&-5&1&-2&-4\\0&0&-8&1&-2&-4\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & -2 & 1 & \vdots & 3\\0 & 0 & -5 & 1 & -2 & \vdots & -4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\0 & 0 & -3 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，$\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵；$\overline{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵.

所以基础解系含解向量个数为 2.

齐次方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=0\\-5x_3+x_4-2x_5=0\\x_3=0\end{cases}$，

令 $x_2=1,x_5=0$，得$(-3,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，

令 $x_2=0,x_5=1$，得$(3,0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$.

对于非齐次方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3\\-5x_3+x_4-2x_5=-4\\x_3=0\end{cases}$，

令 $x_2=x_5=0$，得 $x_4=-4,x_1=-5$.

得到特解：$(-5,0,0,0,-4,0)^{\mathrm{T}}$.

于是，原方程组的通解为：$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-5\\0\\0\\-4\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\0\\0\\2\\1\end{bmatrix}$.

(2)【解】将条件方程与原方程组构成的增广矩阵记为 $\overline{\boldsymbol{A}}$.

增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11\\-3 & 1 & -4 & 2 & \vdots & -5\\-1 & -9 & 0 & -4 & \vdots & 17\\5 & 3 & 6 & -1 & \vdots & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11\\0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28\\0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28\\0 & 28 & -4 & 14 & \vdots & 56\end{bmatrix}$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11\\0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 9 & 0 & 4 & \vdots & -17\\0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix},$$

可得到条件方程与原方程组兼容，即加上条件后的方程组与原方程组有相同的通解.

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，方程组有解. 齐次方程组的基础解系含解向量的个数为 $4-r(\boldsymbol{A})=2$；

齐次方程$\begin{cases}x_1+9x_2+4x_4=0\\-14x_2+2x_3-7x_4=0\end{cases}$,

令 $x_2=0,x_4=1$ 得 $x_1=-4,x_3=\dfrac{7}{2}$,

令 $x_2=1,x_4=0$ 得 $x_1=-9,x_3=7$,

基础解系为：$\left(-4,0,\dfrac{7}{2},1\right)^{\mathrm{T}},(-9,1,7,0)^{\mathrm{T}}$.

非齐次方程：$\begin{cases}x_1+9x_2+4x_4=-17\\-14x_2+2x_3-7x_4=28\end{cases}$,

令 $x_3=0,x_4=0$ 得 $x_1=1,x_2=-2$,

得到特解：$(1,-2,0,0)^{\mathrm{T}}$.

所以全部解为：$\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-9\\1\\7\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-4\\0\\\dfrac{7}{2}\\1\end{bmatrix}$.

(3)【解】$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&3&1&\vdots&0\\3&2&3&\vdots&-1\\-1&4&m&\vdots&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&\vdots&0\\0&-7&0&\vdots&-1\\0&7&m+1&\vdots&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&\vdots&0\\0&-7&0&\vdots&-1\\0&0&m+1&\vdots&k-1\end{bmatrix}$.

① 当 $m\neq-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解；

② 当 $m=-1$ 时，$k\neq1$ 时，$r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解；

③ 当 $m=-1$ 时，$k=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为 $3-r(\boldsymbol{A})=1$.

齐次方程组：$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\7x_2=0\end{cases}$，所以 $x_2=0$.

取 $x_3=1$，得 $x_1=-1$. 基础解系为 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

非齐次方程组：$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\7x_2=1\end{cases}$，所以 $x_2=\dfrac{1}{7}$.

取 $x_3=0$，得 $x_1=-\dfrac{3}{7}$. 非齐次方程特解为 $\left(-\dfrac{3}{7},\dfrac{1}{7},0\right)^{\mathrm{T}}$.

所以通解为 $x=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{7}\\\dfrac{1}{7}\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中，$k$ 为任意常数.

(4)【解】$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&\lambda\\4&1&2&\vdots&\lambda+2\\6&1&4&\vdots&2\lambda+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&\lambda\\0&1&-2&\vdots&-3\lambda+2\\0&1&-2&\vdots&-4\lambda+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&\lambda\\0&1&-2&\vdots&-3\lambda+2\\0&0&0&\vdots&-\lambda+1\end{bmatrix}$.

当 $-\lambda+1=0$，即 $\lambda=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为 $3-r(\boldsymbol{A})=1$.

齐次方程组：$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$,

取 $x_3=1$，得 $x_2=2,x_1=-1$. 基础解系为：$(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

非齐次方程组：$\begin{cases}x_1+x_3=1\\x_2-2x_3=-1\end{cases}$,

取 $x_3=0$，得 $x_1=1,x_2=-1$. 非齐次方程特解为：$(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

于是，通解为 $x=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$，其中，$k$ 为任意常数.

(5)【解】$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&\vdots&a\\1&0&2&3&2&\vdots&3\\4&5&3&2&3&\vdots&2\\1&0&0&1&2&\vdots&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&\vdots&a\\0&-1&1&2&1&\vdots&3-a\\0&1&-1&-2&-1&\vdots&2-4a\\0&-1&-1&0&1&\vdots&1-a\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&\vdots&a\\0&1&-1&-2&-1&\vdots&a-3\\0&1&-1&-2&-1&\vdots&2-4a\\0&-1&-1&0&1&\vdots&1-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&\vdots&1\\0&1&-1&-2&-1&\vdots&a-3\\0&0&1&1&0&\vdots&1\\0&0&0&0&0&\vdots&5(1-a)\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{当\,a=1}\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&\vdots&1\\0&1&0&-1&-1&\vdots&-1\\0&0&1&1&0&\vdots&1\\0&0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$.

当 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3<5$，方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为 $5-r(\boldsymbol{A})=2$.

齐次方程组：$\begin{cases} x_1 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

令 $x_4 = 1, x_5 = 0$，得 $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = -1$. 得到：$(-1,1,-1,1,0)^T$.

令 $x_4 = 0, x_5 = 1$，得 $x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = -2$. 得到：$(-2,1,0,0,1)^T$.

于是基础解系为 $(-1,1,-1,1,0)^T, (-2,1,0,0,1)^T$.

非齐次方程组：$\begin{cases} x_1 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_2 - x_4 - x_5 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$.

令 $x_4 = x_5 = 0$，得 $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$. 非齐次方程特解为 $(1,-1,1,0,0)^T$.

于是，通解为 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，其中，$k_1, k_2$ 为任意常数.

(6)【解】假设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$，求解方程组，求 $x_1, x_2, x_3$.

增广矩阵 $\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & a+2 & b+2 & \vdots & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & \vdots & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & a & b+4 & \vdots & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & \vdots & -3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & a & b+4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a+5b+12 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$.

①$a = 0$，$b$ 任意，$r(\mathbf{A}) < r(\overline{\mathbf{A}})$，方程组无解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合；

②$a \neq 0, a+5b+12 \neq 0$ 时，$r(\mathbf{A}) = 3 = r(\overline{\mathbf{A}})$，方程组有唯一解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，且表示法唯一. 此时得方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ ax_2 + (b+4)x_3 = 1 \\ (a+5b+12)x_3 = 0 \end{cases}$.

解得：$x_3 = 0, x_2 = \frac{1}{a}, x_1 = 1 - \frac{1}{a}$，表示式为：$\boldsymbol{\beta} = (1 - \frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3$.

(7)【解】依题意：在第二个方程组中求一组特解. 令 $x_3 = 1$，解得 $x_4 = -1, x_2 = 1, x_1 = 0$. 将该组特解代入第一个方程组中得：$a = 1, b = 4, c = 4$.

(8)【解】① 由第一个方程组：

增广矩阵 $\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & \vdots & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & \vdots & 21 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -6 \\ 0 & 5 & 1 & -7 & \vdots & -25 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$.

$r(\mathbf{A}) = r(\overline{\mathbf{A}}) = 3$，齐次方程基础解系所含解向量个数为：$4 - r(\mathbf{A}) = 1$.

齐次方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$，令 $x_4 = 1$，解得 $x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 1$.

基础解系为：$(1,1,2,1)^T$.

非齐次方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ x_2 - x_4 = -4 \\ -x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$. 令 $x_4 = 0$，解得 $x_3 = -5, x_2 = -4, x_1 = -2$.

非齐次方程组的特解为$(-2,-4,-5,0)^{\mathrm{T}}$

所以第一个方程组的通解为 $x = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

② 将 $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ 代入第二个方程组：$\begin{cases} -2-4m+5=-5 \\ -4n+5=-11 \\ -5=-t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=4 \\ t=6 \end{cases}$.

(9)【解】令 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量.

则 $\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m \\ b_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{2m}\boldsymbol{\alpha}_m \\ \vdots \\ b_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{mm}\boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{BA}$ 的行向量都是方程组 $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{R}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\boldsymbol{\alpha}_k\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}, (i = 1,2,\cdots,m)$.

所以 $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\alpha}_k^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}, (i = 1,2,\cdots,m)$，即 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{0}, (i = 1,2,\cdots,m)$. 即 $|\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{R}\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}| = 0$.

因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆，所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$，所以 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}, (i = 1,2,\cdots,m)$. 即 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量为 $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(10)【解】因为 $r(\boldsymbol{A}) = m$，所以方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为 $n - r(\boldsymbol{A}) = n - m$.

假设 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-m})_{n\times(n-m)}$ 为 $n \times (n-m)$ 矩阵且 $r(\boldsymbol{B}) = n - m$. 其中，$\boldsymbol{\beta}_i$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的列向量$(i = 1,2,\cdots,n-m)$.

因为 $\boldsymbol{AB} = 0$，所以$(\boldsymbol{A\beta}_1, \boldsymbol{A\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{A\beta}_{n-m}) = 0$，即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 又因为 $r(\boldsymbol{B}) = n - m$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-m}$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

所以满足 $\boldsymbol{A\alpha} = 0$ 的任意向量都是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-m}$ 的唯一线性组合，即存在唯一的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-m}$，使 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_{n-m}\boldsymbol{\beta}_{n-m}$.

令 $\boldsymbol{\beta} = (k_1, k_2, \cdots, k_{n-m})$，则 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-m}) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-m} \end{pmatrix} = \boldsymbol{B\beta}$.

(11)【解】① 必要性：

考查　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$　　(1)

　　　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$　　(2)

　　　$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$　　(3)

即要证明：若(1)有解，则(2)的解必为(3)的解.

假设 $\boldsymbol{x}$ 为(1)的解，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. 取转置，得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$. 又设 $\boldsymbol{z}$ 为(2)的解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. 则

$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0} = 0$.

所以 $\boldsymbol{z}$ 为(3)的解.

② 充分性：

假充 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}$.

考查：Ⅰ. $A^{T}x=0$　　Ⅱ. $\begin{cases}A^{T}x=0\\ b^{T}x=0\end{cases}$.

因为 $A^{T}Z=0$，则 $b^{T}Z=0$，所以（Ⅰ）和（Ⅱ）为同解方程组，所以 $r(A^{T})=r\begin{pmatrix}A^{T}\\ b^{T}\end{pmatrix}$. 即 $r(A)=r(\overline{A})$. 所以 $Ax=b$ 有解.

(12)【解】① 充分性：

设 $|A|=0$，则方程组 $Ax=0$ 有非零解 $x=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 构成矩阵

$$B=\begin{bmatrix}b_1&0&\cdots&0\\ b_2&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ b_n&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

则 $B\neq0$，且 $AB=0$.

② 必要性：

（反证法）假设 $|A|\neq0$，则 $A^{-1}$ 存在. 在 $AB=0$ 的两边同右乘 $A^{-1}$ 得 $B=0$，与存在一个 $n$ 阶非零矩阵 $B$，使 $AB=0$ 矛盾. 所以 $|A|=0$；

(13)【解】令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_i$ 为 $A$ 的列向量 $(i=1,2,\cdots,n)$. 取 $\beta_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)^{T}(i=1,2,\cdots,n)$，只有第 $i$ 个分量为 1，其余全为 0. 则

$$A\beta_i=A\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\alpha_i=0,(i=1,2,\cdots,n),$$

所以 $A=0$.

(14)【解】将 $\eta=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ 代入 $Ax=b$，得到 $1-a+c-1=0,a=c$.

$$\text{增广矩阵 }\overline{A}=\begin{bmatrix}2&1&1&2&\vdots&0\\ 0&1&3&1&\vdots&1\\ 1&a&a&1&\vdots&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&1&2&\vdots&0\\ 0&1&3&1&\vdots&1\\ 0&a-\frac{1}{2}&a-\frac{1}{2}&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

当 $a=c=\frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{bmatrix}2&1&1&2&\vdots&0\\ 0&1&3&1&\vdots&1\\ 1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\vdots&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&1&2&\vdots&0\\ 0&1&3&1&\vdots&1\\ 0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-2&1&\vdots&-1\\ 0&1&3&1&\vdots&1\\ 0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

于是 $r(A)=r(\overline{A})=2$，基础解系所含解向量个数为 $4-r(A)=2$.

齐次方程：$\begin{cases}2x_1-2x_3+x_4=0\\ x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$，

令 $x_3=1,x_4=0$，解得 $x_2=-3,x_1=1$，解向量为 $(1,-3,1,0)^{T}$.

令 $x_3=0,x_4=2$，解得 $x_2=-2,x_1=-1$，解向量为 $(-1,-2,0,2)^{T}$.

$$\text{所以通解为}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 2\end{bmatrix}.$$

于是，基础解系为 $(1,-3,1,0)^{T},(-1,-2,0,2)^{T}$，又有特解 $\eta=(1,-1,1,-1)^{T}$.

当 $a=c\neq\frac{1}{2}$ 时，

增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}2&1&1&2&\vdots&0\\0&1&3&1&\vdots&1\\1&a&a&1&\vdots&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-2&1&\vdots&-1\\0&1&3&1&\vdots&1\\0&0&1-a&\frac{1}{2}-a&\vdots&\frac{1}{2}-a\end{bmatrix}$,

于是 $r(A)=r(\overline{A})=3$,所以基础解系所含解向量个数为 $4-r(A)=1$.

齐次方程:$\begin{cases}2x_1-2x_3+x_4=0\\x_2+3x_3+x_4=0\\(1-a)x_3+(\frac{1}{2}-a)x_4=0\end{cases}$,

令 $x_4=2$,解得 $x_3=-1,x_2=1,x_1=-2$,解向量为 $(-2,1,-1,2)^{T}$,

即基础解为 $(-2,1,-1,2)^{T}$.

又有特解 $\boldsymbol{\eta}=(1,-1,1,-1)^{T}$,

所以通解为 $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

(15)**【解】**$\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&4\\1&a&1&\vdots&1&-2\\a&1&1&\vdots&-2&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&4\\0&a-1&1-a&\vdots&0&-6\\0&1-a&1-a^2&\vdots&-2-a&-2-4a\end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&4\\0&a-1&1-a&\vdots&0&-6\\0&0&(1-a)(2+a)&\vdots&-2-a&-8-4a\end{bmatrix}$.

当 $a=-2$ 时,对于 $B$ 的任一列向量,都有 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$,所以矩阵方程 $AX=B$ 有解,但解不唯一.

(16)**【解】**①$A\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{b},A\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{b},\boldsymbol{\eta}_1\neq\boldsymbol{\eta}_2$,由定理知 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

假设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 线性相关,即存在不全为 0 的实数 $k_1,k_2$.

使得 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0}$,

则 $(k_1+k_2)\boldsymbol{\eta}_1-k_2\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0}$,方程两边同乘以 $A$.

则 $A\{(k_1+k_2)\boldsymbol{\eta}_1-k_2\boldsymbol{\eta}_2\}=\boldsymbol{0}$.

$(k_1+k_2)A\boldsymbol{\eta}_1-k_2A\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0},A\boldsymbol{\eta}_1=A\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{b}$,

所以 $(k_1+k_2-k_2)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,即 $k_1\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $k_1=0$,于是 $k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{\eta}_1\neq\boldsymbol{\eta}_2$,所以 $k_2=0$.向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关.

② 因为 $r(A)=n-1$,则方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含解向量个数为 $n-(n-1)=1$.$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 都是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 线性相关.即存在不全为 0 的 $k_1,k_2$,使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=0,$$

$$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}_1-k_2\boldsymbol{\eta}_2=0,$$

故 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性相关.

# 第五章　特征值和特征向量

## 习题五

**1.** (1)**【解】**因为 $AA^*=A^*A=|A|E$,所以对于任意 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 有 $AA^*\boldsymbol{\alpha}=|A|E\boldsymbol{\alpha}=|A|\boldsymbol{\alpha}$.又 $B=AA^*$,所以 5 是 $B$ 的特征值,任意 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为对应的特征向量.

(2)**【解】**设 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$,则 $B$ 的特征值为 $\lambda_1^1=2\lambda_1^3-3\lambda_1=-1,\lambda_2^1=-5,\lambda_3^1=4$.

(3)【解】因为$A,A^T$具有相同的特征值.又$B=A^T$,所以$B$和$A$具有相同的特征值.所以$B$的特征值为:2和1(二重).

(4)【解】因为$A,B$相似,所以$|A|=|B|$,即$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{vmatrix}$,即$2=-2y,y=1$.

又相似矩阵的迹相等,所以$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$,即$2+x=y+2-1\Rightarrow x=0$.

(5)【解】因为$|A|\neq 0$,所以$A$可逆,不妨令$P=A$,于是$P^{-1}ABP=A^{-1}ABA=BA$.即$AB$与$BA$相似,所以$P=A$.

**2.** (1)【解】假设$A$的所有特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.则$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n$.若0为$A$的特征值,则$|A|=0$,$A$不可逆,若$A$不可逆,则$|A|\neq 0$,则0不为$A$的特征值,所以答案为C.

(2)【解】因为$\lambda_1,\lambda_2$为$A$的二个相异的特征值,所以存在非零向量$\xi,\eta$,使得$A\xi=\lambda_1\xi,A\eta=\lambda_2\eta$成立,而且$\xi,\eta$线性无关.

假设存在$\lambda$满足:$A(k_1\xi+k_2\eta)=\lambda(k_1\xi+k_2\eta)$,又$A\xi=\lambda_1\xi,A\eta=\lambda_2\eta$.

所以$\lambda_1k_1\xi+\lambda_2k_2\eta=\lambda k_1\xi+\lambda k_2\eta$,即$(\lambda_1k_1-\lambda k_1)\xi+(\lambda_2k_2-\lambda k_2)\eta=0$.

因为$\xi,\eta$线性无关,所以$\lambda_1k_1-\lambda k_1=0,\lambda=\lambda_1;\lambda_2k_2-\lambda k_2=0,\lambda=\lambda_2$.得到$\lambda_1=\lambda_2$与$\lambda_1,\lambda_2$相异矛盾,所以答案为C.

(3)【解】因为齐次线性方程组$(\lambda_0E-A)x=0$的基础解系为$\eta_1$和$\eta_2$,所以方程组$(\lambda_0E-A)x=0$的全部解为$C_1\eta_1+C_2\eta_2(C_1,C_2$为任意常数).又特征向量不能为零,所以$A$的属于$\lambda_0$的全部特征向量是:$C_1\eta_1+C_2\eta_2(C_1,C_2$为不全为零的任意常数),即答案为D.

(4)【解】答案为B.

(5)【解】令$P=E$,则$P^{-1}=E$.所以$P^{-1}EP=EEE=E$.所以为C.

(6)【解】因为$A\sim B$,所以存在可逆方阵$P$,使得$P^{-1}AP=B$.

则$|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|$,

所以$A,B$有相同的特征方程,答案为B.

**3.** (1)【解】$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-3-\lambda&-1&2\\0&-1-\lambda&4\\t&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)(1-\lambda^2)-4t+2t(1+\lambda)=0$.

当$\lambda=1$时,$-4t+4t=0$,所以$t$为任意实数.

① 当$\lambda=1,t\neq 0$时,

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-4&-1&2\\0&-2&4\\t&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-4&-1&2\\0&-2&4\\1&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&-2\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以$r(A-\lambda E)=2$,即方程组$(A-\lambda E)x=0$基础解系所含解向量个数为

$$3-r(A-\lambda E)=3-2=1.$$

相应的方程组为$\begin{cases}x_1=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$.令$x_3=1$,得$x_2=2$.则基础解系为$\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$,则$\lambda=1$的全部特征向量为$k\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$;

② 当$\lambda=1,t=0$时,

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-4&-1&2\\0&-2&4\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&1&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=2$，即方程组$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$基础解系所含解向量个数为$3-r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=3-2=1$.

相应的方程组为$\begin{cases}x_1=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$. 令 $x_3=1$，得 $x_2=2$. 则基础解系为$\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$，则 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$.

(2)【解】依题意得：$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & -\lambda & 1 \\ & & & & -\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^n=0,\lambda=0$,

则 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=n-1$.

所以方程组$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含解向量个数为$n-(n-1)=1$.

相应的方程组为$\begin{cases}x_2=0\\x_3=0\\\vdots\\x_n=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，得基础解系为$(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

于是 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}(k\neq 0)$.

(3)【解】假设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$，依题意得：$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}=a(i=1,2,\cdots,n)$.

若 $\lambda=a$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$是其对应的特征向量，则 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$.

又因为 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}\\\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}\\\vdots\\\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$成立，

所以 $\lambda=a$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量为$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为$\dfrac{1}{a}$，对应的特征向量也是$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

即 $A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$. 所以 $A^{-1}$ 的每行和为 $\frac{1}{a}$.

(4)【解】　考查方程组 $\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}$. $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B)<n$. 所以方程组有非零解 $\alpha$, 则解向量 $\alpha$ 为 $A,B$ 的公共特征向量，对应的特征为 $\lambda=0$.

(5)【解】　令 $P=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}$. 通过初等变换求出 $P^{-1}$,

即 $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\2&-2&-1&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&-6&3&-2&1&0\\0&-3&6&-2&0&1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&-3&6&-2&0&1\\0&0&-9&2&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&1&-2&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\0&0&1&-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right]$,

所以 $P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$, 由题知 $A$ 的特征值为 1,2,3.

所以 $P^{-1}AP=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,

所以 $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}21&0&-6\\0&15&-6\\-6&-6&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}$.

(6)【解】　因为 $A$ 相似于 $B$, 所以 $|A|=|B|$, 即 $\begin{vmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$, $-x=y$①, 又相似矩阵有相同的迹，即 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$, 所以 $x=y+2$②.

求 ①② 得 $x=1,y=-1$.

由 $B$ 的表达式知：$A$ 的二个特征值为 $\lambda=-1,\lambda=1$(二重).

当 $\lambda=-1$ 时，

$(A+E)x=0$, 即 $\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}x=0$,

$$\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2,$$

所以方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含解向量的个数为：$3-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1$.

相应的方程组为$\begin{cases}x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，令$x_1=1$　于是，得特征向量为：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

当$\lambda=1$(二重)时，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即$\begin{bmatrix}-2&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1$，

方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含解向量的个数为$3-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2$.

相应的方程组为$x_1+x_2-x_3=0$. 令$x_1=1,x_2=0$，得$x_3=1$；

令$x_1=0,x_2=1$，得$x_3=1$.

于是二个线性无关的特征向量为$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

所以矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.

(7)**【解】**　$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=\begin{bmatrix}k+1&0&1\\0&k+2&0\\1&0&k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k+1&0&1\\0&k+2&0\\1&0&k+1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(k+1)^2+1&0&2k+2\\0&(k+2)^2&0\\2k+2&0&(k+1)^2+1\end{bmatrix},$$

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}(k+1)^2+1-\lambda&0&2k+2\\0&(k+2)^2-\lambda&0\\2k+2&0&(k+1)^2+1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=[(k+1)^2+1-\lambda]^2[(k+2)^2-\lambda]-4(k+1)^2[(k+2)^2-\lambda]=0.$$

解得$\lambda_1=k^2,\lambda_2=(k+2)^2$(二重). 要使$\boldsymbol{B}$可对角化，只须验证当$\lambda_2=(k+2)^2$，$(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有两个不同的解向量即可.

当$\lambda=(k+2)^2$时，$(k+1)^2+1-\lambda=k^2+2k+1+1-k^2-4k-4=-2k-2$，

$$\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}(k+1)^2+1-\lambda&0&2k+2\\0&(k+2)^2-\lambda&0\\2k+2&0&(k+1)^2+1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2k-2&0&2k+2\\0&0&0\\2k+2&0&-2k-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2k-2&0&2k+2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$r(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})=1$，所以方程组$(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含解向量的个数为$3-r(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})=2$. 所以$\boldsymbol{B}$可以对角化. 即$\boldsymbol{B}$相似于对角矩阵：$\begin{bmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{bmatrix}$.

当$k\neq-2,k\neq0$时，$\boldsymbol{B}$的特征值都为正，此时，$\boldsymbol{B}$为正定阵.

(8)**【解】**　因为$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,\cdots,n$，所以$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$的特征值为$2i+1(i=1,2,\cdots,n)$. 所以$|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\prod_{i=1}^{n}(2i+1)$.

(9)【解】 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)-4(2-\lambda)+4\lambda=0,$

$$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4 \quad \langle 1\rangle$$

下面求可逆矩阵 $U$.

① 当 $\lambda_1=-2$ 时,

$$A+2E=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

于是 $r(A-\lambda E)=2$,基础解系所含解向量的个数为 $3-r(A-\lambda E)=1$.

相应的方程组为 $\begin{cases}2x_1-x_2=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$. 令 $x_3=2$,解得 $x_2=2,x_1=1$,

则 $\lambda=-2$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$.

② 当 $\lambda_2=1$ 时,

$$A-E=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

于是 $r(A-\lambda E)=2$,基础解系所含解向量的个数为 $3-r(A-\lambda E)=1$.

相应的方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_2=0\\ 2x_2+x_3=0\end{cases}$. 令 $x_3=2$,解得 $x_2=-1,x_1=-2$,

则 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$.

③ 当 $\lambda_3=4$ 时,

$$A-4E=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -3 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是 $r(A-\lambda E)=2$,基础解系所含解向量的个数为 $3-r(A-\lambda E)=1$.

相应的方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2+2x_3=0\end{cases}$. 令 $x_3=1$,解得 $x_2=-2,x_1=2$,

则 $\lambda=4$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$;又由〈1〉知,$A$ 可对角化.

所以 $U=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$,$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

(10)【解】 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)=0,$

$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$,$A$ 有三个不同的特征值,即 $A$ 可以对角化,下求可逆矩阵 $U$,使得 $U^{-1}AU=\Lambda$.($\Lambda$ 为对角阵)

① 当 $\lambda_1=1$ 时,

$$A-E=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=2$，基础解系所含解向量的个数为 $3-r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=1$.

相应的方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$. 令 $x_3=1$，解得 $x_2=0, x_1=-1$，

则 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

② 当 $\lambda_2=2$ 时，

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&0&0\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\0&-5&-3\end{bmatrix},$$

于是 $r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=2$，基础解系所含解向量的个数为 $3-r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=1$.

相应的方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_2=0\\-5x_2-3x_3=0\end{cases}$. 令 $x_3=1$，解得 $x_2=-\frac{3}{5}, x_1=-\frac{6}{5}$，

则 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}-\frac{6}{5}\\-\frac{3}{5}\\1\end{bmatrix}$.

③ 当 $\lambda_3=-1$ 时，

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&2&0\\0&3&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&2&0\\0&3&0\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

于是 $r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=2$，基础解系所含解向量的个数为 $3-r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=1$.

相应的方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2=0\end{cases}$. 令 $x_3=1$，解得 $x_2=0, x_1=0$，

则 $\lambda=-1$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

令　$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}-1&-\frac{6}{5}&0\\0&-\frac{3}{5}&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，下求 $\boldsymbol{U}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{U}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}-1&-\frac{6}{5}&0&1&0&0\\0&-\frac{3}{5}&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{6}{5}&0&-1&0&0\\0&-\frac{3}{5}&0&0&1&0\\0&-\frac{1}{5}&1&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&2&0\\0&\frac{1}{5}&0&0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&1&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&2&0\\0&1&0&0&-\frac{5}{3}&0\\0&0&1&1&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right],$$

所以 $\boldsymbol{U}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-\frac{5}{3}&0\\1&-\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$.

所以 $A^{100}=U\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^{100}U^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-\frac{6}{5}&0\\0&-\frac{3}{5}&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-\frac{5}{3}&0\\1&-\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&2^{101}-2&0\\0&2^{100}&0\\0&\frac{5}{3}(1-2^{100})&1\end{bmatrix}$.

(11)【解】(Ⅰ)由题设可得以下递推关系：

第 $n$ 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 $x_n$ 和 $y_n$，熟练工的 $\frac{1}{6}$，即 $\frac{1}{6}x_n$ 支援其他生产部门，缺额招收新的非熟练工，所以总的非熟练工为 $\frac{1}{6}x_n+y_n$. 到第 $n+1$ 年，其中的 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工，$\frac{3}{5}$ 还是非熟练工. 所以得到

$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\end{cases}，即\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n\\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases},$$

所以 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$，其中 $A=\begin{bmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$.

(Ⅱ)若 $\eta_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$是 $A$ 的两个线性无关的特征向量，且设 $A$ 的两个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2$，即有

$\begin{cases}A\eta_1=\lambda_1\eta_1\\A\eta_2=\lambda_2\eta_2\end{cases}$.

$A\eta_1=\begin{bmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$，所以 $\eta_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$是 $A$ 的特征向量，相应的特征值为 $\lambda_1=1$；

$A\eta_2=\begin{bmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，所以 $\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$是 $A$ 的特征向量，相应的特征值为 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

(Ⅲ)假设 $P=\begin{bmatrix}4&-1\\1&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&1\\-1&4\end{bmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，

所以 $A^n=P\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}^nP^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&4\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n&4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n\\1-\left(\frac{1}{2}\right)^n&1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}$.

由(Ⅰ)知：

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=A^2\begin{bmatrix}x_{n-1}\\x_{n-1}\end{bmatrix}=\cdots=A^n\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}.$$

(12)**【解】**由题设知：$\boldsymbol{A\eta}_i = \lambda_1\boldsymbol{\eta}_i(i=1,2,\cdots,r)$，$\boldsymbol{A\xi}_j = \lambda_2\boldsymbol{\xi}_j(j=1,2,\cdots,s)$.

假设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_r,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性相关，则存在 $r+s$ 个不全为零的常数 $k_1\cdots k_r,k_{r+1}\cdots k_{r+s}$，使得 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r+k_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{r+s}\boldsymbol{\xi}_s=0$ 成立.

两边同乘以 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r)+\boldsymbol{A}(k_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{r+s}\boldsymbol{\xi}_s)=\boldsymbol{0}$

于是 $\lambda_1(k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r)+\lambda_2(k_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{r+s}\boldsymbol{\xi}_s)=\boldsymbol{0}$，

所以 $\lambda_1(k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r)-\lambda_2(k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r)=\boldsymbol{0}$，

所以 $(\lambda_1-\lambda_2)(k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r)=\boldsymbol{0}$.

又因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_r=\boldsymbol{0}$，

所以 $k_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{r+s}\boldsymbol{\xi}_s=\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关，所以 $k_{r+1}=k_{r+2}=\cdots=k_{r+s}=0$ 与假设矛盾.

即 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关.

# 第六章　二次型

## 习题六

**1.** (1)**【解】**由题意可得：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2)**【解】**由题意可得：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3$.

(3)**【解】**$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix}=1-t^2>0$，所以 $|t|<1$　①

且 $\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-4t-5t^2>0,5t^2+4t<0,-\frac{4}{5}<t<0$　②

由 ①② 知：当 $-\frac{4}{5}<t<0$ 时，二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

(4)**【解】**假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$，又因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称可逆矩阵，所以 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

所以 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$.

(5)**【解】**因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,\cdots,n$，所以 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $t-1,t-2,\cdots,t-n$. 若 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 是正定的，则 $t-1>0,t-2>0,\cdots,t-n>0$，

所以 $t>n$ 时，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 是正定的.

**2.** (1)**【解】**对于 A：令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 但是，对于任何三维向量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=x_1x_2$，所以排除 A.

对于B:取反例 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,所以排除B.

对于C:取反例 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,所以排除C.

用排除法,选D.

(2)【解】一阶主行列式为 $2>0$,二阶主行列式为 $\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2>0$,三阶主行列式为 $\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=10-8=2>0$,所以答案为D.

(3)【解】因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶正定矩阵,则 $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 也均为 $n$ 阶正定矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$ 为 $n$ 阶正定矩阵.所以,答案为A.

**3.计算证明题**

(1)【解】① 依题意,令 $\begin{cases}y_1=-2x_1+x_2+x_3\\ y_2=x_1-x_2+x_3\\ y_3=x_1+x_2-2x_3\end{cases}$,

则 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2$.

② 依题意,令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_{2n},x_2=y_2-y_{2n-1},\cdots,x_n=y_n-y_{n-1}\\ x_{2n}=y_1+y_{2n},x_{2n-1}=y_2+y_{2n-1},\cdots,x_{n+1}=y_n+y_{n+1}\end{cases}$,

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$

$=(y_1-y_{2n})(y_1+y_{2n})+(y_2-y_{2n-1})(y_2+y_{2n-1})+\cdots+(y_n-y_{n+1})(y_n+y_{n+1})$

$=y_1{}^2+\cdots+y_n{}^2-y_{n+1}{}^2-\cdots-y_{2n}{}^2$.

(2)【解】① 依题知,二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}11 & 8 & 2\\ 8 & 5 & -10\\ 2 & -10 & 2\end{bmatrix}$.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}11-\lambda & 8 & 2\\ 8 & 5-\lambda & -10\\ 2 & -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(11-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & -10\\ -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}8 & 2\\ -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}8 & 2\\ -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-1458=0,$$

解得:$\lambda_1=9,\lambda_2=18,\lambda_3=-9$.

所以可用正交变换将原二次型化成以下标准型:

$f(y_1,y_2,y_3)=9y_1{}^2+18y_2{}^2-9y_3{}^2$.

② 依题知,二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1-\lambda & 2\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3-12(1-\lambda)+16=0,$$

解得:$\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=5$.

所以可用正交变换将原二次型化成以下标准型：

$f(y_1,y_2,y_3)=-y_1{}^2-y_2{}^2+5y_3{}^2$.

(3)【解】二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2a-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2a-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(2a-\lambda)(3-\lambda)^2-(2a-\lambda)=0,$$

解得 $\lambda_1=2a,\lambda_2=4,\lambda_3=2$. 与 $f=y_1^2+ay_2^2+by_3^2$ 矛盾，所以该题无解.

(4)【解】假设 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因为 $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$，所以 $\lambda^3+\lambda^2+\lambda-3=0$. 解得，$\lambda=1,\lambda=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=-1\pm2\sqrt{2}i$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以只能有 $\lambda=1,\lambda=-1\pm2\sqrt{2}i$ 舍去. 所以 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

(5)【解】因为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 $a$，实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 $b$，所以 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})$ 的特征值全大于 0，即 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})$ 为正定阵.

假设 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值，相应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$.

于是 $[(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})]\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}-(a+b)\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}=[\lambda-(a+b)]\boldsymbol{x}$

所以 $\lambda-(a+b)$ 为 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})$ 的特征值. 又因为 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})$ 为正定阵，所以 $\lambda-(a+b)>0$，即 $\lambda>a+b$.

(6)【解】"充分性"(反证法)

反设 $r(\boldsymbol{A})<n$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 于是 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，假设相应的特征向量为 $x$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}(x\neq0)$. 所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$.

所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，与 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵矛盾，假设不成立，所以 $r(\boldsymbol{A})=n$.

"必要性"

因为 $r(\boldsymbol{A})=n$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全不为 0.

取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}+\boldsymbol{AA}=2\boldsymbol{A}^2$，它的特征值为

$2\lambda_1{}^2,2\lambda_2{}^2,\cdots,2\lambda_n{}^2$ 全部为正，所以 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(7)【解】①$\Leftarrow$ 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$；

因为 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$.

所以 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$. 因为 $\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}$ 可逆，所以 $(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$ 为正定矩阵. 上式表明 $\boldsymbol{AB}$ 相似于正定矩阵，又因为 $\boldsymbol{AB}$ 对称，所以 $\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵.

②$\Rightarrow$ 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 均为 $n$ 阶正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 均为 $n$ 阶实对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

(8)【解】$(\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$，且又 $\varepsilon$ 为充分小的正数，所以 $\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵. 对于 $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，假设它的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1+\varepsilon\lambda_1,1+\varepsilon\lambda_2,\cdots,1+\varepsilon\lambda_n$.

令 $\lambda=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$，取 $\varepsilon$ 使 $\varepsilon\lambda<1$.

又 $\varepsilon>0,\lambda>0$，所以 $\varepsilon\lambda>0$.

则 $1+\varepsilon\lambda_1>0,1+\varepsilon\lambda_2>0,\cdots,1+\varepsilon\lambda_n>0$，所以 $\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

(9)【解】依题知，二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{bmatrix}$.

因为二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3$ 的正负惯性指数都是 1，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个为 0 的特征值，所以对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

于是 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=3a-a^3-2=0$,

所以 $a=-2, a=1$.

① 当 $a=1$ 时，

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1-\lambda & -1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3+2-(1-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda),$$

解得 $\lambda_1=0$(二重),$\lambda_2=3$. 和二次型的正负惯性指数都是 1 矛盾；

② 当 $a=-2$ 时，

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 2\\ 1 & -2-\lambda & -1\\ 2 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2-\lambda & -1\end{vmatrix}$$

$$=-(2+\lambda)(1-\lambda)^2-4+4(2+\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)$$

$$=-\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-2+4\lambda-2\lambda^2+2+6\lambda=-\lambda^3+9\lambda=0,$$

解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$. 所以 $a=-2$ 为正确答案.

于是 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

在(1,1,0) 处的法矢量为

$\boldsymbol{n}=\{2x_1+2x_2+4x_3,-4x_2+2x_1-2x_3,2x_3-2x_2+4x_1\}|_{(1,1,0)}=\{4,-2,2\}$,

所以在(1,1,0) 处的切平面为：$2(x_1-1)-(x_2-1)+x_3=0$，即 $2x_1-x_2+x_3=1$.

(10)【解】对于实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使得：

$f=\lambda_1y_1{}^2+\lambda_2y_2{}^2+\cdots+\lambda_ny_n{}^2$.

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 不妨假定：$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$.

则 $\lambda_1\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\lambda_1\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$,

$\lambda_2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\lambda_2\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$,

依此类推：

$\lambda_n\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}=\lambda_n\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\lambda_n\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$,

于是，$\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1{}^2+\lambda_2y_2{}^2+\cdots+\lambda_ny_n{}^2$.

又 $\lambda_1\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1{}^2+\lambda_1y_2{}^2+\cdots+\lambda_1y_n{}^2$,

$\lambda_n\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}=\lambda_ny_1{}^2+\lambda_ny_2{}^2+\cdots+\lambda_ny_n{}^2$,

且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$.

所以 $\lambda_1\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1y_1{}^2+\lambda_2y_2{}^2+\cdots+\lambda_n{}^2y_n{}^2\leqslant\lambda_n\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$,

所以 $\lambda_1\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}$.

当 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，即当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}=1$ 时，$\lambda_1\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_n$.

由 $\lambda_n\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}=\lambda_n\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\lambda_n\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}$ 知，当 $\boldsymbol{y}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}=1$ 时，$\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}=1$. 取 $\boldsymbol{y}=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm T}$ 时，相应地，$\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1y_1{}^2+\lambda_2y_2{}^2+\cdots+\lambda_ny_n{}^2=\lambda_n$.

所以 $f$ 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值恰为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

# 第三篇　概率论与数理统计

## 第一章　随机事件和概率

1. (1)【解】因为 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=P(\overline{AB}),P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{A\cap B\cap C})=P(\overline{ABC})$.

所以,$P(AB-C)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)=1-P(\overline{AB})-1+P(\overline{ABC})$

$=0.97-0.9=0.07$.

(2)【解】令 $A=\{$二件产品中至少有一件是不合格品$\}$,$B=\{$二件都是不合格品$\}$,则 $A\cap B=AB=\{$二件都是不合格品$\}$.

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}}=\frac{1}{5}.$$

(3)【解】$n=100$,所以标准差 $D=\sqrt{100p(1-p)}$.

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}p}=\frac{100(1-p)-100p}{2\sqrt{100p(1-p)}}=\frac{100(1-2p)}{2\sqrt{100p(1-p)}}=0.$$

解之得:$p=\frac{1}{2}$. 于是最大标准差为 $D=\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=5$.

(4)【解】假设落点 $(X,Y)$ 为二维随机变量,$D$ 为半圆. 则依题意可知:

$P((X,Y)\in D)=k\,\frac{1}{2}\pi a^2=1$,其中 $k$ 为比例系数. 所以 $k=\frac{2}{\pi a^2}$.

假设 $D_1=\{D$ 中落点和原点连线与 $x$ 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的区域$\}$,

则 $P((X,Y)\in D_1)=k\times D_1$ 的面积 $=\frac{2}{\pi a^2}(\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

(5)【解】因为 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=0.4+0.3-0.6=0.1$,

所以 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$.

(6)【解】假设 $A=\{$订日报$\}$,$B=\{$订晚报$\}$. $C=\{$至少订这两种报纸中的一种$\}$. 则由题意可知 $C=A+B$.

由已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.65,P(C)=0.85$.

所以 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=0.5+0.65-0.85=0.3$.

(7)【解】设 $A_i$ 事件表示第 $i$ 台机器运转不发生故障$(i=1,2,3)$.

则 $P(A_1)=0.9,P(A_2)=0.8,P(A_3)=0.7$,因为"至少有一台发生故障"的对立事件为"全都不发生故障".

所以 $P(\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3})=P(\overline{A_1A_2A_3})=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=1-0.9\times0.8\times0.7=0.496$.

(8)【解】假设事件 $A,B,C$ 表示元件 $A,B,C$ 完好.

由已知 $P(A)=0.7,P(B)=0.8,P(C)=0.9$. 因为元件 $B,C$ 并联且与 $A$ 串联,所以事件线路完好 $=A(B+C)=AB+AC$.

$P[A(B+C)]=P(AB+AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$

$\xlongequal{A,B,C\text{损坏与否相互独立}}P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$

$=0.7\times0.8+0.7\times0.9-0.7\times0.8\times0.9=0.686$.

所以 $P($电路断路$)=1-0.686=0.314$.

(9)【解】设 $X$ 表示甲进球数,$Y$ 表示乙进球数.

由题知：$P$(甲比乙进球多) $= P(X=3,Y=2)+P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=0)+$

$P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=0)+P(X=1,Y=0)$

$= P(X=3)P(Y=2)+P(X=3)P(Y=1)+P(X=3)P(Y=0)+$

$P(X=2)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=0)$

$= 0.7^3\cdot C_3^1\cdot 0.4\cdot 0.6^2+0.7^3\cdot C_3^2\cdot 0.4^2\cdot 0.6+0.7^3\cdot 0.4^3+$

$C_3^1\cdot 0.3\cdot 0.7^2\cdot C_3^1\cdot 0.6\cdot 0.4^2+C_3^1\cdot 0.3\cdot 0.7^2\cdot 0.4^3+C_3^1\cdot 0.7\cdot 0.3^2\cdot 0.4^3$

$= 0.43624.$

(10)**【解】** 设 $A$ 表示甲单独译出密码，$B$ 表示乙单独译出密码，$C$ 表示丙单独译出密码，

则 $P(A)=\dfrac{1}{5}, P(B)=\dfrac{1}{3}, P(C)=\dfrac{1}{4}.$

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$\xlongequal{A,B,C\text{相互独立}} P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$

$=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{5}.$

**2.** (1)**【解】** 易知答案为 D.

(2)**【解】** 对于 D，$A(\overline{A+B+C})=A\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\Phi$，所以答案为 D.

(3)**【解】** $P(A+B)P(AB)-P(A)P(B)=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(AB)-P(A)P(B)$

$=P(A)P(AB)+P(B)P(AB)-P(AB)P(AB)-P(A)P(B)$

$=-P(A)[P(B)-P(AB)]+P(AB)[P(B)-P(AB)]$

$=-[P(B)-P(AB)][P(A)-P(AB)]$

$=-P(B-A)P(A-B).$

又 $P(B-A)\geqslant 0, P(A-B)\geqslant 0$，所以 $-P(B-A)P(A-B)\leqslant 0.$

即答案为 B.

(4)**【解】** 至少有二个事件发生相当于恰有二个事件发生或恰有三个事件发生，所以为 $(A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3)+A_1A_2A_3.$

即答案为 B.

(5)**【解】** 易知答案为 B.

(6)**【解】** 因为 $A-B=A-AB$，所以 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$. 即答案为 C.

(7)**【解】** 概率理论中 $P(A)=0$ 不能推出 $A$ 为不可能事件. 所以答案为 C.

(8)**【解】**"至少有一人中奖"的对立事件为"$n$ 个人都不中奖".

$P(n$ 个人都不中奖$)=\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$，所以 $P$(至少有一人中奖) $=1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. 所以答案为 A.

(9)**【解】** $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}$（当 $B=\Omega$ 时等式成立）.

又因为 $0<P(B)\leqslant 1$，所以 $\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A)$，当且仅当 $B=\Omega$ 时"="成立. 答案为 B.

(10)**【解】** 由 $P[(A_1+A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$ 得到

$\dfrac{P[(A_1+A_2)B]}{P(B)}=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}+\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}$，所以 $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$. 即答案为 B.

**3.** (1)**【解】** 二封信投入 4 个邮筒的方法有 $4^2$ 种，Ⅱ 号邮筒恰好投入一封信有 $C_2^1C_3^1$ 种可能，

所以，$p=\dfrac{C_2^1C_3^1}{4^2}=\dfrac{2\times 3}{4\times 4}=\dfrac{3}{8}.$

(2)**【解】** ① 依题意：恰有 90 个次品的概率为 $P=1-\dfrac{C_{1100}^{110}C_{400}^{90}}{C_{1500}^{200}}.$

② 依题意：至少有 2 个次品的概率为 $P=1-P$(没有次品)$-P$(恰有 1 个次品)

$$=1-\frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}-\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

(3)**【解】**该批产品合格的概率为 $P=P$(全部正品)$+P$(恰有1个次品)

$$=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_{95}^{49}C_{5}^{1}}{C_{100}^{50}}=0.2794.$$

(4)**【解】**假设 $A=\{$至少有一本数学书$\}$,则 $A$ 的对立事件 $\overline{A}$ 为:$\overline{A}=\{$没有数学书$\}$

$P(\overline{A})=\frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{24}{91}$,即 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{67}{91}$.

(5)**【解】**依题意可知:学生情况:

| | 男生 | 女生 |
|---|---|---|
| 北京 | 12 | 8 |
| 免修英语 | 32 | 8 |
| 总数 | 80 | 20 |

①$P($不是北京 | 男生$)=\frac{68}{80}=\frac{17}{20}$.

②$P($男生 | 北京学生$)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

③$P($北京男生$)=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$.

④$P($女生 | 非北京学生$)=\frac{12}{80}=\frac{3}{20}$.

⑤$P($免修英语男生$)=\frac{32}{100}=\frac{8}{25}$.

(6)**【解】**令 $A=\{A$ 有效$\}$,$B=\{B$ 有效$\}$.则依题意得

$P(A)=0.92,P(B)=0.93,P(B\mid\overline{A})=0.85,P(\overline{B}\mid\overline{A})=1-P(B\mid\overline{A})=0.15.$

①$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{B}\mid\overline{A})P(\overline{A})=1-P(\overline{B}\mid\overline{A})(1-P(A)$

$\quad=1-0.15\times0.08=0.988;$

②$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{B}\mid\overline{A})P(\overline{A})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{B}\mid\overline{A})(1-P(A))}{1-P(B)}=\frac{0.012}{0.07}=0.171,$

$P(A\mid\overline{B})=1-P(\overline{A}\mid\overline{B})=1-0.171=0.829.$

(7)**【解】**① 白球的概率为 $P=P($白球 | 第一箱$)P($第一箱$)+P($白球 | 第二箱$)P($第二箱$)+P($白球 | 第三箱$)P($第三箱$)$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{53}{120}.$$

② 白球属于第二箱的概率为 $P=\frac{P(\text{白球}\mid\text{第二箱})P(\text{第二箱})}{P(\text{白球})}=\frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{53}{100}}=\frac{20}{53}.$

(8)**【解】**设 $A_i=\{$挑出第 $i$ 个箱子$\}$,$i=1,2$,$B_i=\{$第 $i$ 次取出一等品$\}$,$i=1,2$,则 $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$

①$P(B_1)=P(B_1\mid A_1)P(A_1)+P(B_1\mid A_2)P(A_2)=\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}.$

②$P(B_1B_2)=P(B_1B_1\mid A_1)P(A_1)+P(B_1B_2\mid A_2)P(A_2)$

$$=\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}\times\frac{1}{2}=0.194.$$

由条件概率公式

$P(B_2\mid B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{0.194}{\frac{2}{5}}=0.485.$

(9)**【解】**① 设 $B_i$ 表示第一次比赛抽到 $i$ 个新球($i=0,1,2,3$).$A$ 表示第二次比赛拍到的都是新球.则

$P(B_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}$,$P(A\mid B_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_9^iC_3^{3-i}C_{9-i}^3}{(C_{12}^3)^2}=\frac{1}{(C_{12}^3)^2}(C_9^0C_3^3C_9^3+C_9^1C_3^2C_8^3+C_9^2C_3^1C_7^3+C_9^3C_3^0C_6^3)$$

$$=\frac{7056}{48400}=0.146$$

②$P(B_3\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_3)P(B_3)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{84\times1\times20}{(220)^2}}{\dfrac{7056}{48400}}=\dfrac{5}{21}$.

(10)**【解】**假设$A=${先从甲袋中任取一球为白球},$B=${先从甲袋中任取一球为红球},$C=${再从乙袋中任取一球为白球},

则:$P(C)=P(C\mid A)P(A)+P(C\mid B)P(B)=\dfrac{N+1}{N+M+1}\cdot\dfrac{n}{n+m}+\dfrac{N}{N+M+1}\cdot\dfrac{m}{m+n}$

$$=\frac{n(N+1)+Nm}{(N+M+1)(m+n)}.$$

(11)**【解】**假设$A=${先抽的一份为女生},$B=${后抽的一份为男生},

$C_i=${从第$i$个地区考生报名表中抽取}$(i=1,2,3)$.

① 依题意:$p=P(A)=P(A\mid C_1)P(C_1)+P(A\mid C_2)P(C_2)+P(A\mid C_3)P(C_3)$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{25}\cdot\frac{1}{3}=\frac{29}{90};$$

② 依题意:$P(AB)=P(AB\mid C_1)P(C_1)+P(AB\mid C_2)P(C_2)+P(AB\mid C_3)P(C_3)$

$$=\frac{3\times7}{10\times9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7\times8}{15\times14}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5\times20}{25\times24}\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{90},$$

$P(B)=P(B\mid C_1)P(C_1)+P(B\mid C_2)P(C_2)+P(B\mid C_3)P(C_3)=\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{20}{25}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{61}{90}$,

$q=P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{20}{61}$.

(12)**【解】**设$B_1=${只有长机到达目的地},$B_2=${长机与任一架僚机到达目的地},$B_3=${三架飞机都到达目的地},$A=${炸毁目标}.

$P(B_1)=0.8\times0.2\times0.2=0.032$,

$P(B_2)=0.8\times0.2\times0.8+0.8\times0.8\times0.2=0.256$,

$P(B_3)=0.8\times0.8\times0.8=0.512$.

于是 $P(A\mid B_1)=0.3$,

$P(A\mid B_2)=1-(1-0.3)(1-0.3)=0.51$,

$P(A\mid B_3)=1-(1-0.3)(1-0.3)(1-0.3)=0.657$.

所以 $P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+P(A\mid B_3)P(B_3)=0.477$.

# 第二章　随机变量及其分布

## 习题二

**1.** (1)**【解】**依题意得:$P(X=0)=1-P(X\geqslant1)=1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$,

则$(1-p)^2=\dfrac{4}{9}$,$p=\dfrac{1}{3}$,

于是,$P(Y\geqslant1)=1-P(Y=0)=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{19}{27}$.

(2)**【解】**依题意得:$1=\dfrac{1}{2c}+\dfrac{3}{4c}+\dfrac{5}{8c}+\dfrac{2}{16c}=\dfrac{32}{16c}$,$c=2$.

(3)**【解】**依题意得:$P(X\leqslant a)=F(a)$;$P(X=a)=P(X\leqslant a)-P(X<a)=F(a)-F(a-0)$;
$P(X>a)=1-F(a)$;$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

(4)【解】$k$ 的分布密度为 $f(k)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0\leqslant k\leqslant 5\\ 0, & 其他\end{cases}$.

$4x^2+4kx+k+2=0$ 有实根 $\Leftrightarrow \Delta=16k^2-16k-32\geqslant 0$.

即 $P\{4x^2+4kx+k+2=0$ 有实根$\}=P\{16k^2-16k-32\geqslant 0\}$

$$P\{k\leqslant -1 \text{ 或 } k\geqslant 2\}=\int_2^5 \frac{1}{5}\mathrm{d}k=\frac{3}{5}.$$

(5)【解】依题知，$P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=1, a=\frac{6}{11}$.

$P\{Y=-1\}+P\{Y=-2\}+P\{Y=-3\}=b+\frac{b}{4}+\frac{b}{9}=1, b=\frac{36}{49}$.

于题$(X,Y)$的联合分布为

| $X$ \ $Y$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $ab$ | $\frac{ab}{4}$ | $\frac{ab}{9}$ |
| 2 | $\frac{ab}{2}$ | $\frac{ab}{8}$ | $\frac{ab}{18}$ |
| 3 | $\frac{ab}{3}$ | $\frac{ab}{12}$ | $\frac{ab}{27}$ |

| $Z=X+Y$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $24\alpha$ | $66\alpha$ | $251\alpha$ | $126\alpha$ | $72\alpha$ |

$ab=216\alpha, \alpha=\frac{1}{539}$,

$P(Z=-2)=P(X=1,Y=-3)=\frac{ab}{9}=24\alpha$,

$P(Z=-1)=P(X=2,Y=-3)+P(X=1,Y=-2)=\frac{ab}{18}+\frac{ab}{4}=\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{4}\right)216\alpha=66\alpha$,

$P(Z=0)=P(X=3,Y=-3)+P(X=2,Y=-2)+P(X=1,Y=-1)=\frac{ab}{27}+\frac{ab}{8}+ab=251\alpha$,

$P(Z=1)=P(X=2,Y=-1)+P(X=3,Y=-2)=\frac{ab}{2}+\frac{ab}{12}=126\alpha$,

$P(Z=2)=P(X=3,Y=-1)=\frac{ab}{3}=72\alpha$.

(6)【解】依题意得：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} c\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1, c=\sqrt{2}+1$,

所以 $\varphi(x,y)=\begin{cases}(\sqrt{2}+1)\sin(x+y), & 0\leqslant x,y\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0, & 其他\end{cases}$.

当 $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，

$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}+1)\sin(x+y)\mathrm{d}x=(\sqrt{2}+1)\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(\sqrt{2}+1)\Big[\cos y-\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\Big]$.

所以 $\varphi_Y(y)=\begin{cases}(\sqrt{2}+1)\left(\cos y-\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\right], & 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(7)【解】依题意得：$D$的面积$=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=2$. 又$(X,Y)$在$D$上服从均匀分布，所以二维随机变量$(X,Y)$的

密度为：

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

下面求 $X$ 的边缘密度：

当 $x<1$ 或 $x>e^2$ 时，

$\varphi_X(x)=0$；

当 $1\leqslant x\leqslant e^2$ 时，

$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}$,所以 $\varphi_X(2)=\frac{1}{4}$.

(8)【解】$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)=\mu,\mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$,

所以 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

(9)【解】由题中$(X,Y)$的联合分布律可写成如下形式：

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{18}$ |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | $\alpha$ | $\beta$ |

则 $P(X=2)=\frac{1}{3}+\alpha+\beta,P(Y=2)=\frac{1}{9}+\alpha,P(Y=3)=\frac{1}{18}+\beta$,

$P(Y=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$,

$P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)=\alpha+\beta+\frac{2}{3}=1$.

解$\begin{cases}\alpha=P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2)=\left(\frac{1}{3}+\alpha+\beta\right)\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\\ \beta=P(X=2,Y=3)=P(X=2)P(Y=3)=\left(\frac{1}{3}+\alpha+\beta\right)\left(\frac{1}{18}+\beta\right)\end{cases}$,

得 $\alpha=2\beta,\beta=\frac{1}{9},\alpha=\frac{2}{9}$.

(10)【解】依题意可得：①$Z=X+Y$ 的分布律为：

| $X+Y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

②$V=X-Y$ 的分布律为：

| $X-Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

③$U=X^2+Y-2$ 的分布律为：

| $X^2+Y-2$ | $-\frac{15}{4}$ | $-3$ | $-\frac{11}{4}$ | $-2$ | $-1$ | $5$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |

**2.** (1)【解】A不满足 $F(+\infty)=1$，排除A；B不满足单增，排除B；D不满足 $F\left(\frac{1}{2}+0\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)$，排除D；所以答案为C.

(2)【解】因为 $P(X=k)=\frac{c\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(k=0,2,4,\cdots)$，所以 $c>0$. 而 $k$ 为偶数，所以 $\lambda$ 可以为负. 所以答案为B.

(3)【解】因为 $E(X)=\mu=1$，所以 $p(X\leqslant 1)=P(X\geqslant 1)=0.5$. 即答案为C.

(4)【解】$X\sim\varphi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$Y\sim\varphi(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$. 所以

$(X,Y)\sim\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x,y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$. 所以答案为A.

(5)【解】易知答案为D.

(6)【解】因为 $F(1+0)\neq F(1)$，所以 $F(x)$ 不是分布函数，即答案为B.

(7)【解】$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z \text{ 且 } Y\leqslant z\}$

$\xlongequal{\text{因为独立}} P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)=F_X(z)F_Y(z)$.

即答案为C.

(8)【解】因为 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=1-P(Z>z)=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{X>z \text{ 且 } Y>z\}$. 因为 $X,Y$ 相互独立，

所以 $F_Z(z)=1-[1-P(X\leqslant z)][1-P(Y\leqslant z)]=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$，所以答案是D.

(9)【解】因为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P\{2X\leqslant y\}=P\left(X\leqslant\frac{y}{2}\right)=F_X\left(\frac{y}{2}\right)$，

$\varphi_Y(y)=[F_Y(y)]'=\left[F_X\left(\frac{y}{2}\right)\right]'=\varphi_X\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi(4+y^2)}$.

答案为B.

(10)【解】$Z=\frac{X+Y}{2}$ 是一维随机变量，密度函数是一元函数，所以排除A,B.

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-z}dz=\frac{1}{2}\neq 1$，所以排除D，即答案为C.

(11)【解】因为 $X$ 和 $Y$ 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，且 $X$ 和 $Y$ 相互独立，所以 $X+Y\sim N(1,2)$，$X-Y\sim N(-1,2)$.

于是 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X-Y\leqslant -1\}=\frac{1}{2}$，所以答案为B.

(12)【解】分布函数：$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P[\min(X,2)\leqslant y]=1-P[\min(X,2)>y]$.

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1-P[\min(X,2)>y]=1-0=1$.

当 $0\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=1-P[\min(X,2)>y]=1-P(X>y,2>y)$

$=1-P(X>y)=P(X\leqslant y)=1-e^{-\lambda y}$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=1-P[\min(X,2)>y]=1-(X>y,2>y)$

$=1-P(X>y)=P(X\leqslant y)=0$.

于是 $F_Y(y)=\begin{cases}1 & y\geqslant 2\\ 1-e^{-\lambda y} & 0\leqslant y<2\\ 0 & y<0\end{cases}$ 只有 $y=2$ 一个间断点，所以答案为D.

**3.** (1) 证明：因为 $X\sim N(a,\sigma^2)$，对于 $Y=\frac{X-a}{\sigma}$ 来说，

$E(Y)=E\left(\frac{X-a}{\sigma}\right)=0$，$D(Y)=E\left(\frac{X-a}{\sigma}\right)=1$，

所以 $Y\sim N(0,1)$.

(2) 证明:依题意知,$X$ 的分布律为:$P(X=k)=e^{-\lambda_1}\dfrac{\lambda_1^k}{k!}$,$(k=0,1,2,\cdots)$.

$Y$ 的分布律为:$P(Y=k)=e^{-\lambda_2}\dfrac{\lambda_2^k}{k!}$,$(k=0,1,2,\cdots)$.

所以 $P(X+Y=i)=\sum\limits_{k=0}^{i}P(X=k,Y=i-k)=\sum\limits_{k=0}^{i}P(X=k)P(Y=i-k)$

$$=\sum_{k=0}^{i}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{i}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!}(\lambda_1+\lambda_2)^i$$

$(i=0,1,2,\cdots)$

即证得 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

(3) 证明:设分布函数 $F(x)$ 对应的随机变量为 $X$. 构造与 $X$ 相互独立且在 $[-h,h]$ 上服从均匀分布的随机变量 $Y$,则 $Y$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-h\\ \dfrac{y+h}{2h}, & -h\leqslant y\leqslant h.\\ 1, & y>h\end{cases}$$

令 $Z=X+Y$,又设 $Z$ 的分布函数为 $G(x)$. 则

$$G(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+y)dF_Y(y)=\int_{-h}^{h}F(x+y)\frac{1}{2h}dy\xlongequal{x+y=t}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}F(t)dt.$$

即 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}F(t)dt$ 为 $Z=X+Y$ 的分布函数.

**4.** (1)**【解】**假设 $X$ 表示命中目标的次数. 则 $X\sim B\left(5,\dfrac{2}{3}\right)$. 所以

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | $\frac{40}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{32}{243}$ |

其中,$P(X=k)=C_5^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$,$k=0,1,2,3,4,5$.

(2)**【解】**假设 $X$ 表示所用子弹数,则 $X=1,2,3,4,5$.

$P(X=i)=P($前 $i-1$ 次不中,第 $i$ 次命中$)=(0.1)^{i-1}\cdot 0.9$,$i=1,2,3,4$.

当 $i=5$ 时,只要前四次不中,无论第五次中与不中,都要结束射击(因为只有五发子弹).

所以 $P(X=5)=(0.1)^4$. 于是分布律为

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0.9 | 0.09 | 0.009 | 0.0009 | 0.0001 |

(3)**【解】**依题意得:$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$,即 $A\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2+x}dx=Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx\xlongequal{令x-\frac{1}{2}=t}Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=$ $Ae^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}$. $A=\dfrac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}$.

(4)**【解】**假设 $A_i$ 表示第 $i$ 次取出正品$(i=1,2,3,\cdots)$.

① 每次取出的产品不放回:

$P(X=1)=P(A_1)=\dfrac{10}{13}$,

$P(X=2)=P(A_2\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\dfrac{10}{12}\cdot\dfrac{3}{13}$,

$P(X=3)=P(A_3\mid\overline{A_2})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{10}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{13}$,

$P(X=4)=P(A_4\mid\overline{A_3})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_2})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})=1\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{13}$.

② 每次抽取后将原产品放回,$X$ 的分布律为:

| $X$ | 1 | 2 | … | $k$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{10}{13}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{13}$ | | $\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{13}$ | … |

$P(X=k)=p(\overline{A_1}\cdot\cdots\cdot\overline{A_{k-1}}A_k)=P(\overline{A_1})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_{k-1}})P(A_k)=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\frac{10}{13},(k=1,2,\cdots)$

③ 每次抽取后总以一个正品放回,$X$ 的分布律为:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{10}{13}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{13}$ | $\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{12}{13}$ | $1\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{3}{13}$ |

$P(X=1)=P(A_1)=\frac{10}{13}$,

$P(X=2)=P(A_2\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{11}{13}\cdot\frac{3}{13}$,

$P(X=3)=P(A_3\mid\overline{A_2}\ \overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{12}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{3}{13}$,

$P(X=4)=P(A_4\mid\overline{A_3}\ \overline{A_2}\ \overline{A_1})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_2}\ \overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_1})=1\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{3}{13}$.

(5)**【解】**依题意得:①$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2c\arcsin x\Big|_0^1=2c\ \frac{\pi}{2}=c\pi=1,c=\frac{1}{\pi}$.

②$P(X\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$,因为 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 为偶函数,

所以$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$.

(6)**【解】**① 当 $x\leqslant-1$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$.

当 $-1<x<1$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\ \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{x}{\pi}\ \sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}$.

当 $x\geqslant1$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}\ \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=1$.

即 $F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant-1\\ \frac{x}{\pi}\ \sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2} & -1<x<1.\\ 1 & x\geqslant1\end{cases}$

② 当 $x<0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$,

当 $0<x<1$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}$,

当 $1\leqslant x<2$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t=-\frac{x^2}{2}+2x-1$,

当 $2\leqslant x$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)\mathrm{d}t=1$,

即 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$.

(7)【解】因为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{40\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-20)^2}{3200}\right),-\infty<x<+\infty$,所以 $X\sim N(20,40^2)$.

① 测量误差的绝对值不超过 30 的概率为:

$$P(|X|<30)=P\{-30<X<30\}=P\left\{-1.25<\frac{X-20}{40}<0.25\right\}$$
$$=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)=\Phi(0.25)-(1-\Phi(1.25)$$
$$=\Phi(0.25)+\Phi(1.25)-1$$
$$=0.5987+0.8944-1=0.4931.$$

其中,$\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数.

②"至少有一次误差的绝对值不超过 30"的对立事件为"三次误差的绝对值都超过 30".

即 $P=1-(0.4931)^3=1-0.12=0.88$.

(8)【解】因为 $X$ 的密度 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & 100<x\\ 0, & x\leqslant 100\end{cases}$. 所以 $P(X<150)=\int_{100}^{150}\dfrac{100}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

令 $p=P(X\geqslant 150)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

①150 h 内三只元件没有一只损坏的概率为 $P=p^3=\dfrac{8}{27}$.

②150 h 内三只元件全部损坏的概率为 $P=(1-p)^3=\dfrac{1}{27}$.

③150 h 内三只元件只有一只损坏的概率为 $P=c_3^1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

(9)【解】直径 $D$ 的分布密度为 $\varphi(d)=\begin{cases}1, & 5\leqslant d\leqslant 6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

假设面积为 $X=\dfrac{\pi D^2}{4}$,$X$ 的分布函数为 $F(x)$.

则 $F(x)=P(X\leqslant x)=P(\dfrac{\pi D^2}{4}\leqslant x)$.

〈1〉当 $x\leqslant 0$ 时,$F(x)=0$;

〈2〉当 $x>0$ 时,$F(x)=P(X\leqslant x)=P(\dfrac{\pi D^2}{4}\leqslant x)=P\left\{-\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\leqslant D\leqslant\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\right\}$;

〈3〉当 $\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}<5$,即 $x<\dfrac{25\pi}{4}$ 时,$F(x)=0$;

〈4〉当 $5\leqslant\sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}\leqslant 6$,即 $\dfrac{25}{\pi}\leqslant x\leqslant 9\pi$ 时,

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(\frac{\pi D^2}{4}\leqslant x)=P\left\{-\sqrt{\frac{4x}{\pi}}\leqslant D\leqslant\sqrt{\frac{4x}{\pi}}\right\}$$
$$=\int_5^{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}}1\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{4x}{\pi}}-5;$$

〈5〉当 $x>9\pi$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_5^6\mathrm{d}t=1$,

即 $F(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{25\pi}{4}\\ \sqrt{\dfrac{4x}{\pi}}-5, & \dfrac{25\pi}{4}\leqslant x\leqslant 9\pi\\ 1, & x>9\pi\end{cases}$.

密度函数为 $\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}, & \dfrac{25\pi}{4}\leqslant x\leqslant 9\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(10)【解】① 因为 $X$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上服从均匀分布;

所以,$X\sim\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

又 $Y=\sin X$,

所以,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)$.

〈1〉当 $y\leqslant -1$ 时,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)=0$;

〈2〉当 $-1<y<1$ 时,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)=P(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant X\leqslant \arcsin y)$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{\arcsin y}{\pi}+\frac{1}{2};$$

〈3〉当 $y\geqslant 1$ 时,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)=1$.

所以,$Y=\sin X$ 的密度函数

$$\varphi_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

② 同 ①,因为 $X$ 在 $[0,\pi]$ 上服从均匀分布,

$$X\sim\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$Y=\sin X$,

$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)$.

〈1〉当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)=0$.

〈2〉当 $0<y<1$ 时,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)$

$$=P(0\leqslant X\leqslant\arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant\pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}x\Big|_0^{\arcsin y}+\frac{1}{\pi}x\Big|_{\pi-\arcsin y}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\arcsin y+\frac{1}{\pi}(\pi-\pi+\arcsin y)=\frac{2}{\pi}\arcsin y.$$

〈3〉当 $y\geqslant 1$ 时,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)=1$,

即 $Y=\sin X$ 的密度函数.

$$\varphi_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

③ 同 ①②,$X$ 在 $[0,2\pi]$ 上服从均匀分布,

$$X\sim\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\leqslant x\leqslant 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

即 $Y=\sin X$,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)$.

〈1〉当 $y\leqslant -1$ 时,$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)=0$.

〈2〉当 $-1 < y \leqslant 0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(\sin X \leqslant y)$

$$= P(\pi - \arcsin y \leqslant X \leqslant 2\pi + \arcsin y)$$

$$= \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y} \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}x = \frac{\arcsin y}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

〈3〉当 $0 < y < 1$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(\sin X \leqslant y)$

$$= P(0 \leqslant X \leqslant \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \leqslant X \leqslant 2\pi)$$

$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}x + \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\arcsin y}{\pi} + \frac{1}{2}$$

〈4〉当 $y \geqslant 1$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(\sin X \leqslant y) = 1$，

即 $Y = \sin X$ 的密度函数，

$$\varphi_Y(y) = F_Y{}'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

(11)【解】依题意得：$X$ 的分布律为：

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.6 |

又

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(Y \mid X=0)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(Y \mid X=1)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

$$P(X=1,Y=1)P(Y=1 \mid X=1)P(X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = 0.3,$$

$$P(X=1,Y=2) = P(Y=2 \mid X=1)P(X=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5} = 0.1,$$

$$P(X=1,Y=3) = P(Y=3 \mid X=1)P(X=1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = 0.2,$$

$$P(X=0,Y=1) = P(Y=1 \mid X=0)P(X=0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = 0.1,$$

$$P(X=0,Y=2) = P(Y=2 \mid X=0)P(X=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = 0.2,$$

$$P(X=0,Y=3) = P(Y=3 \mid X=0)P(X=0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = 0.1.$$

所以 $Y$ 的分布律为

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.3 | 0.3 |

所以 $(X,Y)$ 的联合概率分布为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |
| 1 | 0.3 | 0.1 | 0.2 |

$$P(X=0 \mid Y \neq 1) = \frac{P(X=0,Y\neq 1)}{P(Y \neq 1)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5,$$

$$P(X=1\mid Y\neq 1)=\frac{P(X=1,Y\neq 1)}{P(Y\neq 1)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5.$$

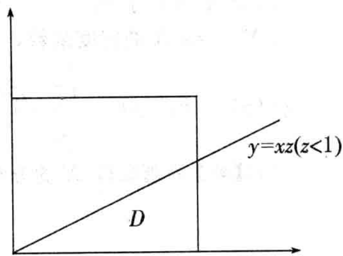
所以在 $Y\neq 1$ 时，$x$ 的条件分布为：

| $X\mid Y\neq 1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.5 | 0.5 |

(12)【解】依题意得：$X\sim\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}, & 0\leqslant x\leqslant 9\\0, & 其他\end{cases}$，$Y\sim\varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{9}, & 0\leqslant y\leqslant 9\\0, & 其他\end{cases}$.

因为 $X,Y$ 相互独立，所以 $(X,Y)$ 联合密度为

$$(X,Y)\sim\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{81}, & 0\leqslant x,y\leqslant 9\\0, & 其他\end{cases},$$




$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\frac{Y}{X}\leqslant z\right).$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$.

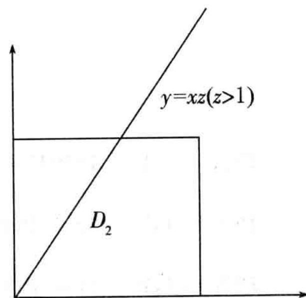
当 $0<z<1$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\frac{Y}{X}\leqslant z\right)=P(Y\leqslant Xz)$$

$$=\iint_{D_1}\frac{1}{81}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{2}9\cdot 9z=\frac{1}{2}z.$$

当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\frac{Y}{X}\leqslant z)=P(Y\leqslant Xz)=\iint_{D_2}\frac{1}{81}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{81}\cdot\left(81-\frac{1}{2}9\cdot\frac{9}{z}\right)=1-\frac{1}{2z}.$$




所以，$\varphi_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\\frac{1}{2}, & 0<z<1\\\frac{1}{2z^2}, & z\geqslant 1\end{cases}$.

(13)【解】因为 $X,Y$ 相互独立，所以 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$(X,Y)\sim\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\0, & 其他\end{cases}.$$

$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$.

当 $z>0$ 时，

$$F_Z(z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y<z}}\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^z\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left[\int_0^{z-x}\mathrm{e}^{-\frac{y}{3}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^z\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cdot(-3)\mathrm{e}^{-\frac{y}{3}}\Big|_0^{z-x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}-3\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}+1,$$

所以，$\varphi_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\\mathrm{e}^{-\frac{z}{3}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{6}}), & z>0\end{cases}$.

(14)【解】依题意得 $X\sim\varphi_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\0, & 其他\end{cases}$，$Y\sim\varphi_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\0, & 其他\end{cases}$.

因为 $X,Y$ 相互独立，所以 $(X,Y)$ 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x,y\leqslant 1\\0, & 其他\end{cases}.$$

$X^2+2\times X+Y=0$ 有实根 $\Leftrightarrow \Delta=4X^2-4Y\geqslant 0$，

即 $P(x^2+2Xx+Y=0$ 有实根$)=P(X^2-Y\geqslant 0)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x,y\leqslant 1\\ y\leqslant x^2}} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

(15)【解】① 依题意得：$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y$.

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=0$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{1-x}24y(1-x-y)\mathrm{d}y=4(1-x)^3$，

所以 $\varphi_X(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

所以 $\varphi(y\mid x)=\dfrac{\varphi(x,y)}{\varphi_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3}, & x>0,y>0,x+y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

所以 $\varphi(y\mid x=\frac{1}{2})=\begin{cases}24y(1-2y), & 0<y<\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

② 依题意得：同 ①

$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x$.

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=0$.

当 $0<y<1$ 时，$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{1-y}24y(1-x-y)\mathrm{d}x=12y(1-y)^2$，

所以 $\varphi_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

所以 $\varphi(x\mid y)=\dfrac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(1-x-y)}{(1-y)^2}, & x>0,y>0,x+y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

所以 $\varphi(x\mid y=\frac{1}{2})=\begin{cases}4(1-2x), & 0<x<\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(16)【解】依题意可知：$Y$ 的密度分布为 $\varphi(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

$X_1=\begin{cases}0, & Y\leqslant 1\\ 1, & Y>1\end{cases}$，$X_2=\begin{cases}0, & Y\leqslant 2\\ 1, & Y>2\end{cases}$.

①$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\leqslant 1,Y\leqslant 2)=P(Y\leqslant 1)=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\big|_0^1=1-\mathrm{e}^{-1}$，

$P(X_1=0,X_2=1)=P(Y\leqslant 1,Y>2)=0$，

$P(X_1=1,X_2=0)=P(Y>1,Y\leqslant 2)=\int_1^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^2=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$，

$P(X_1=1,X_2=1)=P(Y>1,Y>2)=P(Y>2)=\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_2^{+\infty}=\mathrm{e}^{-2}$.

于是 $(X_1,X_2)$ 的联合概率分布为

| $X_1$ \ $X_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $1-\mathrm{e}^{-1}$ | 0 |
| 1 | $\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$ | $\mathrm{e}^{-2}$ |

$X_1$ 的分布为：

| $X_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $1-e^{-1}$ | $e^{-1}$ |

$X_2$ 的分布为：

| $X_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $1-e^{-2}$ | $e^{-2}$ |

②$E(X_1)=e^{-1}, E(X_2)=e^{-2}, E(X_1+X_2)=e^{-1}+e^{-2}$.

# 第三章　随机变量的数字特征

## 习题三

**1.** (1)**【解】**因为 $X,Y$ 相互独立，且 $D(X)=2, D(Y)=4$，
所以 $D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)=12$.
(2)**【解】**因为 $X\sim N(-3,1), Y\sim N(2,1), Z=X-2Y+7$，所以 $Z$ 服从正态分布.
$E(Z)=E(X)-2E(Y)+7=0$.
$D(Z)=D(X-2Y+7)=D(X)+2^2D(Y)=1+4=5$. 所以 $Z\sim N(0,5)$
(3)**【解】**假设 $X_i$ 表示第 $i$ 颗骰子的点数$(i=1,2,\cdots,n)$. 则
$E(X_i)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}(i=1,2,\cdots,n)$.
又设 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$X_i(i=1,\cdots,n)$ 之间相互独立，则 $E(X)=E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{7n}{2}$.
(4)**【解】**$X\sim B(2,p)$，所以 $E(X)=0.9$，所以 $2p=0.9$. $p=0.45, q=1-p=0.55$，
$D(X)=2pq=2\times0.45\times0.55=0.495$.
(5)**【解】**因为 $E(X)=0, Y=X^{2n}, E(XY)=E(X^{2n+1})=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\xlongequal{x^{2n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\text{为奇函数}}0$，
$cov(X,Y)=E(X)E(Y)-E(XY)=0$，
所以 $\rho_{XY}=0$.
(6)**【解】**$X\sim\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant x\leqslant2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.
因为 $P(Y=1)=P(X>0)=\int_0^2\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$，
$P(Y=0)=P(X=0)=0$，
$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^0\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$，
于是 $E(Y)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}, E(Y^2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$，
$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.
(7)**【解】**$X$ 服从 $B(3,0.2)$. 所以 $E(X)=3p=0.6, D(X)=3pq=0.48$.
(8)**【解】**因为 $X$ 和 $Y$ 是两个相互独立的随机变量，所以 $cov(X,Y)=0$.
(9)**【解】**因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_0^1x\cdot2xdx=\frac{2}{3}$，
$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(y)dy=\int_5^{+\infty}y\cdot e^{-(y-5)}dy=6$，
又 $X$ 和 $Y$ 是两个相互独立的随机变量，所以 $E(XY)=E(X)E(Y)=4$.

(10)【解】因为 $X_1, X_2, X_3$ 相互独立,所以

$D(Y) = D(X_1 - 2X_2 + 3X_3) = D(X_1) + 4D(X_2) + 9D(X_3) = 46.$

**2.** (1)【解】因为 $X$ 和 $Y$ 同分布,所以 $E(U) = E(X) - E(Y) = 0, E(U)E(V) = 0.$

$E(UV) = E(X^2) - E(Y^2) = 0.$

所以 $\mathrm{cov}(X,Y) = E(UV) - E(U)E(V) = 0$. 所以答案是 D.

(2)【解】$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$,由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ 发散. 所以答案是 D.

(3)【解】因为 $X_1, X_2, X_3$ 都服从[0,2]上的均匀分布,

所以 $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{0+2}{2} = 1$. 所以 $E(3X_1 - X_2 + 2X_3) = 3E(X_1) - E(X_2) + 2E(X_3) = 4.$

所以答案为 C.

(4)【解】$P(X = 0) = 0.4, P(Y = 0) = 0.3.$

又因为 $0.1 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \times P(Y = 0)$. 所以答案是 A.

(5)【解】因为 $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = p_1 + 2p_2 + 3(1 - p_1 - p_2) = 3 - 2p_1 - p_2 = 2.3$

即 $2p_1 + p_2 = 0.7$　①

$E(X^2) = x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + x_3{}^2 p_3 = p_1 + 4p_2 + 9(1 - p_1 - p_2) = 5.9,$

即 $8p + 5p_2 = 3.1.$　②

解 ①② 得 $p_1 = 0.2, p_2 = 0.3, p_3 = 0.5$. 所以答案为 B.

(6)【解】易知答案为 A.

(7)【解】假设 $X$ 表示随机地无放回地抽取 3 张,抽得奖券的金额.

则 $P(X = 6) = P(3\text{ 张都是 }2\text{ 元}) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$

$P(X = 9) = P(2\text{ 张 }2\text{ 元},1\text{ 张 }5\text{ 元}) = \frac{C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$

$P(X = 12) = P(1\text{ 张 }2\text{ 元},2\text{ 张 }5\text{ 元}) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15},$

所以,$E(X) = 6 \cdot \frac{7}{15} + 9 \cdot \frac{7}{15} + 12 \cdot \frac{1}{15} = 7.8$,所以答案为 C.

(8)【解】因为 $X \sim N(\mu, 4^2), Y \sim N(\mu, 5^2)$

所以 $P_1 = \{X \leqslant \mu - 4\} = P\left\{\frac{X-\mu}{4} \leqslant -1\right\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1),$

$P_2 = \{Y \geqslant \mu + 5\} = P\left\{\frac{Y-\mu}{5} \geqslant 1\right\} = 1 - P\left\{\frac{Y-\mu}{5} \leqslant 1\right\} = 1 - \Phi(1).$

[其中 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数]. 所以答案为 A.

(9)【解】$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$

$E(\xi\eta) = E[(X+Y)(X-Y)] = E(X^2 + YX - XY - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2)$

$$E(\xi)E(\eta) = [E(X) + E(Y)][E(X) - E(Y)] = E^2(X) - E(X)E(Y) + E(Y)E(X) - E^2(Y)$$
$$= E^2(X) - E^2(Y).$$

所以答案为 B.

(10)【解】令 $X_i$ 表示每人的体重$(i = 1,2,\cdots,10)$,则 $X_i$ 独立同分布于 $X$. 所以 $E(X_i) = a.$

又 $Y = \frac{X_1 + \cdots + X_{10}}{10}$,则 $E(Y) = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{10}}{10}\right) = \frac{1}{10}E(X_1 + \cdots + X_{10})$

$$= \frac{1}{10}[E(X_1) + \cdots + E(X_{10})]$$

$$= \frac{1}{10} \times 10 \times a = a.$$

所以答案为 A.

**3.** (1) 证明：因为 $E[(X-c)^2]=E[X^2-2cX+c^2]=c^2-2cE(X)+E^2(X)$.

把 $c$ 看做未知量，则这是关于 $c$ 的二次三项式. 当 $c=\dfrac{2E(X)}{2}=E(X)$ 时有最小值.

所以 $D(X)<E\{(X-c)^2\}$，其中 $c\neq E(X)$.

(2) 证明：因为 $X,Y$ 为相互独立的随机变量，且 $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$f_2(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

所以 $Z$ 的密度

$$\varphi_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{-\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}\sim N(0,2),$$

即证得 $Z=X+Y$ 的分布密度服从正态分布

(3) 证明：因为 $X,Y$ 相互独立，

所以 $D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X)$

$=\{E(X^2)-[E(X)]^2\}\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\}+[E(X)]^2\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\}+[E(Y)]^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$

$=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=D(XY)$.

即证得 $D(XY)=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X)$.

(4) 证明：由(1)知：$D(X)$ 是 $E\{(X-c)^2\}$ 对于一切 $c$ 的最小值，所以

$E[X-\dfrac{x_i+x_k}{2}]^2\geqslant D(X)$.

**4.** (1)【**解**】依题意得：$E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka^k}{(1+a)^{k+1}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1}$.

令 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k+1}$，

则 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k+1}=x^2\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=x^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}(|x|<1)$.

所以 $f\left(\dfrac{a}{1+a}\right)=\dfrac{\dfrac{a^2}{(1+a)^2}}{\left(1-\dfrac{a}{1+a}\right)^2}=a^2$，即 $E(X)=\dfrac{1}{a}\cdot a^2=a$.

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2a^k}{(1+a)^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1-1)k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}-\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}=\frac{1}{1+a}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k\frac{a^k}{(1+a)^k}-a.$$

令 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kx^k$，则 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kx^k=x\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^{k-1}=x\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+1}\right)''$

$$=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=x\left[\frac{-x^2-(1-x)2x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

$$f\left(\frac{a}{1+a}\right)=\frac{\dfrac{2a}{1+a}}{\left(1-\dfrac{a}{1+a}\right)^3}=2a(1+a)^2,$$

所以 $E(X^2)=\dfrac{1}{1+a}\cdot 2a(1+a)^2-a=a+2a^2$.

即 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=a+2a^2-a^2=a+a^2$.

(2)【解】依题意得：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\,\frac{2}{\pi}\cos^2x\mathrm{d}x\xlongequal{x\cos^2x\text{ 为奇函数}}0$，

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\,\frac{2}{\pi}\cos^2x\mathrm{d}x\xlongequal{x^2\cos^2x\text{ 为偶函数}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos2x\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,\frac{2}{\pi}\,\frac{1+\cos2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}.$$

(3)【解】依题意：$X+Y$ 的分布律为

| $X+Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.10 | 0.40 | 0.35 | 0.15 |

所以 $\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的分布律为

| $\frac{\sin\pi(X+Y)}{2}$ | 0 | 1 | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.45 | 0.40 | 0.15 |

即得：$E\left[\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}\right]=0\times0.45+1\times0.40+(-1)\times0.15=0.25.$

(4)【解】依题意：假设 $X$ 为该汽车首次遇到红灯已通过的路口数，

则 $P(X=0)=P\{\text{第一个路口为红灯}\}=\frac{1}{2}.$

$P(X=1)=P\{\text{第一个路口为绿灯,第二个路口为红灯}\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$，

$P(X=2)=P\{\text{第一,二路口为绿灯,第三个路口为红灯}\}=\frac{1}{2^3}$，

$P(X=3)=P\{\text{第一,二,三路口为绿灯}\}=\frac{1}{2^3}$，

所以 $X$ 的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^3}$ |

则 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{67}{96}.$

(5)【解】依题意得：

$$E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{x>0\\y>0}}\sqrt{x^2+y^2}\,4xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}\cos\theta\sin\theta\cdot r\cdot4r^2\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

即 $E(\sqrt{X^2+Y^2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$

(6)【解】依题意得：$(X,Y)$ 的联合密度为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant1\\0, & \text{其他}\end{cases}$，

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1x[\int_0^x\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^1x^2\mathrm{d}x=2\cdot\frac{x^2}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1[\int_0^xy\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{x^2}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2[\int_0^x \mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{2}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2[\int_0^x y^2\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x[\int_0^x y\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

所以，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}$，$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{18}$，

则 $\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\ \sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\ \sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}.$

即得：$\rho_{XY}=\frac{1}{2}$

(7)**【解】**依题意：假设 $X,Y$ 为线段上的两点．则它们都服从$[0,l]$上的均匀分布，且它们相互独立．

$X$ 服从概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0\leqslant X\leqslant l\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的分布，$Y$ 服从概率密度为 $\varphi(y)=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0\leqslant y\leqslant l\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的分布，则$(X,Y)$的联合分布为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{l^2}, & 0\leqslant x,y\leqslant l\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

设 $Z=|X-Y|$，$D_1=\{(x,y):x>y,0\leqslant x,y\leqslant l\}$，$D_2=\{(x,y):x\leqslant y,0\leqslant x,y\leqslant l\}$，

则 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(x-y)\frac{1}{l^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(y-x)\frac{1}{l^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[\int_0^y(y-x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left(xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x+\frac{1}{l^2}\int_0^l\left(yx-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{l^2}\int_0^l\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{l}{3},$$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{l^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant l\\ 0\leqslant y\leqslant l}}(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{l^2}{6},$$

即 $D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\frac{l^2}{6}-\frac{l^2}{9}=\frac{l^2}{18}.$

(8)**【解】**因为 $X\sim N(a,\sigma^2)$，$Y\sim N(a,\sigma^2)$，

令 $Z=X-Y$，则 $Z\sim N(0,2\sigma^2)$．$\min(X,Y)=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}=\frac{X+Y-|Z|}{2}$，

所以 $E[\min(X,Y)]=E\left[\frac{X+Y-|X-Y|}{2}\right]=\frac{E(X)+E(Y)-E(|Z|)}{2}=a-\frac{1}{2}E(|Z|)$，

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}z\xlongequal{|z|e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\text{为偶函数}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\mathrm{d}z=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

所以 $E[\min(X,Y)]=a-\frac{1}{2}E(|Z|)=a-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}=a-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$，即求得 $E[\min(X,Y)]=a-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$

(9)【解】依题意得：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\mu}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t.$$

因为 $t\mathrm{e}^{-|t|}$ 为奇函数，$\mathrm{e}^{-|t|}$ 为偶函数，

所以 $E(X)=0+\mu\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t=\mu$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\mu}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)^2\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$

$$=\int_{0}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\mu^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mu\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2+\mu^2,$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2+\mu^2-\mu^2=2$，

即求得 $E(X)=\mu, D(X)=2$.

(10)【解】依题意得：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal[\text{积分区域中心对称}]{x\text{为奇函数}}0.$

同理：$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}$，

$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}.$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

所以，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{4}, D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{4}$，

即 $\rho_{(XY)}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0.$

即求得 $D(X)=\frac{1}{4}, D(Y)=\frac{1}{4}, \rho_{(XY)}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0.$

(11)【解】假设 $X$ 表示一周内发生故障的天数. 则 $X\sim B(5,0.8)$，

则 $P(X=0)=(0.8)^5=0.33, P(X=1)=C_5^1\times0.2\times(0.8)^4=0.41$，

$P(X=2)=C_5^2\times0.2^2\times(0.8)^3=0.20$，

$P(X\geqslant3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)=1-0.33-0.41-0.20=0.06.$

又设 $Y$ 为该企业的利润，依题意可知 $Y$ 的分布律为

| Y | 10 | 5 | 0 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.33 | 0.41 | 0.20 | 0.06 |

则 $E(Y)=10\times0.33+5\times0.41+0\times0.20+(-2)\times0.06=5.23$(万元)，

即求得一周内期望利率为 5.23 万元.

(12)【解】由二维正态密度的性质得：

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_i(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_i(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, (i=1,2).$

① $f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)\mathrm{d}y\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，

$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$

即可知：$E(X)=0, E(Y)=0, D(X)=1, D(Y)=1$，

$$\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right]=0,$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=0.$$

② 由已知条件得：

$$\varphi_1(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{1}{9}}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{9}\right)}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)\right],$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{1}{9}}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{9}\right)}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)\right],$$

则 $f_1(x)f_2(y)\neq f(x,y)$. 因此 $X,Y$ 不相互独立.

# 第四章　大数定律和中心极限定理

## 习题四

本章中 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数.

**1.** (1)**【解】**由伯努利大数定律知：$\forall\varepsilon=0$，有 $\lim\limits_{h\to\infty}P\left(\left|\frac{Y_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{Y_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=1-\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{Y_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1-1=0.$

(2)**【解】**$\mathrm{E}(X-Y)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)=2-2=0$，

$\mathrm{D}(X-Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}=1+4-2\times0.5\times1\times2=3$，

所以由切比雪夫不等式 $P(|X-\mathrm{E}(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2}$ 得：

$$P(|X-Y|\geqslant6)\leqslant\frac{\mathrm{D}(X-Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

**2.** (1)**【解】**依题意得：$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=3$，

$\mathrm{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}x^4\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=12.$

所以 $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=12-9=3.$

令 $Y=X-3$，所以 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)-3=0$，$\mathrm{D}(Y)=3.$

$$P\{0<X<6\}=P\{|X-3|<3\}=P\{|Y-\mathrm{E}(Y)|<3\}\geqslant1-\frac{\mathrm{D}(Y)}{3^2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

(2)**【解】**依题意：假设 $X$ 表示 400 台机器中发生故障的台数，则 $X\sim B(400,0.02)$，

由德莫弗 — 拉普拉斯定理：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X-400\times0.02}{\sqrt{400\times0.02\times0.98}}\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x),$$

所以 $P(X\geqslant2)=1-P(X\leqslant1)=1-P\left(\frac{X-8}{\sqrt{400\times0.02\times0.98}}\leqslant\frac{-7}{\sqrt{400\times0.02\times0.98}}\right)$

$$\approx1-\Phi(-2.5)=1-[1-\Phi(2.5)]=0.9938.$$

即机器出故障的台数不少于 2 台的概率为 0.9938.

(3)**【解】**依题意：假设 $X$ 表示 10000 盏灯中开着的灯数，则 $X\sim B(10000,0.7)$

由德莫弗 — 拉普拉斯定理：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X-7000}{\sqrt{10000\times0.3\times0.7}}\leqslant x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x),$$

所以$P(6800 \leqslant X \leqslant 7200)$

$$= P\left(\frac{6800-7000}{\sqrt{10000 \times 0.3 \times 0.7}} \leqslant \frac{X-7000}{\sqrt{10000 \times 0.3 \times 0.7}} \leqslant \frac{7200-7000}{\sqrt{10000 \times 0.3 \times 0.7}}\right)$$

$$\approx \Phi(4.36) - \Phi(-4.36) = \Phi(4.36) - 1 + \Phi(4.36)$$

$$= 2\Phi(4.36) - 1 = 2 \times 0.999993 - 1 = 0.999.$$

即在 6800 与 7200 之间的概率为 0.999.

(4)**【解】**依题意:假设 $X$ 表示 10000 中不合格品数,所以 $X \sim B(10000, 0.005)$

由德莫弗 — 拉普拉斯定理:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-50}{\sqrt{10000 \times 0.005 \times 0.995}} \leqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$

所以 $P(X \leqslant 70) = P\left(\frac{X-50}{\sqrt{10000 \times 0.005 \times 0.995}} \leqslant \frac{70-50}{\sqrt{10000 \times 0.005 \times 0.995}}\right)$

$$\approx \Phi(2.84) = 0.998.$$

即不合格品不多于 70 件的概率为 0.998.

[注:(2),(3),(4) 为同一类型的题型]

(5)**【解】**依题意:假设 $T_i$ 表示检查 $i$ 个产品需要的时间,则 $T_i$ 独立同分布.

$T_i = \begin{cases} 10, & \text{第 } i \text{ 个产品没有重复检查} \\ 20, & \text{第 } i \text{ 个产品需重复检查} \end{cases}$,则 $T_i$ 的分布律为:

| $T_i$ | 10 | 20 |
|---|---|---|
| $p$ | 0.5 | 0.5 |

所以$E(T_i) = 10 \times 0.5 + 20 \times 0.5 = 15, E(T_i^2) = 100 \times 0.5 + 400 \times 0.5 = 250$,

$$D(T_i) = E(T_i^2) - E(T_i)^2 = 25. (i = 1, 2, \cdots, 1900)$$

由林德伯格 — 勒维定理:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1900} T_i - 1900 \times 15}{\sqrt{1900} \times 5} \leqslant x\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$

所以 $P(\sum_{i=1}^{1900} T_i \leqslant 8 \times 3600) P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1900} T_i - 1900 \times 15}{\sqrt{1900} \times 5} \leqslant \frac{8 \times 3600 - 1900 \times 5}{\sqrt{1900} \times 5}\right)$

$$\approx \Phi(1.38) = 0.9162.$$

即求得在 8 h 内检查员检查的产品多于 1900 个的概率为 0.9162.

# 第五章　数理统计的基本概念

## 习题五

第五、六、七章中 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数;分位数用上侧分位数.

**1.** (1)**【解】**因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本,

所以 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, n\sigma^2)$,则 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$,

所以$\sqrt{C} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}, C = \frac{1}{n\sigma^2}$.

(2)**【解】**因为$(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 取自正态总体 $X \sim N(0, 2^2)$,

则 $X_1 - 2X_2 \sim N(0, 20), 3X_3 - 4X_4 \sim N(0, 100)$,

所以$\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0,1), \frac{3X_3 - 4X_4}{\sqrt{100}} \sim N(0,1)$,

即$\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{20}}, a=\frac{1}{20}; \sqrt{b}=\frac{1}{\sqrt{100}}, b=\frac{1}{100}$.

$Y$ 为自由度 2 的 $\chi^2$ 分布.

(3)**【解】**依题意得：

$E(X_i)=n, D(X_i)=2n(i=1,2,\cdots,n)$,

$$E(\overline{X})=n, D(\overline{X})=\frac{D(\sum_{i=1}^{n}X_i)}{n^2}=\frac{n\cdot 2n}{n^2}=2.$$

**2.** (1)**【解】**$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 $N(0,\sigma^2)$,所以

$$\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1), E\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2=1, D\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2=2,$$

$$D(A_2)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{D(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)}{n^2}=\frac{\sigma^4 D\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)}{n^2}=\frac{\sigma^4\cdot 2n}{n^2}=\frac{2\sigma^4}{n}.$$所以答案为 C.

(2)**【解】**因为 $X_1\sim N(\mu,\sigma^2), X_2\sim N(\mu,\sigma^2)$. 假设 $Y_1=X_1+X_2, Y_2=X_1-X_2$,

则 $E(Y_2)=E(X_1)-E(X_2)=0$.

$\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)=E(X_1^2-X_2^2)=E(X_1^2)-E(X_2^2)=0$.

所以答案为 B.

(3)**【解】**因为 $X\sim N(0,2^2)$, $X_i(i=1,\cdots,15)$ 为 $X$ 的简单随机样本,

则$\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{4}\sim\chi^2(10), \frac{X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2}{4}\sim\chi^2(5)$,

$$所以\frac{\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{40}}{\frac{X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2}{20}}\sim F(10,5), 即 Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}\sim F(10,5).$$

所以答案为 C.

**3. 计算题**

(1)**【解】**依题意:因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为总体 $N(0,0.3^2)$ 的一个样本,

所以$\sum_{i=1}^{10}\frac{X_i^2}{0.3^2}\sim\chi^2(10)$.

$$P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44)=P(\sum_{i=1}^{10}\frac{X_i^2}{0.3^2}>\frac{1.44}{0.09})=P[\chi^2(10)>16]=0.1,$$

即 $P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44)=0.1$.

(2)**【解】**因为总体 $X$ 服从 $N(\mu,\sigma^2)$,所以$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}}\sim N(0,1)$. 由 $P(|\overline{X}-\mu|>4)=0.02$,

知 $P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}}\right|>\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)=0.02$,

即 $\Phi(-\frac{4\sqrt{10}}{\sigma})=0.01$.

又 $\Phi\left(-\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)$,所以 $\Phi\left(\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)=0.99$,

查表得$\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}=2.33$, 得 $\sigma=\frac{4\sqrt{10}}{2.33}=5.43$.

(3)**【解】**依题意:假设样本容量为 $n$,则 $\overline{X}\sim N(72,\frac{100}{n}), \frac{\overline{X}-72}{\sqrt{\frac{100}{n}}}\sim N(0,1)$,

即$\dfrac{\overline{X}-72}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

由 $P(\overline{X}>70)\geqslant 0.95$ 得 $P\left(\dfrac{\overline{X}-72}{\frac{10}{\sqrt{n}}}>\dfrac{70-72}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)\geqslant 0.95$,

所以 $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)\leqslant 0.95$,查表得$\dfrac{\sqrt{n}}{5}\geqslant 1.65$,即 $n\geqslant 68.0625$.

(4)**【解】**① 依题意得:$E(|\overline{X}-\mu|^2)=D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{4}{n}\leqslant 0.1$,所以 $n\geqslant 40$.

② 因为 $X\sim N(\mu,4)$,所以 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{4}{n}\right)$,$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$,

所以 $P(|\overline{X}-\mu|\leqslant 0.1)=P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right|\leqslant\dfrac{0.1\sqrt{n}}{2}\right)\geqslant 0.95$.

$\Phi\left(\dfrac{1}{20}\sqrt{n}\right)\geqslant 0.975$,查表得$\dfrac{1}{20}\sqrt{n}\geqslant 1.96$,$n\geqslant 1537$.

(5)**【解】**由题意知:$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,样本容量为 $n$,

则$\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$

所以 $P\left(\dfrac{S^2}{\sigma^2}\leqslant 1.5\right)=P\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leqslant 1.5\times(n-1)\right]\geqslant 0.95$,

即 $P\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>1.5\times(n-1)\right]<1-0.95=0.05$. 〈1〉

由 $\chi^2$ 分布的上侧分位数 $P\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{0.05}(n-1)\right]=0.05$, 〈2〉

比较〈1〉,〈2〉,结合 $\chi^2$ 分布密度的图形,得到

$1.5\times(n-1)>\chi^2_{0.05}(n-1)$,查 $\chi^2$ 表可知:$n\geqslant 27$.

(6)**【解】**① 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$ 得:

$P\left(\dfrac{S^2}{\sigma^2}>2.041\right)=P\left(\dfrac{15S^2}{\sigma^2}>15\times 2.041\right)=P[\chi^2(15)>30.615]=0.01$.

② $\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$,所以 $D\left(\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\right)=2\times 15=30$,

于是 $30=D\left(\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\right)=\dfrac{225}{\sigma^4}D(S^2)$,$D(S^2)=\dfrac{30}{225}\sigma^4=\dfrac{2}{15}\sigma^4$.

(7)**【解】**① 因为$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}+\overline{X}-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+2(\overline{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\overline{X}\right)+n(\overline{X}-\mu)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2,\end{aligned}$$

即证得$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2$.

$$\begin{aligned}②\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2&=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2,\end{aligned}$$

即证得$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$.

(8)【解】由题意,根据经验分布函数定义可得:

$$F_{10}(x)\begin{cases}0, & x<-4\\ \frac{1}{10}, & -4\leqslant x<0\\ \frac{2}{10}, & 0\leqslant x<2\\ \frac{4}{10}, & 2\leqslant x<2.5\\ \frac{7}{10}, & 2.5\leqslant x<3\\ \frac{8}{10}, & 3\leqslant x<3.2\\ \frac{9}{10}, & 3.2\leqslant x<4\\ 1, & x\geqslant 4\end{cases}.$$

(9)【解】由题意,根据经验分布函数定义可得:

$$F_8(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{3}{8}, & 0\leqslant x<1\\ \frac{5}{8}, & 1\leqslant x<2.\\ \frac{7}{8}, & 2\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

(注:(8),(9) 为同一类题型)

# 第六章　参数估计

## 习题六

**1. 填空题**

(1)【解】因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

由$P\{|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}|<\lambda\}=1-\alpha$, $-\lambda<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\lambda$,则$\overline{X}-\lambda\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+\lambda\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$得置入区间$\left(\overline{X}-\lambda\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\lambda\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$,

所以$\lambda=u_{\frac{\alpha}{2}}$.

(2)【解】由(1)题及查表知$\lambda=u_{0.025}=1.96$.所以$\mu$的置信区间为

$\left(5-1.96\times\dfrac{0.9}{\sqrt{9}},5+1.96\times\dfrac{0.9}{\sqrt{9}}\right)=(4.412,5.588)$.

(3)【解】$\mathrm{E}\left(CX_1+\dfrac{1}{1999}X_2\right)=C\mathrm{E}(X_1)+\dfrac{1}{1999}\mathrm{E}(X_2)=\left(C+\dfrac{1}{1999}\right)\mu=\mu$,所以$C=\dfrac{1998}{1999}$.

(4)【解】因为$X\sim V(\theta,\theta+1)(\theta>0)$

所以总体$X$的密度为$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \theta\leqslant x\leqslant\theta+1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

① 矩估计量:

$\mathrm{E}(X)=\int_{\theta}^{\theta+1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2\theta+1)$.

用 $\overline{X}$ 来估计 $\mathrm{E}(X)$：$\frac{1}{2}(2\hat{\theta}+1)=\overline{X},\hat{\theta}+\frac{1}{2}=\overline{X},\hat{\theta}=\overline{X}-\frac{1}{2}$.

② 最大似然估计：

因为 $X_i\sim\varphi_i(x_i)=\begin{cases}1, & \theta\leqslant x_i\leqslant\theta+1\\0, & \text{其他}\end{cases}$.$(i=1,2,\cdots,n)$

所以$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合密度为 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}1, & \theta\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant\theta+1\\0, & \text{其他}\end{cases}$.

$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\theta\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant\theta+1$ 范围中为常数，又 $\theta\geqslant\min\{x_1,\cdots,x_n\}$. 所以

$$\hat{\theta}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}.$$

(5)**【解】**因为$(X_1,X_2,\cdots X_n)$来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，

即 $\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{a}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{b}\right\}=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i-\mu)^2-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i-\mu)^2$

$$=\frac{1}{a}n\sigma^2-\frac{1}{b}n\sigma^2=n\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sigma^2,$$

所以 $\mathrm{E}(X_i-\mu)^2=n\sigma^2$.

**2. 选择题**

(1)**【解】**易知 $\mu$ 的置信区间为$\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，当 $1-\alpha$ 缩小时，$u_{\frac{\alpha}{2}}$ 缩小. 置信区间长度为 $2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. 所以答案为 A.

(2)**【解】**由(1)知 $\mu$ 的置信区间长度为 $2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，与样本的取值无关. 所以答案为 C.

(3)**【解】**答案为 A.

(4)**【解】**因为$\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计，所以 $\mathrm{E}(\hat{\theta})=\theta$. 所以$\hat{\theta}^2$ 为 $\theta^2$ 的有偏估计.

又 $\mathrm{E}((\hat{\theta})^2)=\mathrm{D}(\hat{\theta})+[\mathrm{E}(\hat{\theta})]^2=\mathrm{D}(\hat{\theta})+\theta^2\neq\theta^2$，所以$\hat{\theta}^2$ 为 $\theta^2$ 的有偏估计. 即答案为 B.

(5)**【解】**按矩估计方法：$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\mu}^2=\overline{X}^2,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$，

所以$\hat{\mu}^2+\sigma^2=\overline{X}^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$. 即答案为 D.

(6)**【解】**易知答案为 C.

**3.** (1)**【解】**依题意可得：$X_i\sim P(X_i=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$

① 矩估计因为 $\mathrm{E}(X)=\lambda$，所以$\hat{\lambda}=\overline{X}$.

② 最大似然函数为

$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$，

$\ln L(\lambda)=\ln\mathrm{e}^{-n\lambda}+\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}=-n\lambda+\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$.

$\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$，所以$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$. 即 $\lambda$ 的矩估计为$\hat{\lambda}=\overline{X}$，最大似然估计为$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$.

(2)**【解】**① 矩估计：

因为 $X$ 服从$(a,b)$上的均匀分布，所以 $\mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2}$，$\mathrm{D}(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$

所以$\dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\overline{X},\hat{a}+\hat{b}=2\overline{X}$ 〈1〉

$\dfrac{1}{12}(\hat{b}-\hat{a})^2=M_2,\hat{b}-\hat{a}=2\sqrt{3M_2}$ 〈2〉

其中 $M_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

解〈1〉〈2〉得$\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3M_2},\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3M_2}$,

所以 $\hat{b}^3=(\overline{X}+\sqrt{3M_2})^3,\hat{a}^3=(\overline{X}-\sqrt{3M_2})^3$.

② 最大似然估计:

$X_i\sim\varphi_i(x_i)=\begin{cases}1/(b-a), & a\leqslant x_i\leqslant b\\0, & \text{其他}\end{cases}.(i=1,2,\cdots,n)$

所以$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合密度为$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant b\\0, & \text{其他}\end{cases}$.

由联合密度函数的方程可知:$b-a$ 越小,$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 就越大,

但 $b-a$ 的值不能小于$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$.

所以$\hat{b}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i,\hat{a}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i;\hat{b}^3=(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i)^3,\hat{a}^3=(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i)^3$.

(3)**【解】**依题意可得最大似然函数为

$f(x_1,\cdots,x_n,\mu,\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}x_i^{-1}e^{-\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

$\ln f=\ln\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}x_i^{-1}e^{-\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\ln(2\pi)^{-\frac{n}{2}}-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2$.

$\dfrac{\partial\ln f}{\partial\mu}=\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}2(\ln x_i-\mu)=0$ 〈1〉

$\dfrac{\partial\ln f}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2=0$ 〈2〉

解〈1〉,〈2〉得:$\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i,\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2$,即 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的最大似然估计分别为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i;\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2.$$

(4)**【解】**依题意可得:总体 $X\sim\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0\leqslant x\leqslant\theta\\0,\text{其他}\end{cases}$.

① 矩估计:

因为 $E(X)=\dfrac{\theta}{2}$,所以$\dfrac{\hat{\theta}_1}{2}=\overline{X},\hat{\theta}_1=2\overline{X}$,

$E(\hat{\theta}_1)=E(2\overline{X})=2\dfrac{\theta}{2}=\theta$,所以$\hat{\theta}_1$ 是 $\theta$ 的无偏估计;

因为 $D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)$,

$D(\hat{\theta}_1)=4D(\overline{X})$,所以 $4D(\overline{X})=\dfrac{4}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\dfrac{4}{n^2}\cdot n\cdot\dfrac{\theta^2}{12}=\dfrac{\theta^2}{3n}\to 0,(n\to\infty)$

所以$\hat{\theta}_1$ 是 $\theta$ 的一致估计.

② 最大似然估计:

因为 $X$ 服从$(0,\theta)$上的均匀分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 $X$ 的样本,

所以$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合密度为$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$.

由联合密度函数可知

$\theta$越小,$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$就越大.但$\theta$的值不能小于$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$.

所以$\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$.

假设$Z=\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$.又设$F_X(x)$是总体$X$的分布函数,则$Z$的密度函数为

$F_X(z)=\{F_X(x)\}^n$,

$Z$的密度函数为

$$\varphi_Z(x)=\{[F_n(x)]^n\}'=n\{F_X(z)\}^{n-1}\varphi(x)=\begin{cases}n(\dfrac{z}{\theta})^{n-1}\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant z\leqslant\theta\\ 0, & 其他\end{cases},$$

所以 $\mathrm{E}(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}z\varphi_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^\theta zn(\frac{z}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}\mathrm{d}z=\int_0^\theta n(\frac{z}{\theta})^n\mathrm{d}z=\frac{n}{n+1}\frac{z^{n+1}}{\theta^n}\Big|_0^\theta=\frac{n}{n+1}\theta$,

所以$\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$不是$\theta$的无偏估计.

$$\mathrm{E}(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\varphi_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^\theta z^2n(\frac{z}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}\mathrm{d}z=\int_0^\theta n\frac{z^{n+1}}{\theta^n}\mathrm{d}z=\frac{n}{n+1}\frac{z^{n+2}}{\theta^n}\Big|_0^\theta=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$\mathrm{D}(Z)=\mathrm{E}(Z^2)-[\mathrm{E}(Z)]^2=\frac{n}{n+2}\theta^2-(\frac{n}{n+1}\theta)^2=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta\to 0,n\to\infty.$$

所以$\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$是$\theta$的一致估计.

(5)**【解】**依题意可得最大似然函数为

$$f(x_1,\cdots x_n,\lambda)=\lambda^n a^n \mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a-1}$$

$$\ln f=\ln\lambda^n+\ln a^n-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^a+\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^{a-1}=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^a-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i^{a-1}+\ln a^n,$$

$$\frac{\partial\ln f}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i^a=0,$$

所以$\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^a}$.

即参数$X$的最大似然估计量为$\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^a}$.

(6)**【解】**① 依题意得:$\mathrm{E}(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iX_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{E}(X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{E}(X)$,又$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=1$,

所以 $\mathrm{E}(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iX_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(X)$,

即得$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iX_i$为$\mathrm{E}(X)$的无偏估计.

②$\mathrm{D}(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iX_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2\mathrm{D}(X_i)=\mathrm{D}(X)\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2$.

该问题转化为:在条件$\alpha_i>0$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$下,$\alpha_i$取何值时,$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2$最小.

条件极值:$\begin{cases}条件:\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1\\ 目标函数:f(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2\ 最小\end{cases}$

下面用拉格朗日乘子法算：

令 $F(\alpha_1,\cdots\alpha_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)$

$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=2\alpha_i+\lambda=0,(i=1,2,\cdots,n)$. 解得 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$.

所以在上述所有无偏估计中，以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 最有效.

(7) 依题意可得：$1-\alpha=0.95,\alpha/2=0.025,n=20,s^2=0.049$.

又 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{19S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(19)$,

由 $P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(19)<\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(19)\}=1-\alpha=0.95$ 查 $\chi^2$ 表，查得

所以 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(19)=\chi^2_{0.025}(19)=32.9,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(19)=\chi^2_{0.975}(19)=8.91$.

$\sigma^2$ 的 95% 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(19)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(19)}\right]=\left[\frac{19\times0.049}{32.9},\frac{19\times0.049}{8.91}\right]=[0.03,0.10],$$

所以，$\sigma^2$ 的 95% 置信区间为[0.17,0.32].

(8)【解】依题意知：$m=200,\sigma_1=2.18,\overline{X}=5.32;n=100,\sigma_2=1.76,\overline{y}=5.76$.

因为 $\sigma_1,\sigma_2$ 已知，所以置信区间的上限为 $(\overline{X}-\overline{y})-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$,

置信区间的下限为 $(\overline{X}-\overline{y})+\mu_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$.

$$u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96,u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}=1.96\sqrt{\frac{(2.18)^2}{200}+\frac{(1.76)^2}{100}}=0.46,$$

$\overline{X}-\overline{y}=-0.44$.

即得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95% 的置信区间为[-0.9,0.02].

# 第七章 假设检验

## 习题七

**1.** (1)【解】当 $\sigma^2$ 未知时，要检验 $H_0:\mu=\mu_0$，应选统计量：$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$，当 $H_0$ 成立时，该统计服从 $t(n-1)$ 分布.

(2)【解】在显著性检验中，对于犯二类错误的概率，当一个缩小时另一个会扩大. 所以要犯两类错误的概率同时变小，只能增加样本容量.

**2.** (1)【解】显著水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 $H_0$ 的拒绝域为：$\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}$.

接受 $H_0$ 的接受域为 $\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}$；查表得 $u_{0.025}=1.96$.

显著水平 $\alpha=0.01$ 下拒绝 $H_0$ 的拒绝域为：$\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.005}$. 接受 $H_0$ 的接受域为 $\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.005}$，查表得 $u_{0.005}=2.57$. 所以答案为 B.

(2)【解】第二类错误的定义为：$H_0$ 假时，接受 $H_0$. 所以答案为 C.

(3)【解】当 $\sigma^2$ 未知时，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0=0$ 时，使用的统计量为

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{X}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/n}}=\frac{\sqrt{n(n-1)}\overline{X}}{Q}.$$ 所以答案为 A.

**3.** (1)【解】依题意知：$n=9$，$\alpha=0.05$，零件强度服从正态分布

$\mu$ 未知，检验 $H_0:\sigma^2=1.6^2$.

选取统计量 $\chi^2=\dfrac{(9-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)$，

接受域为 $2.18=\chi^2_{0.975}(8)<\dfrac{(9-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{0.025}(8)$，查表得 $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，

而 $\dfrac{(9-1)s^2}{\sigma^2}=3.73$. 所以认为 $\sigma^2$ 没有发生显著变化.

(2)【解】依题意得：$n=31$，$\alpha=0.05$，

$\sigma$ 未知检验 $H_0:\mu=\mu_0=10.5$，

选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t(30)$(当 $H_0$ 成立时)，

拒绝域为 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\right|>t_{0.025}(30)$，查表得 $t_{0.025}(30)=2.042$，

而 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\dfrac{11.08-10.05}{0.516}\sqrt{30}=6.26>2.042$. 所以不能认为机床正常工作.

(3)【解】依题意得：$m=n=31$，$\alpha=0.05$，其中 $m,n$ 分别为甲，乙的样本量.

$\sigma_1=\sigma_2$ 未知的情形下检验 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$.

选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)=t(8)$(当 $H_0$ 成立时)，

其中，$S_W=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}$，

拒绝域为 $\left|\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(8)=2.306$，

$s_W=\sqrt{\dfrac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}}=\sqrt{\dfrac{4\times2.07^2+4\times2.35^2}{5+5-2}}=2.21$，

而 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{s_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{89.6-88}{2.21\sqrt{\dfrac{2}{5}}}=1.36<2.306$. 所以认为可用乙代替甲.

(4)【解】依题意知：$n=100$，$\alpha=0.01$，

①$\sigma=1$ 已知的情形下检验 $H_0:\mu=\mu_0=5$.

选取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$(当 $H_0$ 成立时)，

拒绝域为 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.005}=2.58$，

而 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}=\dfrac{5.32-5}{1}\sqrt{100}=3.2>2.58$. 所以拒绝 $H_0$，接受 $H_1$.

② 检验 $H_1:\mu=4.8$ 下犯第二类错误的概率. 总体为 $N(4.8,1)$，

$\overline{X}\sim N\left(4.8,\dfrac{1}{100}\right)$，

$$\beta=P(\text{接受 }H_0\mid\mu=4.8)=P\left(\sqrt{100}\,\frac{|\overline{X}-5|}{1}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=P\left(\frac{10\,|\overline{X}-5|}{1}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$=P\left(\frac{50-u_{0.005}}{10}<\overline{X}<\frac{50+u_{0.005}}{10}\right)$$

$$=\Phi(2+u_{0.005})-\Phi(2-u_{0.005})=\Phi(2+2.58)-\Phi(2-2.58)$$

$$=\Phi(4.58)-\Phi(-0.58)=\Phi(4.58)-1+\Phi(0.58)=1-1+\Phi(0.58)=0.7190.$$